*Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 79–84*

*Ю. В. Немировский*

# ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И КРУГЛЫХ СЛОИСТЫХ ПЛИТ ИЗ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

***Аннотация.*** Для оценки эффективности плоских преград при воздействии нагрузок обычно исследуется зависимость параметров их остаточной повреждаемости от амплитуды или импульса ударной волны. Применительно к однородным изотропным плитам такие решения строятся на основе модели идеального жестко-пластического тела, показывают достаточную эффективность результатов и вполне удовлетворительные совпадения с экспериментами. Решение многих задач и обзор полученных результатов для однородных балок и пластин можно найти в [1], [2]. Во многих областях современной техники существующие жесткие требования к надежности эксплуатации конструкции не могут быть обеспечены при использовании однородных материалов и возникают серьезные надежды на использование композитных конструкций. Ясно, что на этом пути могут быть созданы эффективные конструкции защитных преград. Прежде всего здесь следует исследовать возможности слоистых преград. В настоящее время существует большое количество технологий, позволяющих создать слоистый пакет из практически любых материалов с существенно различными свойствами. К ним можно отнести, в частности, технологии склеивания диффузионной сварки под давлением и сварку взрывом, плазменное или холодное газодинамическое напыление, магнитно-ультразвуковую наплавку, вакуумно-химическое осаждение, электронно-дуговую металлизацию и другие. Для конструкций, предназначенных к восприятию взрывных нагрузок, наиболее приемлемой, по-видимому, следует считать технологию сварки взрывом как наиболее дешевую и обеспечивающую прочное соединение практически любых металлов на больших площадях [3]–[5]. При этом возникает проблема анализа поведения и оценки эффективности таких конструкций с точки зрения их повреждаемости при воздействии нагрузок взрывного типа.

***Ключевые слова***: однородные и слоистые балки, модель идеального жестко-пластического тела, пределы текучести, предельный изгибающий момент, вес конструкции, остаточный прогиб, рациональный проект.

УДК: 539.375

---


*Немировский Юрий Владимирович*
`e-mail`: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 11.02.2017

Рассмотрим слоистую плиту из набора любых металлических материалов, расположенных симметрично относительно отсчетной (срединной) плоскости. Будем предполагать, что каждый из слоев является идеальным жестким пластическим изотопным или ортотропным материалом, подчиняющимся условию пластичности Мизеса – Хилла:

$$f_k\left(\sigma_{1k},\sigma_{2k},\sigma_{12k}\right)=a_{11k}\sigma_{1k}^2+a_{12k}\sigma_{1k}\sigma_{2k}+a_{22k}\sigma_{2k}^2+a_{13k}\sigma_{12k}^2-\sigma_{0k}^2=0, \qquad (1)$$

$$(k=1,2,...,n)$$

и закону пластического течения:

$$\dot{\varepsilon}_{ik}=\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial\sigma_{ik}},\ \ (i=1,2)\,,\ \ \dot{\varepsilon}_{12}=\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial\sigma_{12k}},\ \ \lambda_k>0. \qquad (2)$$

Здесь $\sigma_{ik}$, $\sigma_{12k}$ – безразмерные напряжения (отнесённые к характерному по пределу текучести), $\dot{\varepsilon}_{ik}$, $\dot{\varepsilon}_{12k}$ – компоненты тензора скоростей деформаций; $a_{11k},...,a_{13k}$, $\sigma_{0k}$ – постоянные. Точка обозначает частную производную по времени. Если слоистый пакет собран из металлов, то для него правомерно использовать гипотезы Кирхгофа – Лява, в соответствии с которыми

$$\dot{\varepsilon}_i=-z\dot{\kappa}_i,\ \ \dot{\varepsilon}_{12}=-z\dot{\kappa}_{12},\ \ (i=1,2)\,,\ \ \kappa_i=\frac{\partial^2 w}{\partial x_i},\ \ \kappa_{12}=\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\partial x_2}, \qquad (3)$$

где $w$, $z$ – безразмерная прогиб и координата по нормали к пластине, $x_i$ – безразмерные координаты в плоскости пластины, $\kappa_i$, $\kappa_{12}$ – компоненты тензора кривизны и кручения плиты при деформации.

