

В. Н. Орлов^{1,2}, А. Ю. Иваницкий³, Н. В. Кудряшова³

**ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА
НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО
ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ТРЕТЬЕЙ
СТЕПЕНИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ**

¹ Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

² Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, г. Ялта, Россия

³ Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Основной задачей в теории дифференциальных уравнений является теорема существования и единственности решения. Особенность нелинейных дифференциальных уравнений связана с наличием подвижных особых точек, которые относят такие уравнения к классу в общем случае не разрешимых в квадратурах. Следует отметить, что для нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками отсутствует аналог классических теорем существования – теоремы Коши, теоремы Пикара. В частности, доказательство теоремы Коши основано на методе мажорант, который применяется к правой части рассматриваемого уравнения. Такой подход в доказательстве ограничивает возможность использования этой теоремы для построения аналитического приближенного решения. В данной работе дается доказательство теоремы существования и единственности решения рассматриваемого класса нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки, применяемое к искомому решению. Такой подход позволяет воспользоваться теоремой существования для построения аналитического приближенного решения.

© Орлов В. Н., Иваницкий А. Ю., Кудряшова Н. В., 2017
Орлов Виктор Николаевич

e-mail: orlowvn@rambler.ru, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математики, теории и методики обучения математике ГПА (филиал) “КФУ им. В. И. Вернадского” (г. Ялта); профессор кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Иваницкий Александр Юрьевич

e-mail: phiz-matolek@mail.ru, кандидат физико-математических наук, профессор, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Кудряшова Наталья Валерьевна

e-mail: natakudry94@mail.ru, магистр 1 курса факультета прикладной математики, физики и информационных технологий, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 12.01.2017

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки, аналитическое приближенное решение.

УДК: 517.95:515.172.22

Результаты исследования и их обсуждение. В данной работе представлено развитие идеи метода мажорант не к правой части дифференциального уравнения [8], [9], а к решению самого дифференциального уравнения, предложенного в работах [1]–[7].

Такой подход в доказательстве теоремы существования позволяет решить все задачи, связанные с аналитическим приближенным методом решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_1(x)y^3 + a_2(x)y^2 + a_3(x)y + a_4(x), \quad (1)$$

которое с помощью замены переменной

$$y = u(x)w(x) + v(x) \quad (2)$$

приводится к нормальной форме

$$y''' = y^3 + r(x) \quad (3)$$

при условиях

$$\begin{cases} u(x) = C; \\ v(x) = -\frac{C^2 a_2(x)}{3}; \\ a_1(x) = \frac{1}{C^2}; \\ a_3(x) = \frac{C^2}{3} a_2^2(x); \\ r(x) = -\frac{C^4 a_2(x)}{27} - \frac{C^2}{3} a_2'''(x) + a_4(x). \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^3 + r(x) \quad (5)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ y''(x_0) = y_2. \end{cases} \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть x^* – подвижная особая точка решения задачи Коши (5)–(6),

$$r(x) \in C^\infty$$

в области

$$|x - x^*| < \rho_1, \quad (7)$$

где $0 < \rho_1 = \text{const}$; $\exists M_1 : \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \leq M_1$, где $n=0,1,2,\dots$, $M_1 = \text{const}$, тогда существует единственное решение задачи Коши (5)–(6), представимое в виде

$$y(x) = (x - x^*)^{-3/2} \sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^n \quad (8)$$

в области $|x - x^*| < \rho_2$, где $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}} \right\}$, $M = \sup_n \left\{ \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \right\}$, $n=0,1,2,\dots$

Доказательство. Учитывая структуру решения уравнения (5) в окрестности подвижной особой точки в общем случае

$$y(x) = (x - x^*)^\rho \sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^n, \quad C_0 \neq 0$$

и представляя функцию $r(x)$ в виде ряда

$$r(x) = \sum_0^{\infty} A_n (x - x^*)^n,$$

из уравнения (5) получаем

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} C_n (x - x^*)^{n+\rho-3} (n+\rho)(n+\rho-1)(n+\rho-2) &= \\ &= (x - x^*)^{3\rho} \sum_0^{\infty} C_n^{**} (x - x^*)^n + \sum_0^{\infty} A_n (x - x^*)^n, \end{aligned}$$

где $C_n^{**} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^*$, $C_n^* = \sum_0^n C_i C_{n-i}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Из последнего соотношения следует необходимость выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} n + \rho - 3 &= n + 3\rho, \\ (2n-3)(2n-5)(2n-7)C_n &= 8(C_n^{**} + A_{n-5}). \end{aligned}$$

