

Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТА, АРМИРОВАННОГО ОДНИМ СЕМЕЙСТВОМ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ВОЛОКОН

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
Россия г. Новосибирск*

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Аннотация. В рамках плоской задачи неоднородной анизотропной теории упругости на основе структурной модели рассмотрено армирование одним семейством прямолинейных и криволинейных волокон. Механические свойства семейства волокон удовлетворяют условиям нерастяжимости или равнонапряженности. Построены разрешающие системы уравнений поставленных задач, исследован их тип. Получены численно-аналитические решения частных задач для металлокомпозиата.

Ключевые слова: армирование, структурная модель, одно семейство криволинейных волокон

УДК: 539.3+539.4+539.5

Введение. В машиностроении, авиастроении, судостроении в последние десятилетия активно внедряются армированные металлокомпозитные плоские конструкции. До последнего времени армирование таких конструкций осуществлялось прямолинейными волокнами. Однако такая структура армирования может быть эффективной лишь в частных случаях нагружения, при которых внутренние силовые потоки преимущественно направлены вдоль траекторий армирования. Реальные конструктивные элементы работают в более сложных условиях нагружения, что требует поиска других типов армирования. В работах [1], [2], [3] и в данной работе исследуется более общий случай армирования по криволинейным траекториям.

© Немировский Ю. В., Федорова Н. А., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiruygu@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Федорова Наталья Александровна

e-mail: feodorova.natalia@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Поступила 10.04.2017

Постановка задачи. Пусть армирование выполнено одним семейством волокон постоянного поперечного сечения. Для описания композита использована структурная модель [4]. Введены следующие обозначения интенсивности армирования семейства волокон как функции $\omega_1(x, y)$: компонент тензора деформаций — $\varepsilon_{ij}(x, y)$, деформации в волокнах семейства — $\varepsilon_1(x, y)$, напряжение в волокнах семейства — $\sigma_1(x, y)$. Осредненные напряжения обозначены через $\sigma_{ij}(x, y)$, где x, y — декартовы координаты, $\varphi(x, y)$ — угол армирования, индексы $i, j = 1, 2$. В дальнейшем при обращении к перечисленным функциям для краткости аргументы опускаются. Плоская задача армированной среды с одним семейством армирующих волокон запишется в виде:

$$(\omega_1 l_{11})_{,1} + (\omega_1 l_{12})_{,2} = 0, \quad (1)$$

$$\varepsilon_{11} l_{11}^2 + \varepsilon_{22} l_{12}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{11} l_{12} = \varepsilon_1^0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \quad (3)$$

В (1)–(3) использованы обозначения: $\varepsilon_1^T = \alpha_1^q T$, $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T$, $l_{11} = \cos \varphi$, $l_{12} = \sin \varphi$, где α_1^q — коэффициент линейного расширения материала семейства волокон, $T = const$ (T — температура). Символы $_{,1,2}$ означают частное дифференцирование по координатам x, y соответственно. Соотношение (1) — условие постоянства сечений семейства волокон [5], соотношение (3) — условие совместности деформаций. При формулировке (2) согласно [4] использован закон термоупругого деформирования и принцип совместного деформирования матрицы и семейства волокон (нет проскальзывания и отрыва). Правая часть в (2) учитывает как случай равнодеформированного семейства волокон ($\varepsilon_1 = const$, $\varepsilon_1^0 = const + \varepsilon_1^T$), так и случай нерастяжимого семейства ($\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^T$). Осредненные напряжения $\sigma_{ij}(x, y)$ запишем в виде

$$\sigma_{ij} = (1 - \omega_1) \sigma_{ij}^c + \sigma_1 \omega_1 l_{1i} l_{1j}. \quad (4)$$

Соотношения (4) — это определение силы, действующей на слой композитов как суммы сил, создаваемых связующим материалом и суммы сил, создаваемых армирующими слоями. В (4) напряжения в связующем σ_{ij}^c определены по формулам [6]

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{(1 - \nu^2)} (\varepsilon_{ii} + \nu \varepsilon_{jj} - \alpha_c (1 + \nu) T), \quad \sigma_{ij}^c = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{ij}, \quad (5)$$

$$(j = 3 - i, i = 1, 2).$$

Здесь E, ν, α_c — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения связующего материала соответственно. Напряжения σ_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i2,2} = b_i, \quad (i = 1, 2). \quad (6)$$

Правые части в (6)

$$b_i = -((1 - \omega_1) \rho_c + \omega_1 \rho_1) F_i$$

являются компонентами массовой распределенной нагрузки по направлениям прямоугольной декартовой системы координат; ρ_c, ρ_1 — массовые плотности материалов связующего и волокон; F_i — компоненты удельной распределенной нагрузки, действующей на единицу массы.