Выражения (3) с учетом (1) и (3) можно записать в виде

$$-z\dot{\kappa}_1=\lambda_k\left(2a_{11k}\sigma_{1k}+a_{12k}\sigma_{2k}\right),-z\dot{\kappa}_2=\lambda_k\left(2a_{22k}\sigma_{2k}+a_{12k}\sigma_{1k}\right),-z\dot{\kappa}_{12}=2\lambda_k a_{13k}\sigma_{12k}.$$

Откуда получим

$$\sigma_{1k}=-\frac{z}{\lambda_k}\left(2b_{11k}\dot{\kappa}_1-b_{12k}\dot{\kappa}_2\right),\quad \sigma_{2k}=-\frac{z}{\lambda_k}\left(2b_{22k}\dot{\kappa}_2-b_{12k}\dot{\kappa}_1\right),\quad \sigma_{12k}=-\frac{z}{\lambda_k}b_{13k}\dot{\kappa}_{12} \qquad (4)$$

$$b_{11k}=\frac{a_{22k}}{4a_{11k}a_{22k}-a_{12k}^2},\ \ b_{22k}=\frac{a_{11k}}{4a_{11k}a_{22k}-a_{12k}^2},\ \ b_{12k}=\frac{a_{12k}}{4a_{11k}a_{22k}-a_{12k}^2},\ \ b_{13k}=\frac{1}{a_{13k}}.$$

Подставляем выражения (4) в (1), получим

$$\lambda_k=\frac{|z|\,\Psi_k^{1/2}}{\sigma_{0k}},\ \ \Psi_k=b_{11k}\dot{\kappa}_1^2+b_{22k}\dot{\kappa}_2^2-b_{12k}\dot{\kappa}_1\dot{\kappa}_2+b_{13k}\dot{\kappa}_{12}^2. \qquad (5)$$

В соответствии с принципом виртуальных мощностей для рассматриваемой плиты имеем уравнение

$$\iiint\limits_v\left(\sigma_1\dot{\varepsilon}_1+\sigma_2\dot{\varepsilon}_2+2\sigma_{12}\dot{\varepsilon}_{12}\right)dv=\iint\limits_s P\dot{w}ds-\iiint\limits_v\rho\ddot{w}dv,$$

которое с учетом выражений (3)–(6) примет вид:

$$4\iint\limits_{s}\left[\sum_{k=1}^{n}\sigma_{0k}\Psi_k^{1/2}\left(h_k^2-h_{k-1}^2\right)\right]ds=\iint\limits_{s}\left[P-2\ddot{w}\sum_{k=1}^{n}\rho_k\left(h_k-h_{k-1}\right)\right]\dot{w}ds+\int\limits_{L}^{\left(Q_n\dot{w}+M_n\frac{\partial\dot{w}}{\partial n}\right)dl}. \tag{6}$$

Здесь $P,\ h_k,\ \rho_k$ – безразмерные давления, координаты раздела слоев $(h_0=0)$ и плотности материалов слоев. $M_n,\ Q_n$ – внешние изгибающий момент и перерезывающая сила на контуре.

Для защемленной эллиптической плиты скорость прогиба можно представить в виде:

$$\dot{w}=\dot{A}\left(t\right)\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^2, \tag{7}$$

где $a_1,\ \ a_2$ – безразмерные полуоси эллипса. Подставляя (8) в (7), в случае равномерно распределенного давления получим уравнение для функции $A\left(t\right)$.

$$\ddot{A}=P\left(t\right)d_1-d_2 \tag{8}$$

$$d_1=\frac{\iint\limits_{s}\left(1-\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)^2ds}{2\iint\limits_{s}\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k\left(h_k-h_{k-1}\right)ds},\quad d_2=\frac{2\iint\limits_{s}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_{0k}\bar{\Psi}_k^{1/2}\left(h_k^2-h_{k-1}^2\right)ds}{2\iint\limits_{s}\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k\left(h_k-h_{k-1}\right)ds} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}\bar{\Psi}_k{=}b_{11k}\bar{\kappa}_1^2+b_{22k}\bar{\kappa}_2-b_{12k}\bar{\kappa}_1\bar{\kappa}_2+b_{12k}\bar{\kappa}_{12}^2,\\ \bar{\kappa}_1{=}\frac{4}{a_1^2}\left(\frac{3x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-1\right),\ \ \bar{\kappa}_2=\frac{4}{a_2^2}\left(\frac{3x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_1^2}{a_1^2}-1\right)\\ \bar{\kappa}_{12}=\frac{8x_1x_2}{a_1^2a_2^2}.\end{gathered} \tag{10}$$