Первое условие позволяет определить $\rho = -\frac{3}{2}$, а также характер подвижной особой точки, а второе представляет рекуррентное соотношение, позволяющее однозначно определить все коэффициенты C_n :

$$\begin{aligned} C_0 &= -\frac{105}{8}, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = \frac{8A_0}{315} \\ C_6 &= \frac{8A_1}{525}, \quad C_7 = \frac{8A_2}{903}, \quad C_8 = \frac{8A_3}{1497}, \quad C_9 = \frac{8A_4}{2355}, \quad \dots \end{aligned}$$

В силу однозначности определения коэффициентов C_n следует единственность полученного формального решения.

Методом математической индукции докажем справедливость следующих оценок:

$$|C_{5n}| \leq \frac{8}{(10n-3)(10n-5)(10n-7)+210} (M+1)^n = V_{5n},$$

$$|C_{5n+1}| \leq \frac{8}{(10n-1)(10n-3)(10n-5)+210} (M+1)^n = V_{5n+1},$$

$$\begin{aligned} |C_{5n+2}| &\leq \frac{8}{(10n+1)(10n-1)(10n-3)+210}(M+1)^n = V_{5n+2}, \\ |C_{5n+3}| &\leq \frac{8}{(10n+3)(10n+1)(10n-1)+210}(M+1)^n = V_{5n+3}, \\ |C_{5n+4}| &\leq \frac{8}{(10n+5)(10n+3)(10n+1)+210}(M+1)^n = V_{5n+4}, \end{aligned}$$

где

$$M = \sup_n \left\{ \frac{|r^n(x^*)|}{n!} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Ограничимся случаем оценки коэффициентов

$$C_{5n}$$

$$|C_{5n+5}| \leq \frac{8}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210}(M+1)^{n+1}. \quad (9)$$

Из рекуррентного соотношения, полученного выше, следует

$$(10n+7)(10n+5)(10n+3)C_{5n+5} = C_{5n+5}^{**} + A_{5n}. \quad (10)$$

Или

$$(10n+7)(10n+5)(10n+3)C_{5n+5} = \sum_1^{5n+5} C_i \sum_1^{5n+5-i} C_i C_{5n+5-i-j} + A_{5n}. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} |C_{5n+5}| &\leq \frac{8}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210} \left(\sum_1^n \frac{(M+1)^i}{(5i-3)(5i-5)(5i-7)+210} \times \right. \\ &\quad \times \sum_1^{n-i} \frac{64(M+1)^j}{((5(n-i-j)-3)(5(n-i-j)-5)(5(n-i-j)-7)+210)} \times \\ &\quad \times \frac{(M+1)^{n-i-j}}{(5(n-i-j)+7)(5(n-i-j)+5)(5(n-i-j)+3)+210} + M \leq \\ &\leq \frac{8}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210} (M+1)^n \cdot \sum_1^n \frac{8}{(5i-3)(5i-5)(5i-7)+210} \times \\ &\quad \times \sum_1^{n-i} \frac{8}{(5(n-i-j)-3)(5(n-i-j)-5)(5(n-i-j)-7)+210} \times \\ &\quad \times \frac{8}{(5(n-i-j)+7)(5(n-i-j)+5)(5(n-i-j)+3)+210} + M) \leq \\ &\leq \frac{8(M+1)^{n+1}}{(10n+7)(10n+5)(10n+3)+210}. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичным образом подтверждаются остальные оценки.

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} V_n(x - x^*)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k}(x - x^*)^{5k} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k+1}(x - x^*)^{5k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k+2}(x - x^*)^{5k+2} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k+3}(x - x^*)^{5k+3} + \sum_{k=1}^{\infty} V_{5k+4}(x - x^*)^{5k+4}, \end{aligned}$$

который является мажорирующим для ряда (5) в силу указанных и доказанных выше гипотез.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} V_n(x - x^*)^n &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k-3)(10k-5)(10k-7)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k-1)(10k-3)(10k-5)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k+1} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k+1)(10k-1)(10k-3)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k+2} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k+3)(10k+1)(10k-1)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k+3} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{(10k+5)(10k+3)(10k+1)+210} (M+1)^k (x-x^*)^{5k+4}. \end{aligned}$$

Для первого ряда, находящегося в правой части последнего равенства, на основании признака Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(M+1)^{n+1} (x-x^*)^{5n+5} ((10n-1)(10n-3)(10n-5)+210)}{((10n-3)(10n-5)(10n-7)+210)(M+1)^n (x-x^*)^{5n}} \right| = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |(M+1)(x-x^*)^5| \leq 1, \end{aligned}$$

устанавливаем область сходимости

$$|x - x^*| \leq \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}}. \quad (13)$$

Аналогично получаем область (13) и для остальных рядов.