К системе (1)–(6) присоединены граничные условия на контуре. Уравнение контура Γ задано в параметрическом виде: $x = \psi_1(s)$, $y = \psi_2(s)$, s — некоторый параметр.

Пусть на контуре Γ_p заданы статические условия с нормальными и касательными усилиями $p_n(s), p_\tau(s)$ соответственно:

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = p_n(s), (\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = p_\tau(s). \quad (7)$$

На другой части контура Γ_u заданы кинематические условия для перемещений u_1, u_2 :

$$u_1(\Gamma_u) = u_1^0(s), \quad u_2(\Gamma_u) = u_2^0(s). \quad (8)$$

В (7) $p_n(s), p_\tau(s)$ – известные функции, $n_1 = \cos \beta, n_2 = \sin \beta, \beta$ – угол, задающий направление внешней нормали к Γ_p . С учетом (4) граничные условия (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_1\sigma_1 \cos^2(\varphi - \beta) + (1 - \omega_1)[m_3(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) \cos^2 \beta + \\ + m_3(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T) \sin^2 \beta + m_4\varepsilon_{12} \sin \beta \cos \beta] = p_n(s), \\ \omega_1\sigma_1 \sin 2(\varphi - \beta) + (1 - \omega_1)m_3(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})) \sin 2\beta + \\ + 2(1 - \omega_1)m_4\varepsilon_{12} \cos 2\beta = 2p_\tau(s). \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) использованы обозначения для констант

$$m_1 = \frac{1}{1 - \nu^2}, m_2 = \frac{1}{1 + \nu}, m_3 = Em_1, m_4 = Em_2, L^T = \alpha_c(1 + \nu)T.$$

Интенсивность ω_1 задается на той части Γ_ω контура, где волокно входит в конструкцию

$$\omega_1(\Gamma_\omega) = \omega_1^*(s). \quad (10)$$

Ограничение для интенсивности армирования имеет вид

$$0 < \omega_1 \leq 0,7. \quad (11)$$

Уравнения модели (1), (2), (3), (6) запишем в виде общей разрешающей системы относительно неизвестных $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \sigma_1, \omega_1, \varphi$. Входит или нет σ_1 в список неизвестных, зависит от механического содержания задачи: если волокно нерастяжимо, то σ_1 – искомая функция. В случае равнонапряженного волокна $\sigma_1 = Const$. Предварительно введем вспомогательную переменную $z = \operatorname{tg} \varphi$, выразим из (2) одну из компонент деформаций, например ε_{12} , через остальные компоненты, а именно $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$. Обозначив $r_1 = -\frac{1}{2z}, r_2 = -\frac{z}{2}, r_3 = \frac{\varepsilon_1^0(1 + z^2)}{2z}$, получим

$$\varepsilon_{12} = r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3. \quad (12)$$

После сделанных замечаний перейдем к формулировке системы

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1 \left(-z \frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\varepsilon_{11,22} - 2(r_1\varepsilon_{11})_{,12} + \varepsilon_{22,11} - 2(r_2\varepsilon_{22})_{,12} - 2r_{3,12} = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \omega m_3(\varepsilon_{11,1} + \nu\varepsilon_{22,1}) + \omega m_4((r_1\varepsilon_{11})_{,2} + (r_2\varepsilon_{22})_{,2} + r_{3,2}) + \\ & + \sigma_{1,1} \frac{\omega_1}{1+z^2} + \sigma_{1,2} \frac{\omega_1 z}{1+z^2} + m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\ & + m_4(-\omega_{1,2})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3) - \\ & - \sigma_1 \omega_1 \left(\frac{z z_{,1}}{(1+z^2)^2} + \frac{z^2 z_{,2}}{(1+z^2)^2} \right) = b_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \omega m_3(\varepsilon_{22,2} + \nu\varepsilon_{11,2}) + \omega m_4((r_1\varepsilon_{11})_{,1} + (r_2\varepsilon_{22})_{,1} + r_{3,1}) + \\ & + \sigma_{1,1} \frac{\omega_1 z}{1+z^2} + \sigma_{1,2} \frac{\omega_1 z^2}{1+z^2} + m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\ & + m_4(-\omega_{1,1})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3) + \\ & + \sigma_1 \omega_1 \left(\frac{z_{,1}}{(1+z^2)^2} + \frac{z z_{,2}}{(1+z^2)^2} \right) = b_2. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение $\omega = 1 - \omega_1$. Первое уравнение системы – следствие условия постоянства сечений волокон, второе – уравнение совместности деформаций, два последних – уравнения равновесия. Во всех случаях в дальнейшем при расчетах для удобства работы в системе производится ее обезразмеривание: декартовы координаты x, y относятся к некоторому характерному линейному размеру, напряжения относятся к характерной величине модуля Юнга используемых материалов.