Решение уравнения (9) при нулевых начальных условиях $A\left(0\right)=\dot{A}\left(0\right)=0$ имеет вид

$$\begin{gathered}A\left(t\right)=d_1J\left(t\right)-\tfrac{1}{2}d_2t^2,\ \ J\left(t\right)=\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^\tau P\left(\tau\right)d\tau\right)dt,\\ \dot{A}\left(t\right)=d_1I\left(t\right)-d_2t,\ \ I\left(t\right)=\int\limits_0^t P\left(\tau\right)d\tau.\end{gathered} \tag{11}$$

Время остановки $t^*$ определяется из условия $\dot{A}\left(t^*\right)=0$ или $d_1I\left(t^*\right)-d_2t^*=0$, и амплитуда остаточного прогиба будет равна

$$A_*=A\left(t_*\right)=d_1J\left(t^*\right)-\frac{1}{2}d_2t^{*2}. \tag{12}$$

Решение для круглых защитных пластин $(a_1=a_2=a)$ в случае осесимметричного нагружения и защемления будет иметь тот же вид (14), если вместо выражений (10), (11) использовать выражения

$$d_1 = \frac{\int\limits_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 r dr}{2\int\limits_0^a \left[\sum\limits_{k=1}^n \rho_k \left(h_k - h_{k-1}\right)\right] r dr}, \quad d_2 = \frac{2\int\limits_0^a \sum\limits_k \bar{\Psi}_k^{1/2} \left(h_k^2 - h_{k-1}^2\right) r dr}{\int\limits_0^a \left[\sum\limits_k^{\rho_k (h_k - h_{k-1})}\right] r dr} \tag{13}$$

$$\bar{\Psi}_k^{1/2} = b_{11k}\bar{\kappa}_1^2 + b_{22}\bar{\kappa}_2^2 - b_{12}\bar{\kappa}_1\bar{\kappa}_2, \quad \bar{\kappa}_1 = \frac{4}{a^2}\left(1 - 3\frac{r^2}{a^2}\right), \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{4}{a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \tag{14}$$

Для шарнирно-опертых пластин получим аналогичное решение, если вместо (16) использовать выражение

$$\bar{\kappa}_1 = \frac{4}{11a^2}\left(9\frac{r^2}{a^2} - 7\right), \quad \bar{\kappa}_2 = \frac{4}{11a^2}\left(3\frac{r^2}{a^2} - 7\right). \tag{15}$$

Решение (14) можно использовать также в случае создания конструкции с профилированными слоями. Это позволяет поставить и решить задачу о создании оптимальных проектов для эллиптических и круглых слоистых при воздействии нагрузок взрывного типа. Для этого необходимо распределить материалы в конструкции таким образом, чтобы при сохранении общей массы конструкции

$$2\iint\limits_s \left[\sum_{k=1}^n \rho_k \left(h_k - h_{k-1}\right)\right] ds = M_0 = const \tag{16}$$

было достигнуто минимальное значение амплитуды остаточного прогиба $A^*$ или максимальное значение предельной нагрузки $P^* = \frac{d_2}{d_1}$. Соответствующая задача является классической задачей вариационного исчисления, и решение ее здесь обсуждать не будем. Для прямоугольного импульса с амплитудой $P_0$ и временем действия $t_0$ время остановки и амплитуда остаточного прогиба определяются выражениями

$$t_* = \frac{P_0 t_0}{P^*}, \quad A_* = \frac{P_0 t_0^2 d_1}{2}\left(\frac{P_0}{P^*} - 1\right), \quad \left(P_0 \geq P^*\right). \tag{17}$$

Если толщины слоев ($\delta_k = h_k - h_{k-1}$) постоянны, то предельная нагрузка $P^*$ определяется равенством

$$P^* = \frac{1}{C}\left\{\frac{\sigma_{01}\alpha_1}{4\rho_1^2}\left(M_0 - 2\sum_{j=2}^n \rho_j\delta_j\right)^2 + \left[\frac{1}{\rho_1}M_0 - 2\sum_{j=2}^n \rho_j\delta_j + 2\sum_{s=2}^{j-1}\sigma_s\right]\sum_{j=2}^n \sigma_{0j}\alpha_j\delta_j^2\right\},$$

$$C = \frac{1}{2s}\iint\limits_s \left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right) ds, \quad \alpha_k = \frac{2}{s}\iint\limits_s \bar{\Psi}_k^{1/2} ds, \quad (k = 1, ..., n),$$

где $S$ – площадь пластины.