Следовательно, ряд (5) сходится в области (13).

Положим $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}} \right\}$, получаем сходимость правильной части ряда (5) в области $|x - x^*| < \rho_2$, что и завершает доказательство теоремы.

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение

$$y_N(x) = (x - x^*)^{-3/2} \sum_0^N C_n (x - x^*)^n. \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть выполняются пункты 2 и 3 теоремы 1 и x^* является подвижной особой точкой решения задачи (5)–(6), тогда для аналитического приближенного решения (13) в окрестности подвижной особой точки x^* задачи (5)–(6) в области

$$|x - x^*| < \rho_2$$

справедлива оценка погрешности

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| \leq \Delta, \quad (15)$$

тогда

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{8(M+1)^{\frac{N+1}{5}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|x - x^*|^5} \\ & \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \frac{|x - x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \right. \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x - x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \\ & \left. + \frac{|x - x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

в случае $N+1 = 5n$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{8(M+1)^{\frac{N}{5}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|x - x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \right. \\ & + \frac{|x - x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x - x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \\ & \left. + \frac{|x - x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

в случае $N+1 = 5n+1$,

$$\begin{aligned} \Delta \leq & \frac{8(M+1)^{\frac{N-1}{5}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M+1)|x - x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \right. \\ & + \frac{|x - x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \\ & + \frac{|x - x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x - x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \\ & \left. + \frac{|x - x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

в случае $N+1 = 5n+2$,

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{8(M+1)^{\frac{N-2}{5}} \cdot |x-x^*|^{N+1}}{1-(M+1)|x-x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \right. \\ &\quad \left. \frac{|x-x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x-x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x-x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \right) \quad (19) \\ &\quad + \frac{|x-x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \end{aligned}$$

в случае $N+1 = 5n+3$,

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{8(M+1)^{\frac{N-3}{5}} \cdot |x-x^*|^{N+1}}{1-(M+1)|x-x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x-x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x-x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x-x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|x-x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \right) \quad (20) \end{aligned}$$

в случае $N+1 = 5n+4$, при этом $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}} \right\}$, $0 < \rho_1 = \text{const}$, $M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $N+1 = 5n$. Имеем