Конфигурации армирования одним семейством волокон. Рассмотрены следующие варианты армирования одним семейством волокон: семейство прямых, семейства парабол, эллипсов, гипербол, семейства кривых специального вида. Угол армирования определен как угол между касательной к кривой семейства и положительным направлением оси OX . Значение тангенса угла армирования φ находится из уравнения $z = \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$. По заданному уравнению семейства кривых, выписано дифференциальное уравнение (1), связывающее угол армирования и интенсивность армирования. Из этого уравнения получим аналитическое решение для интенсивности армирования. Для всех случаев уравнение (1) удобно записать в виде

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1 \left(-z \frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2} \right) = 0. \quad (16)$$

Решения уравнения представлены в виде таблицы 1.

Таблица 1. Решения для интенсивностей армирования

Уравнения семейств	се-	$z = \operatorname{tg} \varphi$	Уравнение для ω_1	Точное решение ω_1
Семейство прямых $y = kx$	пря-	$z = k$	$\omega_{1,1} + k\omega_{1,2} = 0$	$\omega_1 = F(y - kx)$

Таблица 1. Продолжение

Семейство парабол $y = ax^2$	$z = 2\frac{y}{x}$	$\omega_{1,1} + 2\frac{y}{x}\omega_{1,2} + \frac{2}{x}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = \frac{F(\frac{y}{x^2})}{x^2}$
Семейство парабол $y = x^2/2 + C$	$z = x$	$\omega_{1,1} + \frac{-x}{1+x^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = F(y - x^2/2)\sqrt{1+x^2}$
Семейство окружностей $y^2 + x^2 = C$	$z = \frac{-x}{y}$	$\omega_{1,1} - \frac{x}{y}\omega_{1,2} = 0.$	$\omega_1 = F(y^2 + x^2)$
Семейство кривых $y = Ce^x$	$z = y$	$\omega_{1,1} + \frac{1}{1+y^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = F(ye^{-x})e^{-x}\sqrt{1+y^2}$
Семейство эллипсов $y^2/2 + x^2 = C$	$z = \frac{-2x}{y}$	$\omega_{1,1} - \frac{2x}{y}\omega_{1,2} + \frac{2x}{y^2+4x^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = \frac{F(y^2+2x^2)}{\sqrt{4x^2+y^2}}$
Семейство гипербол $y^2 - x^2 = C$	$z = \frac{x}{y}$	$\omega_{1,1} + \frac{x}{y}\omega_{1,2} - \frac{2x}{y^2+x^2}\omega_1 = 0.$	$\omega_1 = F(y^2 - x^2)\sqrt{x^2 + y^2}$

В решениях, представленных в таблице 1, F – произвольная функция, определяемая из граничных условий (10), соответствующих технологическим условиям выхода арматуры.

Семейство нерастяжимых волокон. Пусть семейство волокон нерастяжимо. Тогда в (2) правая часть имеет вид $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^T$. В силу идеализации модели волокон (абсолютно твердое тело) σ_1 – неизвестная функция координат x, y . Пусть задан угол армирования как известная функция $\varphi(x, y)$. Тогда интенсивность армирования определим из уравнения (1). Получим разрешающую систему уравнений. Для этого в уравнения равновесия (6) подставим выражения для осредненных напряжений (4). Из уравнения (2) компоненту деформаций ε_{12} выражаем через $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$, получим

$$\varepsilon_{12} = r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3, \quad (17)$$

