Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 114–119

Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов

О КРУЧЕНИИ КУСОЧНО-ИЗОТРОПНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено кручение кусочно-изотропного идеально-пластического призматического стержня с сечением в виде прямоугольника. Определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжений, построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, предел текучести.

УДК: 539.735

Кручение изотропных цилиндрических и призматических идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1], [2].

Кручение анизотропных и неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [1]–[5].

Рассмотрим призматический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xyz.

Ось z направлена параллельно образующим стержня. Сечение стержня плоскостью $z = const$ есть прямоугольник $ABCD$ со сторонами, равными $2a$ и $2b$.

Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных ломаной LMN, где L *(0; -b)*, M *(-c; 0)*, $N(0, b)$, α – угол между MN и осью x, $tg\ \alpha = b/c$ (рис. 1).

Миронов Борис Гурьевич
`e-mail:` mironov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия.
Миронов Юрий Борисович
`e-mail:` mistiam@gmail.com, кандидат технических наук, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-41-210272).

Поступила 15.02.2017

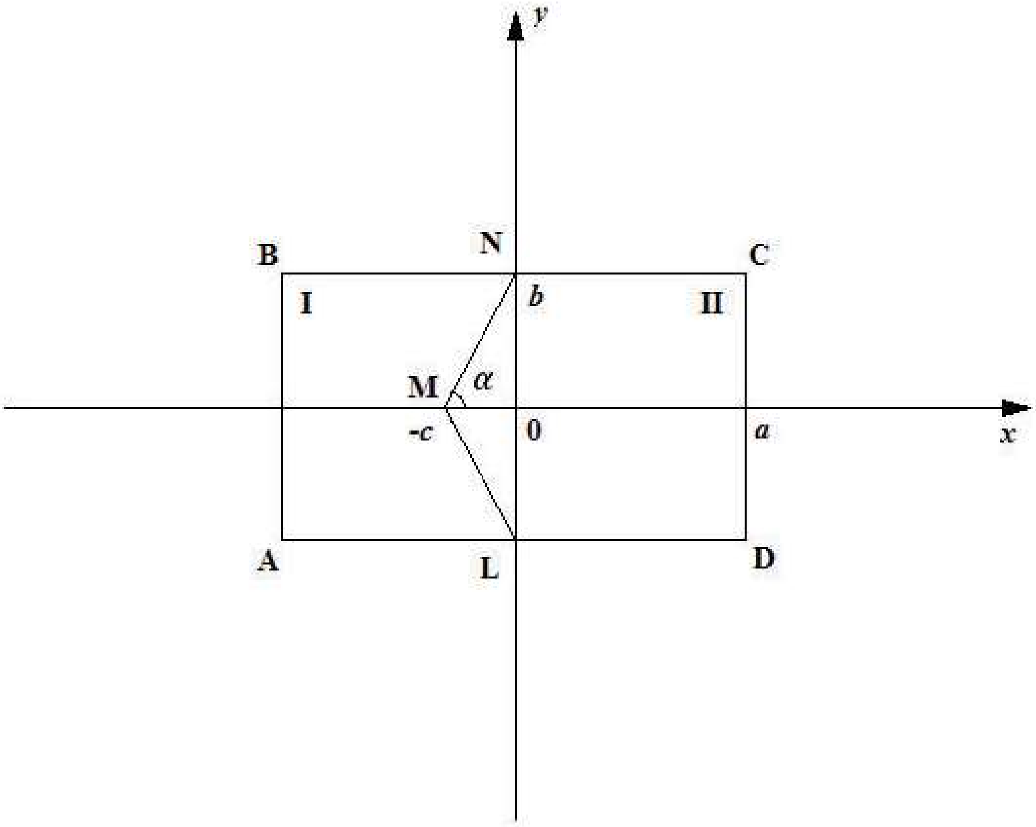

Рис. 1

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями:

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}\left(x, y\right), \tau_{yz} = \tau_{yz}\left(x, y\right), \end{gathered} \tag{1}$$

условиями пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2 \tag{2}$$

в первой области,

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2 \tag{3}$$

во второй области, уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

где $k_1 < k_2$.