$$\begin{aligned} |y(x) - y_N(x)| &= \left| \sum_0^\infty C_n (x-x_0)^n - \sum_0^N C_n (x-x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=N+1}^\infty C_n (x-x^*)^n \right| = \\ &= |C_{N+1}(x-x^*)^{N+1} + C_{N+2}(x-x^*)^{N+2} + \dots + C_{N+k}(x-x^*)^{N+k} + \dots| = \\ &= |C_{5n}(x-x^*)^{5n} + C_{5n+1}(x-x^*)^{5n+1} + C_{5n+2}(x-x^*)^{5n+2} + \dots \\ &\quad + C_{5n+k-1}(x-x^*)^{5n+k-1} + \dots| \leq \\ &\leq |C_{5n}| \cdot |x-x^*|^{5n} + |C_{5n+1}| \cdot |x-x^*|^{5n+1} + |C_{5n+2}| \cdot |x-x^*|^{5n+2} + \dots \\ &\quad + |C_{5n+k-1}| \cdot |x-x^*|^{5n+k-1} + \dots \leq \\ &\leq \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n}}{(10n-3)(10n-5)(10n-7)+210} + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+1}}{(10n-1)(10n-3)(10n-5)+210} + \\ &\quad + \frac{8(M+1)^n \cdot |x-x^*|^{5n+2}}{(10n+1)(10n-1)(10n-3)+210} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{5n+3}}{(10n+3)(10n+1)(10n-1) + 210} + \frac{8(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{5n+4}}{(10n+5)(10n+3)(10n+1) + 210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{5n+5}}{(10n+7)(10n+5)(10n+3) + 210} + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{5n+6}}{(10n+9)(10n+7)(10n+5) + 210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{5n+7}}{(10n+11)(10n+9)(10n+7) + 210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{5n+8}}{(10n+13)(10n+11)(10n+9) + 210} + \frac{8(M+1)^{n+1} \cdot |x - x^*|^{5n+9}}{(10n+15)(10n+13)(10n+11) + 210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x - x^*|^{5n+10}}{(10n+17)(10n+15)(10n+13) + 210} + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x - x^*|^{5n+11}}{(10n+19)(10n+17)(10n+15) + 210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x - x^*|^{5n+12}}{(10n+21)(10n+19)(10n+17) + 210} + \\
& + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x - x^*|^{5n+13}}{(10n+23)(10n+21)(10n+19) + 210} + \frac{8(M+1)^{n+2} \cdot |x - x^*|^{5n+14}}{(10n+25)(10n+23)(10n+21) + 210} + \dots \leq \\
& \leq \frac{8(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{5n}}{(10n-3)(10n-5)(10n-7) + 210} \\
& \left(1 + (M+1) |x - x^*|^5 + (M+1)^2 |x - x^*|^{10} + (M+1)^3 |x - x^*|^{15} + \dots \right) + \\
& + \frac{8(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{5n+1}}{(10n-1)(10n-3)(10n-5) + 210} \\
& \left(1 + (M+1) |x - x^*|^5 + (M+1)^2 |x - x^*|^{10} + (M+1)^3 |x - x^*|^{15} + \dots \right) + \\
& + \frac{8(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{5n+2}}{(10n+1)(10n-1)(10n-3) + 210} \\
& \left(1 + (M+1) |x - x^*|^5 + (M+1)^2 |x - x^*|^{10} + (M+1)^3 |x - x^*|^{15} + \dots \right) + \\
& + \frac{8(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{5n+3}}{(10n+3)(10n+1)(10n-1) + 210} \\
& \left(1 + (M+1) |x - x^*|^5 + (M+1)^2 |x - x^*|^{10} + (M+1)^3 |x - x^*|^{15} + \dots \right) + \\
& + \frac{8(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{5n+4}}{(10n+5)(10n+3)(10n+1) + 210} \\
& \left(1 + (M+1) |x - x^*|^5 + (M+1)^2 |x - x^*|^{10} + (M+1)^3 |x - x^*|^{15} + \dots \right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8(M+1)^n \cdot |x - x^*|^{5n}}{1 - (M+1) |x - x^*|^5} \\
&\left(\frac{1}{(10n-3)(10n-5)(10n-7)+210} + \frac{|x - x^*|}{(10n-1)(10n-3)(10n-5)+210} + \right. \\
&+ \frac{|x - x^*|^2}{(10n+1)(10n-1)(10n-3)+210} + \frac{|x - x^*|^3}{(10n+3)(10n+1)(10n-1)+210} + \\
&\quad \left. + \frac{|x - x^*|^4}{(10n+5)(10n+3)(10n+1)+210} \right) = \\
&= \frac{8(M+1)^{\frac{N+1}{5}} \cdot |x - x^*|^{N+1}}{1 - (M+1) |x - x^*|^5} \left(\frac{1}{(2N-1)(2N-3)(2N-5)+210} + \right. \\
&\quad + \frac{|x - x^*|}{(2N+1)(2N-1)(2N-3)+210} + \\
&+ \frac{|x - x^*|^2}{(2N+3)(2N+1)(2N-1)+210} + \frac{|x - x^*|^3}{(2N+5)(2N+3)(2N+1)+210} + \\
&\quad \left. + \frac{|x - x^*|^4}{(2N+7)(2N+5)(2N+3)+210} \right).
\end{aligned}$$

В итоге получаем оценку погрешности (15).

Для остальных вариантов $N+1 = 5n+1$, $N+1 = 5n+2$, $N+1 = 5n+3$, $N+1 = 5n+4$, получаем оценки погрешности (16)–(20) соответственно, при этом $\rho_2 = \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{\sqrt[5]{M+1}} \right\}$, $0 < \rho_1 = \text{const}$, $M = \max \left\{ |y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!} \right\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Выход. Доказанная теорема 1 позволяет получить оценки для коэффициентов разложения решения в ряд, а теорема 2 позволяет в дальнейшем построить аналитическое приближенное решение в окрестности подвижной особой точки и получить априорную оценку погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 10. С. 1829–1832.
- [2] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А., Самодуров А. А. Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для второго уравнения Пенлеве // Вестник БГУ. Серия 1: Физика, математика, информатика. Минск, 2002. С. 79–85.
- [3] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве // Известия Тул. ГУ. Серия: Дифф. уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: Изд-во Тул. ГУ, 2006. С. 26–29.
- [4] Орлов В. Н. О приближенном решении первого уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.
- [5] Орлов В. Н. Исследование приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4(35). С. 23–32.

