

A. K. Курбанмагомедов

ТРЕЩИНА НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА В УПРУГОМ СЛОЕ

Московский политехнический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе, опираясь на представление смещения и напряжения Папковича – Нейбера через 3 гармонические функции получены дуальные интегральные уравнения, решение которых сведено к отысканию одной гельдеровой функции. Для нахождения этой функции получено сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши 1-го рода. Решение этого интегрального уравнения, предложенным методом В. Д. Кулиева, сведено к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром. Определен основной параметр механики линейного разрушения коэффициента интенсивности напряжений и проведен численный анализ. Когда трещина нормального разрыва находится в бесконечной упругой среде показано, что оба компонента вектора смещения отличны от нуля. Этот результат говорит о том, что трещина представляет собой сплюснутый эллипс.

Ключевые слова: формула Папковича-Нейбера, гармонические функции, упругая среда, коэффициент интенсивности напряжений.

УДК: 593.3

§1. Постановка краевой задачи

Предполагается, что в однородной изотропной упругой полосе $|x| < \infty, -h \leq y \leq h$, имеется трещина нормального разрыва $y = 0, |x| \leq \ell$, где 2ℓ – длина трещины (рис. 1). На берегах трещины приложено некоторое нормальное напряжение $\sigma_y(0, x)$ (касательное напряжение $\tau_{xy}(x, 0) = 0$). Поверхности полосы $y = \pm h (|x| < \infty)$ свободны от внешних нагрузок. На бесконечности ($|y| < h, x \rightarrow \pm\infty$) напряжения и смещения равны нулю.

Таким образом, приходим к следующей смешанной краевой задаче. Границные условия

$$|x| < \infty, \quad \sigma_y(x, \pm h) = 0, \quad \tau_{xy}(x, \pm h) = 0; \quad (1.1)$$

$$|x| < \infty, \quad \tau_{xy}(x, \pm 0) = 0; \quad (1.2)$$

$$|x| < l, \quad \sigma_y(x, \pm 0) = -\sigma(x); \quad (1.3)$$

© Курбанмагомедов А. К., 2017
Курбанмагомедов Арслан Курбанмагомедович
e-mail: deforol@gmail.com, Московский политехнический университет, г. Москва, Россия.

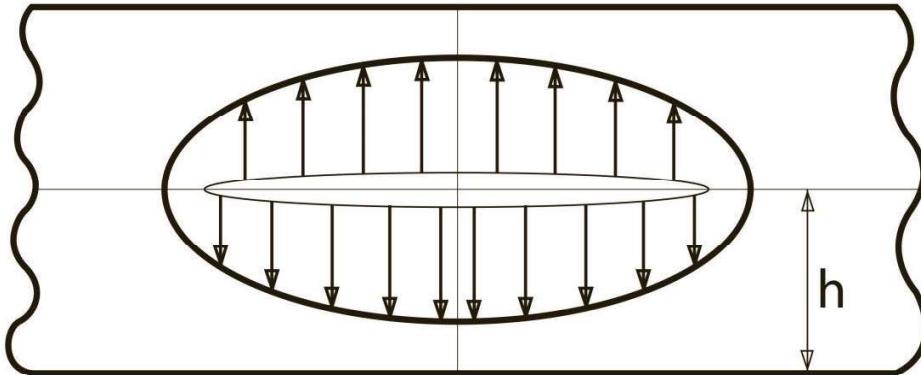


Рис. 1. К постановке краевой задачи

$$|x| > \ell, \quad |x| > l, \quad v(x, 0) = 0. \quad (1.4)$$

Условия на конце трещины [2]:

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \left[\sqrt{2\pi(l-x)} \frac{\partial v(x, +0)}{\partial x} \right] = -\frac{(1-\nu)}{\mu} K_I, \quad (1.5)$$

или

$$\lim_{x \rightarrow l-0} \left[\sqrt{2\pi(|x-l|)} \sigma_y(x, +0) \right] = K_I \quad (1.6)$$

Условия на бесконечности:

$$|y| < h, \quad |x| \rightarrow \infty \quad \{\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy}\} \rightarrow 0, \quad (1.7)$$

$$(u, v) \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Поскольку одна из трех гармонических функций является произвольно, то положим $\Phi_1(x, y) \equiv 0$. Кроме того, предположим, что гармонические функции $\Phi_0(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ также стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ и $|y| < h$. Здесь K_I – коэффициент интенсивности напряжений для трещин нормального разрыва, подлежащий определению, $\sigma(x) \in C[-\ell, \ell]$ – заданная четная функция, причем в дальнейшем будем считать, что $\sigma(x) \in H^\beta[-\ell, \ell]$, $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, где $\sigma(x) \in H^\beta[-\ell, \ell]$ – гельдеровский класс функций с показателем β .