Согласно [2] характеристики соотношения (4) есть прямые, ортогональные вектору касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \tau_{xz}\bar{i} + \tau_{yz}\bar{j}, \tag{5}$$

где $\bar{i}, \bar{j}$ – орты осей x и y соответственно, которое направлено по касательной к контуру поперечного сечения стержня и не меняется вдоль характеристики.

На линии неоднородности LMN неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через ломаную LMN вектор касательного напряжения τ, а соответственно, и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. А это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений ME, LE и EN, выходящим из точек L и N области II (рис. 2).

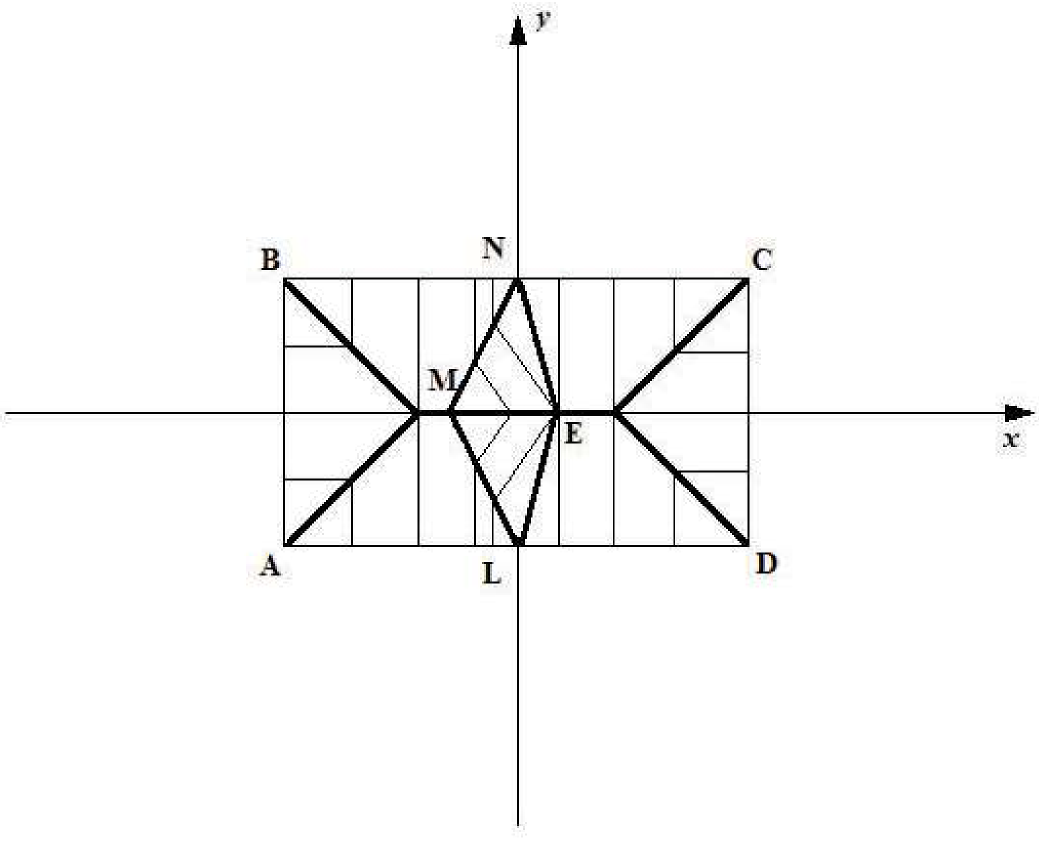

Рис. 2

Уравнения линий разрыва напряжений LE и EN имеют вид

$$LE : y = -b + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)}x, \tag{6}$$

$$EN : y = b - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{1 - \cos(\alpha - \beta)} x, \tag{7}$$

где $\sin\beta = \dfrac{k_1}{k_2}\sin\alpha, \quad \cos\beta = \dfrac{\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\alpha}}{k_2}$.

Характеристики соотношения (4) в треугольнике MNE задаются уравнением

$$y = (c + x_0)\, tg\alpha - (x - x_0)\, ctg\,(\alpha - \beta)\,, \tag{8}$$

а в треугольнике MLE определяются уравнением

$$y = -\,(c + x_0)\, tg\alpha + (x - x_0)\, ctg\,(\alpha - \beta)\,, \tag{9}$$

где $x_0 \in (-c; 0)$.