где коэффициенты r_1, r_2, r_3 в случае заданного угла армирования φ , вычисляем по формулам:

$$r_1 = -0,5ctg\varphi, \quad r_2 = -0,5tg\varphi, \quad r_3 = \frac{\alpha^a T}{\sin 2\varphi}.$$

Уравнение совместности деформаций (3) после исключения ε_{12} примет вид:

$$\varepsilon_{11,22} - 2(r_1\varepsilon_{11})_{,12} + \varepsilon_{22,11} - 2(r_2\varepsilon_{22})_{,12} + r_{3,12} = 0. \quad (18)$$

Уравнения равновесия в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned}
& \omega m_3(\varepsilon_{11,1} + \nu \varepsilon_{22,1}) + \sigma_{1,1}(\omega_1 \cos^2 \varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \cos \varphi \sin \varphi) + \\
& + \omega_1 m_4((r_1 \varepsilon_{11})_{,2} + (r_2 \varepsilon_{22})_{,2} + r_{3,2}) + m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22} - L^T) + \\
& + m_4(-\omega_{1,2})(r_1 \varepsilon_{11} + r_2 \varepsilon_{22} + r_3) + \\
& + \sigma_1(\omega_{1,2} \sin \varphi \cos \varphi + \omega_{1,1} \cos^2 \varphi) = b_1, \\
& \omega m_3(\varepsilon_{22,2} + \nu \varepsilon_{11,2}) + \sigma_{1,1}(\omega_1 \cos \varphi \sin \varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \sin^2 \varphi) + \\
& + \omega m_4((r_1 \varepsilon_{11})_{,1} + (r_2 \varepsilon_{22})_{,1} + r_{3,1}) + m_4(-\omega_{1,1})(r_1 \varepsilon_{11} + r_2 \varepsilon_{22} + r_3) + \\
& + m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11} - L^T) + \sigma_1(\omega_{1,1} \sin \varphi \cos \varphi + \omega_{1,2} \sin^2 \varphi) = b_2.
\end{aligned} \tag{19}$$

В результате сформулирована замкнутая система уравнений (18), (19) относительно σ_1 , ε_{11} , ε_{22} . Поскольку уравнение (18) второго порядка, а остальные уравнения первого порядка, для определения типа системы дифференциальных уравнений продифференцируем уравнения (19) по одной из переменных. Построим характеристический полином $P(\lambda)$ системы (18), (19) и найдем его корни [7]:

$$P(\lambda) = \det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}) = 0. \tag{20}$$

Матрицы A^{11} , A^{12} , A^{22} в (20) имеют вид

$$\begin{aligned}
A^{11} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega m_3 & \omega m_3 \nu & \omega_1 \cos^2 \varphi \\ r_1 \omega m_4 & r_2 \omega m_4 & \omega_1 \cos \varphi \sin \varphi \end{pmatrix}, \\
A^{12} &= \begin{pmatrix} -2r_1 & -2r_2 & 0 \\ r_1 \omega m_4 & r_2 \omega m_4 \nu & \omega_1 \cos \varphi \sin \varphi \\ \nu \omega m_3 & r_2 \omega m_3 & \omega_1 \sin^2 \varphi \end{pmatrix}, \quad A^{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В металлокомпозите в качестве связующего выбран алюминий. Пусть армирование выполнено стальными волокнами. Введем механические характеристики названных материалов связующего и арматуры согласно [8].

Случай 1. Пусть армирование выполнено семейством прямолинейных волокон. Угол армирования при этом постоянный, что дает некоторые упрощения в системе, и пусть он равен $\frac{\pi}{4}$.

Интенсивность $\omega_1(x, y)$ определим из уравнения (1) и граничных условий (10). Общее решение для данного случая соответствует первой строке таблицы 1. После преобразований получим следующее выражение для характеристического многочлена относительно λ :

$$P(\lambda) = 52, 82\omega_1\omega\lambda^4 + 108, 39\omega_1\omega\lambda^3 + 88, 17\omega_1\omega\lambda^2 + 270, 99\omega_1\omega\lambda + 211, 29\omega_1\omega = 0.$$

Независимо от вида функции ω_1 корни λ будут действительными и комплексно сопряженными $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -0, 875$, $\lambda_3 = 0, 416 - 1, 454I$, $\lambda_4 = 0, 416 + 1, 454I$, где I здесь и далее – мнимая единица. Это означает, что система имеет действительные и комплексные характеристики и является системой составного типа [7]. Анализ дифференциальных уравнений составного типа рассмотрен в монографиях [9], [10]. Построение численного решения для таких систем вызывает определенные трудности. Поэтому в работе выбран подход построения численно-аналитического решения.