§2. Решение краевой задачи (1.1)–(1.8)

Рассматриваемая задача, очевидно, симметрична относительно плоскостей $x=0$ и $y=0$. Поэтому построим решение краевой задачи (1.1)–(1.8) в области $x \geq 0$, $0 \leq y \leq h$.

Гармонические функции $\Phi_0(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ представим в виде

$$\Phi_0(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [A_0(\lambda) ch\lambda y + B_0(\lambda) sh\lambda y] \cos\lambda x d\lambda, \quad (2.1)$$

$$\Phi_2(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [A_2(\lambda) ch\lambda y + B_2(\lambda) sh\lambda y] \cos\lambda x d\lambda. \quad (2.2)$$

Здесь $A_j(\lambda)$ и $B_j(\lambda)$ ($j = 0, 2$) – неизвестные функции. Учитывая (2.1), (2.2) в уравнении зависимости компонент тензора напряжений в силу условий (1.1) и (1.2) имеем

$$B_2(\lambda) = \lambda A_0(\lambda) \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda h}{(1 - 2\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2}, \quad (2.3)$$

$$A_2(\lambda) = -\lambda A_0(\lambda) \frac{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h}{(1 - 2\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2}, \quad (2.4)$$

$$\lambda B_0(\lambda) = -\lambda A_0(\lambda) \frac{(1 - 2\nu) [\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h]}{(1 - 2\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2}. \quad (2.5)$$

С помощью (2.15)–(3.3.19) и (3.3.3) получим

$$2\mu v(x, 0) = -2(1 - \nu) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \lambda A_0(\lambda) \frac{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h}{(1 - 2\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2} \cdot \cos \lambda x d\lambda. \quad (2.6)$$

Искомую функцию $\lambda A_0(\lambda)$ представим в виде

$$\lambda A_0(\lambda) = -\frac{(1 - 2\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda h + \lambda^2 h^2}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda^2 h^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\ell f(t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt. \quad (2.7)$$

Здесь $f(t)$ – новая неизвестная функция.

Если функции $f(x)$ и $\psi(x)$ связаны между собой формулами

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt, \quad f(t) = \frac{f_0(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}}; \\ f(x) &= -\frac{d}{dx} \int_x^l \frac{t \cdot \psi(t)}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt, \end{aligned}$$

то в силу метода, предложенного в работе В.Д. Кулиева [1], сингулярные интегральные уравнения первого рода с ядром Коши сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и наоборот. Поэтому предположим, что $f(x) \in K_{1/2}[-l, l]$, т. е.

$$f(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{l^2 - x^2}}, \quad f_0(-x) = -f_0(x), \quad f_0(x) \in H^\beta[0, l], \quad 1/2 < \beta \leq 1. \quad (2.8)$$

Действительно, из (2.6) и (2.7) найдем

$$\frac{\mu}{(1 - \nu)} v(x, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\ell f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt. \quad (2.9)$$

Здесь внутренний интеграл есть множитель (интеграл) Дирихле [2]:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} \pi/2, & \text{если } t > x, \\ \pi/4, & \text{если } t = x, \\ 0, & \text{если } t < x. \end{cases} \quad (2.10)$$

Из (2.10) и (2.9) следует, что условие (1.4) удовлетворяется автоматически.

Пусть теперь $0 < x < l$. Тогда из (2.9) в силу (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{(1-\nu)} v(x, 0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \frac{2}{\pi} \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \int_{x+\varepsilon}^l \int_0^{x-\varepsilon} f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \cos \lambda x d\lambda dt \right\} = \int_x^\ell f(t) dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial x} = -\frac{1-\nu}{\mu} f(x). \quad (2.11)$$

Учтя (2.11) и (1.5), в силу (2.9) получим

$$K_I = \sqrt{\pi \ell} \frac{f_0(\ell)}{\ell}. \quad (2.12)$$

Таким образом, решение рассматриваемой краевой задачи сводится к нахождению одной функции $f(x) \in K_{1/2}[0, l]$. При этом все условия краевой задачи выполнены, за исключением условия (2.3).