В случае когда $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, напряженное состояние стержня определить невозможно, без дополнительных условий на ломанной LMN.

Рассмотрим призматический стержень с прямоугольным сечением в случае, когда сечение содержит включение в виде ромба (рис. 3).

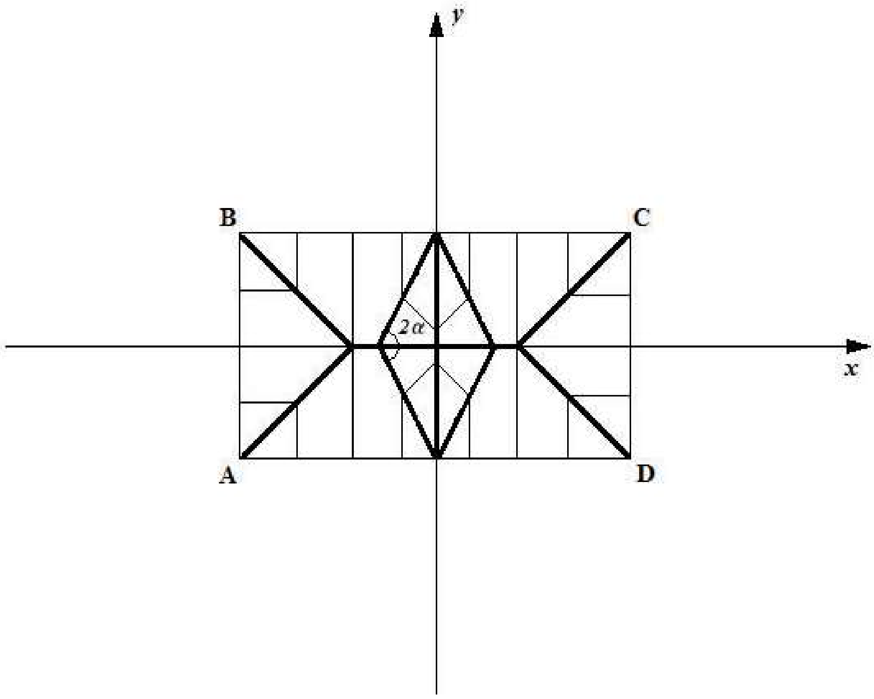

Рис. 3

Пусть условие пластичности в области, ограниченной ромбом, имеет вид (3), а вне ее – (2). В этом случае в области, ограниченной ромбом, появятся две дополнительные линии разрыва напряжений, которые совпадают с диагоналями ромба.

Характеристики соотношения (4) определяются уравнениями (8), (9) и

$$y = (c - x_0)\, tg\alpha + (x - x_0)\, ctg\,(\alpha - \beta) \tag{10}$$

$$y = -\,(c - x_0)\, tg\alpha - (x - x_0)\, ctg\,(\alpha - \beta)\,, \tag{11}$$

где $x_0 \in (0; c)$.

На рисунках 2 и 3 жирными линиями нарисованы линии разрыва напряжений, а тонкими линиями – характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.

[3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4. С. 108–112.

[4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении цилиндрических анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 9. С. 150–155.

[5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.

B. G. Mironov, Yu. B. Mironov

ABOUT TORSION OF A PATCH AND ISOTROPIC RECTANGULAR PRISMATIC CORE

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract. In work torsion of patch and isotropic is considered ideal and plastic prismatic core with section in a look rectangle. A stressed state of a core is defined, lines are found rupture of tension, the field of characteristics is built.

Keywords: torsion, tension, plasticity, limit flowabilities.

REFERENCES

[1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teorija plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[2] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. (in Russian).

[3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhih sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo

Mironov Boris Guryevich

`e-mail:` mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

Mironov Yury Borisovich

`e-mail:` mistiam@gmail.com, Candidate of Technical Sciences, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia.

universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2012. № 4. P. 108–112. (in Russian).

[4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. O kruchenii cilindricheskih anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2011. № 9. P. 150–155. (in Russian).

[5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. Teorija plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).