Заметим, что уравнение (18) для рассматриваемого случая прямолинейного армирования распадается на два независимых друг от друга уравнения относительно $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$

$$\varepsilon_{11,22} - 2r_1\varepsilon_{11,12} = 0, \quad (21)$$

$$\varepsilon_{22,11} - 2r_2\varepsilon_{22,12} = 0. \quad (22)$$

Уравнения (21), (22) – линейные уравнения гиперболического или эллиптического типа в зависимости от знаков r_1, r_2 .

Найдем аналитические решения (21), (22), которые являются их общими решениями и частными решениями уравнения (18). Они имеют вид

$$\varepsilon_{11} = F_1(y) + F_2(-y - 2r_1x), \quad \varepsilon_{22} = F_3(y) + F_4(y + 2r_1x) \quad (23)$$

и содержат произвольные функции F_1, F_2, F_3, F_4 .

Уравнения (19) представим в виде, разрешенном относительно частных производных от σ_1 :

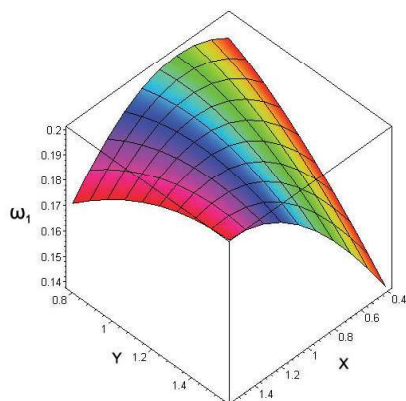
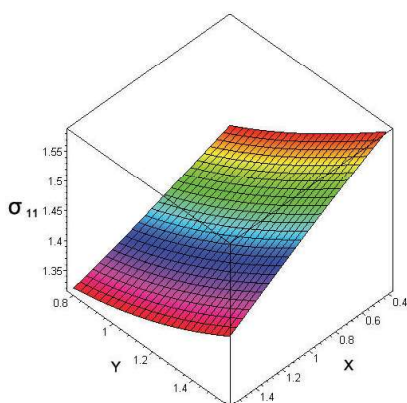
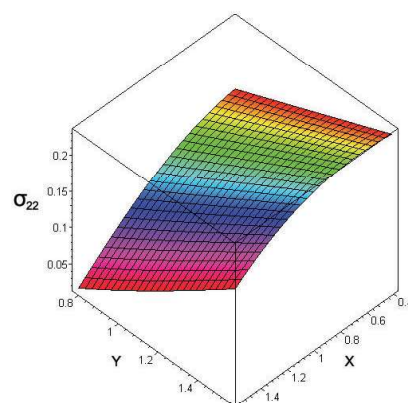
$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}(\omega_1 \cos^2 \varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \cos \varphi \sin \varphi) &= b_1 - (\sigma_1(\omega_{1,2} \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ \omega_{1,1} \cos^2 \varphi) + \omega m_4(r_1\varepsilon_{11,2} + r_2\varepsilon_{22,2}) + \\ &+ \omega m_3(\varepsilon_{11,1} + \varepsilon_{22,1}) + m_3(-\omega_{1,1})(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T) + \\ &+ m_4(-\omega_{1,2})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3)), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,1}(\omega_1 \cos \varphi \sin \varphi) + \sigma_{1,2}(\omega_1 \sin^2 \varphi) &= b_2 - (\sigma_1(\omega_{1,1} \sin \varphi \cos \varphi + \\ &+ \omega_{1,2} \sin^2 \varphi) + \omega m_4(r_1\varepsilon_{11,1} + r_2\varepsilon_{22,1}) + \\ &+ \omega m_3(\varepsilon_{22,2} + \nu\varepsilon_{11,2}) + m_3(-\omega_{1,2})(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T) + \\ &+ m_4(-\omega_{1,1})(r_1\varepsilon_{11} + r_2\varepsilon_{22} + r_3)). \end{aligned} \quad (25)$$