С помощью (2.3)–(2.5), (2.7), (2.1), (2.2) имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, +0) &= -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\ell f(t) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 x h - \lambda^2 h^2}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h} \cdot \frac{\sin \lambda t}{\lambda} \sin \lambda x d\lambda dt = \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \int_0^\ell f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\ell f(t) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda h - \lambda^2 h^2 - \operatorname{sh} x h \operatorname{ch} \lambda h - \lambda h}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h} \cdot \frac{\sin \lambda t \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda dt \right\}, \end{aligned}$$

откуда, заметив, что (см. [1], с. 59–62)

$$\frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\ell f(t) \int_0^\infty \frac{\sin \lambda t \sin \lambda x}{\lambda} d\lambda dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^\ell \frac{f(t)}{t-x},$$

в силу (1.3) приходим к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши первого рода

$$\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{f(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(t) K(x, t) dt, \quad (2.13)$$

$$K(x, t) = - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda h} \operatorname{sh} \lambda h + \lambda^2 h^2 + \lambda h}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h} \sin \lambda t \cos \lambda x d\lambda. \quad (2.14)$$

Сингулярное интегральное уравнение (2.13) с ядром (2.14) с помощью метода, разработанного в [1], сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром

$$\frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sigma(\tau)}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} d\tau = \Psi(x) - \int_0^l \Psi(t) K_\Phi(x, t) dt, \quad (2.15)$$

$$K_\Phi(x, t) = \int_0^\infty \frac{\lambda t [e^{-\lambda h} \operatorname{sh} \lambda h + \lambda^2 h^2 + \lambda h]}{\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \lambda h} J_0(\lambda t) J_0(\lambda x) d\lambda, \quad (2.16)$$

$$\Psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{f(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad (2.17)$$

$$\Psi(-x) = \Psi(x), \quad f(\tau) \in K_{1/2}[-\ell, \ell], \quad (0 \leq x \leq \ell).$$

Здесь $J_0(u)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Из (2.17) следует

$$\Psi(\ell) = \frac{f_0(\ell)}{\ell}. \quad (2.18)$$

Из (2.18) и (2.12) теперь получим

$$K_I = \sqrt{\pi \ell} \Psi(\ell). \quad (2.19)$$

Пусть $x = \ell \xi$, $t = \ell \eta$, $\lambda h = u$,

$$\frac{\Psi(\ell \xi)}{\sigma_0} = \Psi(\xi), \quad \frac{\Psi(\ell \eta)}{\sigma_0} = \Psi(\eta).$$

$$\sigma(\ell, v) = \sigma_0 \gamma_0(v), \quad \sigma_0 = \text{const} > 0,$$

причем $\gamma_0(v) \in C[0, 1]$, и $\gamma_0(v) \in H^\beta[0, 1]$. Тогда из (2.15) и (2.16) имеем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\xi \frac{\gamma_0(v)}{\sqrt{\xi^2 - v^2}} dv = \Psi(\xi) - \int_0^1 \Psi(t) K_0(\xi, t) dt, \quad (2.20)$$

$$K_0(\xi, t) = 2 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \int_0^\infty \frac{i e^{-2iu} [1 - e^{-2iu} + 2iu(u+1)]}{1 - e^{-4iu} + 2i e^{-2iu}} \times J_0 \left(\frac{\ell}{h} it \right) J_0 \left(\frac{\ell}{h} ui \xi \right) du,$$

$$(0 \leq \xi \leq 1). \quad (2.21)$$

При этом коэффициент интенсивности напряжений K_I определяется формулой

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell} \Psi \left(1, \frac{\ell}{h} \right). \quad (2.22)$$

Здесь $\Psi \left(1, \frac{\ell}{h} \right) = \Psi(\xi, \ell/h) |_{\xi=1}$.

Пусть $\gamma_0(v) = 1$. Тогда из (2.20), (2.21) и (2.22) имеем

$$\Psi(\xi) - \int_0^1 \Psi(t) K_0(\xi, t) dt = 1, \quad (2.23)$$

$$K_0(\xi, t) = 2 \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \int_0^\infty \frac{i e^{-2i} [1 - e^{-2i} + 2i(i+1)]}{1 - e^{-4i} + 2ie^{-2i}} \times J_0 \left(\frac{\ell}{h} it \right) J_0 \left(\frac{\ell}{h} i \xi \right) di \\ (0 \leq \xi \leq 1). \quad (2.24)$$

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell} \Psi \left(1, \frac{\ell}{h} \right). \quad (2.25)$$

Численный анализ интегрального уравнения Фредгольма второго рода (2.23) с непрерывным ядром (2.24) показывает (см. рис. 2): если $\frac{l}{h} \ll 1$, то $\psi(1; \frac{l}{h}) \approx 1$; с увеличением $\frac{l}{h}$ поправочная функция $\psi(1; \frac{l}{h})$ также увеличивается. Отсюда следует, что существует устойчивый рост трещины при циклическом нагружении до некоторых значений $\frac{l}{h}$, где $\frac{l}{h}$ определяется как минимальный корень уравнения $K_{I \max}(\sigma_{\max}, \frac{l}{h}) = K_{*f}$. При этом число циклов до разрушения определяется по формулам [3]

и

если известны кинетическая диаграмма усталостного разрушения для конкретного материала, в том числе, если известна трещиностойкость материала при циклическом нагружении.