- [6] Редкозубов С. А., Орлов В. Н. Точные критерии существования подвижной особой точки дифференциального уравнения Абеля // Известия Института инженерной физики. 2009. № 4(14). С. 12–14.
- [7] Орлов В. Н. Точные граници для приближенного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности приближенного значения подвижной особой точки в комплексной области // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 399–405.
- [8] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 436 с.
- [9] Матвеев Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Специальная литература, 1996. 372 с.

V. N. Orlov^{1,2}, A. Yu. Ivanitsky³, N. V. Kudryashova³

THE EXISTENCE THEOREM FOR SOLVING A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH POLYNOMIAL RIGHT-HAND SIDE OF THE THIRD DEGREE IN THE VICINITY OF THE MOBILE SINGULAR POINT

¹*Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Yalta, Russia*

²*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

³*Chuvash State University I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia*

Abstract. The main task of the theory of differential equations is the existence and uniqueness of solutions. The peculiarity of nonlinear differential equations related to the presence of moving singular points, which relate to the class of such equations in the general case is not solvable in quadratures. It should be noted that the non-linear differential equations with moving singular points is not an analogue of the classical theorems of existence - Cauchy's theorem, Picard theorem. In particular, the proof of Cauchy's theorem is based on the method of majorant which is applied to the right side of the equation. This approach limits the ability to use the proof of this theorem to construct an analytical approximate solutions. In this paper we prove the existence and uniqueness of the solution of this class of nonlinear differential equations in the neighborhood of a singular point of the mobile used to the desired solution. This approach allows you to take advantage of the existence theorem for the construction of analytical approximate solutions.

Keywords: non-linear differential equation, Cauchy problem, majorants method, a mobile neighborhood of a singular point, the approximate analytic solution.

Orlov Viktor Nikolaevich, Dr. Sci. Phys. & Math., Theory and Methods of Teaching Mathematics, Humanitarian and Pedagogical Academy (branch) of V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Yalta, Russia; Professor at the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry of I. Y. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

Ivanitskii Alexander Y., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Chuvash State University I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

Kudryashov Natalia V., Master 1st year, Chuvash State University I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia.

REFERENCES

- [1] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Issledovanie priblizhennogo reshenija vtorogo uravnenija Penleve // Differenc. uravnenija. 1989. T. 25, № 10. S. 1829–1832. (in Russian).
- [2] Orlov V. N., Lukashevich N. A., Samodurov A. A. Postroenie priblizhennogo reshenija v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki dlja vtorogo uravnenija Penleve // Vestnik BGU. Ser. 1 Fizika, matematika, informatika. Minsk, 2002. S. 79–85. (in Russian).
- [3] Orlov V. N. Kriterii sushhestvovanija podvizhnyh osobyh tochek reshenij vtorogo uravnenija Penleve // Izvestija Tul. GU. Ser. Diff. uravnenija i prikladnye zadachi. Vyp. 1. Tula: Izd-vo Tul. GU, 2006. S. 26–29. (in Russian).
- [4] Orlov V. N. O priblizhennom reshenii pervogo uravnenija Penleve // Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva. 2008. № 2. S. 42–46. (in Russian).
- [5] Orlov V. N. Issledovanie priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki // Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Ser. Estestvennye nauki. 2009. № 4(35). S. 23–32. (in Russian).
- [6] Redkozubov S. A., Orlov V. N. Tochnye kriterii sushhestvovanija podvizhnoj osoboj tochki differencial'nogo uravnenija Abelja // Izvestija instituta inzhenernoj fiziki. 2009. № 4(14). S. 12–14. (in Russian).
- [7] Orlov V. N. Tochnye granicy dlja priblizhennogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti priblizhennogo znachenija podvizhnoj osoboj tochki v kompleksnoj oblasti // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2010. № 2(8). S. 399–405. (in Russian).
- [8] Golubev V. V. Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij. M.: Gostehizdat, 1950. 436 s. (in Russian).
- [9] Matveev N. M. Obyknovennye differencial'nye uravnenija. Sankt-Peterburg: Special'naja literatura, 1996. 372 s. (in Russian).