Для трехслойной пластины из двух материалов

$$P^* = \frac{\sigma_{01}\alpha_1}{4\rho_1^2}\left(M_0 - 2\rho_2\delta_2\right)^2 + \frac{\sigma_{02}\alpha_2}{\rho_1}\left(M_0 - 2\rho_2\delta_2\right)\delta_2 + \sigma_{02}\alpha_2\delta_2^2, \quad \delta_1 = \frac{M_0}{2\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_1}\delta_2. \tag{18}$$

Максимальное значение $P^{**}$ предельной нагрузки будет достигнуто, если в (18) толщина нагружаемого слоя будет равна

$$\delta_2^* = \frac{M_0\left(\sigma_{02}\alpha_2\rho_1 - \sigma_{01}\alpha_1\rho_2\right)}{\left[\sigma_{02}\alpha_2\rho_1\left(\rho_1 - 2\rho_2\right) + \sigma_{01}\alpha_1\rho_2^2\right]}, \tag{19}$$

причем материалы должны быть составлены так, чтобы числитель и знаменатель в (19) были отрицательными. В этом случае, как следует из (17), амплитуда остаточного прогиба будет минимальной.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упруго-пластических сред. Серия: Механика. Новое в зарубежной науке. 1975. Вып. 5. С. 155–247.

[2] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1984. 234 с.

[3] Дерибас А. А. Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1972. 188 с.

[4] Яковлев И. В., Сиротенко Л. Д., Ханов А. М. Сварка взрывом армированных композиционных материалов. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1991. 119 с.

[5] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3, № 4. P. 669–701.

*Yu. V. Nemirovskii*

**DYNAMIC BEND OF ELLIPTIC AND ROUND COMPOSITE BOARDS FROM RIGID PLASTIC MATERIAL**

*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

***Abstract.*** For an assessment of effectiveness of flat barriers at influence of loadings usually dependence of parameters of their residual damageability on amplitude is investigated or shockwave impulse. In relation to the homogeneous isotropic plates such decisions are under construction on the basis of model of ideal rigid and plastic bodies, show sufficient effectiveness of results and quite satisfactory coincidence to experiments. Solution of many tasks and review the received results for the homogeneous beams and plates it is possible to find in [1], [2]. In many fields of the modern technique the existing strict conditions to cannot be provided to maintainability of a design at use of the homogeneous materials there are also serious hopes on use of composite designs. It is clear, that on this way can be efficient designs of protective barriers are created. First of all here it is necessary to investigate possibilities of stratified barriers. Now there is a large amount of the technologies allowing to create a stratified package from almost any materials with significantly various properties. To them it is possible to refer, in particular, technologies of pasting of diffusion welding under pressure and welding by explosion, plasma or cold gasdynamic dusting, magnetic and ultrasonic naplavka, vacuum and chemical deposition, electronic and arc metallization and others. For the designs intended to to perception of explosive loadings, the most acceptable, apparently, follows to consider a weld procedure explosion as the cheapest and providing strong connection practically any metals on larger squares [3]–[5]. At it there is a problem of the analysis of behavior and an assessment of effectiveness of such designs from the point of view of their damageability at influence of loadings explosive type.

***Keywords***: the homogeneous and stratified beams, model of an ideal rigid and plastic body, yield points, the limiting moment of deflection, structural weight, residual deflection, rational project.

## REFERENCES

[1] Mazalov V. N., Nemirovskij Ju. V. Dinamika tonkostennyh plasticheskih konstrukcij // Problemy dinamiki uprugo-plasticheskih sred. Serija: Mehanika. Novoe v zarubezhnoj nauke. 1975. Vyp. 5. S. 155–247. (in Russian).

[2] Komarov K. L., Nemirovskij Ju. V. Dinamika zhestko-plasticheskih jelementov konstrukcij. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1984. 234 s. (in Russian).

[3] Deribas A. A. Fizika uprochnenija i svarki vzryvom. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1972. 188 s. (in Russian).

[4] Jakovlev I. V., Sirotenko L. D., Hanov A. M. Svarka vzryvom armirovannyh kompozicionnyh materialov. Novosibirsk: Nauka, Sibirskoe otdelenie, 1991. 119 s. (in Russian).

[5] Fleck J., Laber A., Leonard R. Explosive welding of composite materials // J. Compos. Mater. 1969. Vol. 3, № 4. P. 669–701.

*Nemirovskii Yuri Vladimirovich*, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Associate at Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.