§3. Анализ решений и коэффициента интенсивности напряжений K_I

Известно, что [2]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \tau^2}}{\tau - x} d\tau = \begin{cases} -x - \sqrt{x^2 - \ell^2}, & x < -\ell, \\ -x, & |x| < \ell, \\ -x + \sqrt{x^2 - \ell^2}, & x > \ell. \end{cases} \quad (3.1)$$

Доказательство (3.1) приведено в [2]. Кроме того, известно обращение особого интеграла с ядром Коши [1], [2]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{f(t)}{t - x} dt = \sigma(x), \quad |x| < l \quad (3.2)$$

Поскольку $f(t) \in K_{1/2}[-\ell, \ell]$ (см. (2.8)), то:

1. Непрерывная на отрезке $[-\ell, \ell]$ функция $\sigma(x)$ принадлежит классу функций Гельдера с показателем β ($1/2 < \beta \leq 1$) (см. [1]).

2. Формула обращения особого интеграла (3.2) в силу [1], [2] имеет вид

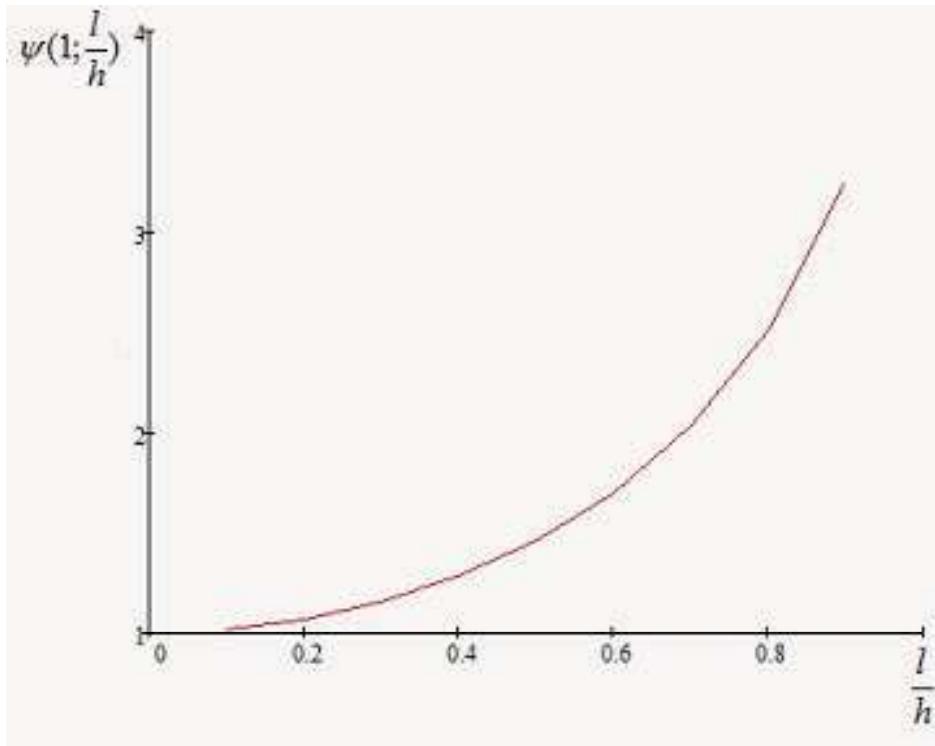


Рис. 2. Зависимость безразмерного коэффициента интенсивности напряжений (поправочной функции) от безразмерной длины трещины

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \sigma(\tau) \frac{\sqrt{\ell^2 - \tau^2}}{\tau - x} d\tau, \quad |x| < \ell. \quad (3.3)$$

В рассматриваемой задаче предположим, что

$$1^\circ \quad \sigma(x) = \sigma_0 \equiv \text{const} > 0 \quad (\gamma_0(v) \equiv 1); \quad 2^\circ \quad h \rightarrow +\infty.$$

Тогда из (2.13), (2.14), (3.3) и (2.15), (2.16) следует

$$f(x) = -\frac{\sigma_0}{\pi \sqrt{\ell^2 - x^2}} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - \tau^2}}{\tau - x} d\tau, \quad |x| < \ell, \quad (3.4)$$

$$\Psi(x) = \sigma_0. \quad (3.5)$$

Из (3.4) с учетом (3.1) найдем

$$f(x) = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} (0 < x < \ell). \quad (3.6)$$