Напряжение в волокне σ_1 должно удовлетворять полученным выше уравнениям (24), (25). Чтобы определить частное решение задачи, сложим эти уравнения, подставим найденные аналитические решения для $\omega_1, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$. Получим дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, выпишем формулу его аналитического решения. Произвольные функции полученных решений определим с помощью граничных условий (9), точно или приближенно решая алгебраические уравнения, связывающие значения решений на граничном контуре. Чтобы определить значение σ_1 на граничном контуре, подставим найденные аналитические решения в граничные условия (7). Пусть на граничном контуре (прямоугольная пластинка размером $[1, 2] \times [3, 4]$) заданы нормальное и касательное напряжение (9). Распределенные массовые нагрузки не учитываются $b_1 = b_2 = 0$. На границе пластины, где волокна входят в конструкцию, $x = 1$ значение интенсивности зададим равным 0, 2 $\cos y$, воспользуемся полученным решением, результат показан на рис. 1.

Найденная интенсивность армирования удовлетворяет сформулированным выше ограничениям (11).

Пусть $p_n = 0, 2$, $p_\tau = -0, 02$, тогда графики решений для $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_1$ изображены на рисунках 2–4.

Рис. 1. Интенсивность армирования ω_1 Рис. 2. Напряжение σ_{11} Рис. 3. Напряжение σ_{22}

Случай 2. Предложенный выше способ решения задачи позволяет обобщить ее на случай криволинейной укладки волокон. Пусть в металлокомпозите укладка волокон произведена по параболам. Тогда угол армирования φ зависит от координат и задается в виде $\varphi = \text{arctg } x$ либо $\varphi = \text{arctg } y$. Выпишем точное решение (1) для интенсивности, когда $\varphi = \text{arctg } x$:

$$\omega_1(x, y) = \frac{F_2(y + \ln(\cos(x)))}{\cos(x)},$$

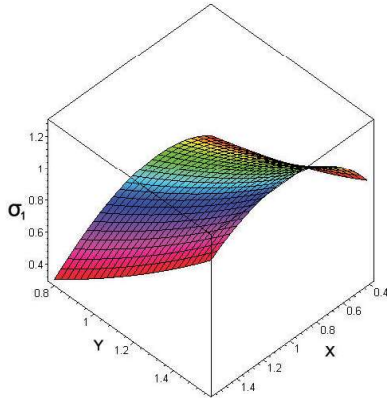
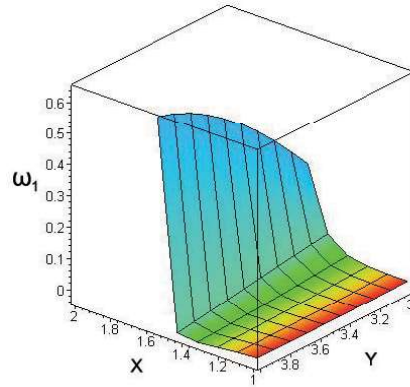
Рис. 4. Напряжение в волокне σ_1 

Рис. 5. Интенсивность армирования при укладке семейств армирующих волокон по параболам

где F_2 – функция граничных условий. Задавшись конкретной функцией граничных условий на отрезке $x \in [1, 2]$ (где волокна входят в конструкцию), находим решение для ω_1 и в символьной форме вычисляем ее производные. Это позволяет выписать переменные коэффициенты в (19). Коэффициенты в (18) r_1, r_2, r_3 при укладке по параболам также будут зависеть от координат, их вычисляем по формулам

$$r_1 = -0,5/x, r_2 = -0,5x, r_3 = \alpha_1^a T \frac{(1+x^2)}{2x}.$$

Интенсивность армирования в этом случае представлена на рис. 5.

Семейство равнонапряженных волокон. Для равнонапряженного семейства волокон правая часть в (2) примет вид $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T$, напряжение в волокне $\sigma_1 = Const$. Соотношения (1), (2), (3), (4), (6) – образуют замкнутую систему восьми уравнений относительно восьми неизвестных

$$\omega_1, \varphi, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}.$$

Переформулируем названную систему в перемещениях, выразив напряжения через деформации, а деформации через перемещения, используя соотношения Коши. К системе присоединим граничные условия на контуре Γ_u : $u(\Gamma_u) = u(s)$, либо граничные условия (9), где деформации выражены через перемещения.