Из (3.5) в силу [1] получим

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{d}{dx} \int_x^\ell \frac{\tau \psi(\tau)}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau = -\sigma_0 \frac{d}{dx} \int_x^\ell \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} d\tau = \\
&= -\sigma_0 \frac{d}{dx} \sqrt{\ell^2 - x^2} = \frac{\sigma_0 x}{\sqrt{\ell^2 - x^2}} \quad (0 < x < l).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) видно, что значение функции $f(x)$, полученное двумя способами, совпадает.

Из (2.12) с учетом (3.6), (2.8) или из (2.13) с учетом (3.5) имеем

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi \ell}. \tag{3.8}$$

С помощью (2.1)–(2.5), (2.7) и (3.6) получим

$$\frac{2\mu \cdot u(x, +0)}{(1 - 2\nu) \sigma_0} = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{\ell^2 - t^2}}{t - x} dt. \tag{3.9}$$

Отсюда в силу (3.1) имеем

$$u(x, +0) = \begin{cases} |x| < \ell, \\ -\frac{1-2\nu}{2\mu} \sigma_0 x, \\ \frac{1-2\nu}{2\mu} \sigma_0 \left[\sqrt{x^2 - \ell^2} - x \right], \quad x > \ell, \\ \frac{1-2\nu}{2\mu} \sigma_0 \left[-\sqrt{x^2 - \ell^2} - x \right], \\ x < -\ell, \end{cases} \tag{3.10}$$

В силу формул (3.6), (2.9) и (2.10) получим

$$v(x, +0) = \begin{cases} 0, |x| > \ell, \\ \frac{1-\nu}{\mu} \sigma_0 \sqrt{\ell^2 - x^2}, |x| < \ell. \end{cases} \tag{3.11}$$

Нетрудно показать, что

$$\sigma_y(x, +0) = \sigma_x(x, +0) = \begin{cases} -\sigma_0, \quad |x| < \ell, \\ \sigma_0 \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} - 1 \right], \quad x > \ell, \\ \sigma_0 \left[-\frac{x}{\sqrt{x^2 - \ell^2}} - 1 \right], \quad x < -\ell. \end{cases} \tag{3.12}$$

Из (3.9) и (3.10) следует, что если на берегах трещины действует постоянные нормальные напряжения и толщина слоя бесконечна, то на берегах трещины оба компонента вектора смещения отличны от нуля. Этот же результат другим методом получен в [2].

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В.Д. Кулиеву за внимание и обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кулиев В. Д. Новые эффективные методы решения класса смешанных краевых задач.// Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 132–162.
- [2] Кулиев В. Д. Сингулярные краевые задачи. М.: Физматлит, 2005.
- [3] Кулиев В. Д., Курбанмагомедов А. К. К теории роста трещин при циклическом нагружении. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 4 (18). С. 52–67.

A. K. Kurbanmagomedov

CRACK OF THE NORMAL GAP IN THE ELASTIC LAYER

Moscow Polytechnical University, Moscow, Russia

Abstract. In the work, based on the view offset voltage Papkovich –Neiber 3 harmonic functions by which derived the dual integral equations whose solution is reduced to finding a single holder functions. To find this function, the singular integral equation with Cauchy kernel 1 of the first kind. The solution to this integral equation, In the proposed method V.D. Kuliev, reduced to the Fredholm integral equation of 2nd kind with continuous kernel. The main parameter of the linear mechanics of fracture stress intensity factor and numerical analysis. When the crack of the normal rupture is located in an infinite elastic medium it is shown that both components of the displacement vector different from zero. This result suggests that the crack represents an oblate ellipse.

Keywords: formula Papkovich-Neiber, harmonic functions, elastic medium, the stress intensity factor.

REFERENCES

- [1] Kuliev V. D. Novye jeffektivnye metody reshenija klassa smeshannyh kraevykh zadach.// Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 1 (23). S. 132–162. (in Russian).
- [2] Kuliev V. D. Singuljarnye kraevye zadachi. M.: Fizmatlit, 2005. (in Russian).
- [3] Kuliev V. D., Kurbanmagomedov A. K. K teorii rosta treshhin pri ciklicheskom nagruzhenii. Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2013. № 4 (18). S. 52–67. (in Russian).

Kurbanmagomedov Arslan Kurbanmagomedovich

e-mail: deforol@gmail.com, Moscow Polytechnical University, Moscow, Russia.