При подстановке напряжений через перемещения в уравнения равновесия нужно вычислить следующие выражения

$$(\sigma_1 \omega_1 \cos^2 \varphi)_{,1} + (\sigma_1 \omega_1 \cos \varphi \sin \varphi)_{,2}, \quad (\sigma_1 \omega_1 \cos \varphi \sin \varphi)_{,1} + (\sigma_1 \omega_1 \sin^2 \varphi)_{,2}. \quad (26)$$

При их вычислении выделяем слагаемые вида

$$(\omega_1 \cos \varphi)_{,1} + (\omega_1 \sin \varphi)_{,2},$$

которые в силу условия постоянства сечений волокон (1) равны нулю, что упрощает выражения (26) и они становятся соответственно равными:

$$\sigma_1 \omega_1 (\cos \varphi (\cos \varphi)_{,1} + \sin \varphi (\cos \varphi)_{,2})$$

$$\sigma_1 \omega_1 (\cos \varphi (\sin \varphi)_{,1} + \sin \varphi (\sin \varphi)_{,2}).$$

Для формулировки системы удобно ввести $z = \operatorname{tg} \varphi(x, y)$. Тогда производные от функции, задающей угол армирования, вычисляем по формулам

$$\varphi_{,1} = \frac{z_{,1}}{1+z^2}; \quad \varphi_{,2} = \frac{z_{,2}}{1+z^2}.$$

В итоге система для равнонапряженного семейства волокон относительно искомых переменных $\omega_1, \varphi, u_1, u_2$ записывается в виде:

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1 \left(-z \frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2}\right) = 0, \quad (27)$$

$$u_{1,2} + \frac{1}{z}u_{1,1} + u_{2,1} + u_{2,2} - \varepsilon_1^0 \left(\frac{1}{z} + z\right) = 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \omega m_3 (u_{1,11} + \nu u_{2,21}) + \frac{1}{2} \omega m_4 (u_{1,22} + u_{2,12}) + m_3 (-\omega_{1,1}) (u_{1,1} + \nu u_{2,2} - L^T) + \\ & + \frac{1}{2} m_4 (-\omega_{1,2}) (u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma_1 \omega_1 \left(-\frac{z}{(1+z^2)^2} (z_{,1}) - \frac{z^2}{(1+z^2)^2} (z_{,2})\right) = b_1, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \omega m_3 (u_{2,22} + \nu u_{1,12}) + \frac{1}{2} \omega m_4 (u_{1,21} + u_{2,11}) + m_3 (-\omega_{1,2}) (u_{2,2} + \nu u_{1,1} - L^T) + \\ & + \frac{1}{2} m_4 (-\omega_{1,1}) (u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma_1 \omega_1 \left(\frac{1}{(1+z^2)^2} (z_{,1}) + \frac{z}{(1+z^2)^2} (z_{,2})\right) = b_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Первые два уравнения системы содержат производные первого порядка, чтобы исследовать тип системы, продифференцируем эти уравнения по одной из координат. Затем построим характеристический многочлен для полученной системы (27) – (30)

$$P(\lambda) = \det(A^{11} \lambda^2 + 2A^{12} \lambda + A^{22}),$$

где

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z\omega_1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} & 1 \\ 0 & 0 & \omega m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega m_4}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} z & \frac{\omega_1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & \omega(\nu m_3 + \frac{m_4}{2}) \\ 0 & 0 & \omega(\nu m_3 + \frac{m_4}{2}) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega m_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega m_3 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 2z\lambda & \frac{\omega_1}{1+z^2}(-z\lambda^2 + 2\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^2}{z} + 2\lambda & \lambda^2 - 2z\lambda \\ 0 & 0 & \omega(m_3\lambda^2 + \frac{m_4}{2}) & 2\lambda\omega(m_3\nu + \frac{m_4}{2}) \\ 0 & 0 & 2\lambda\omega(m_3\nu + \frac{m_4}{2}) & \omega(\frac{m_4\lambda^2}{2} + m_3) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, он тождественно равен нулю, что означает вырождение типа системы [7]. Решение системы представляет определенные трудности и требует специального подхода. В данной работе предлагается следующий способ решения: находим частные решения после введения угла армирования как заданной функции координат. Это позволяет определить интенсивность армирования из уравнения (27). Уравнение (28) рассматриваем после вычисления u_1, u_2 как ограничение на условие равнонапряженности. Решаем (29), (30) совместно как систему относительно u_1, u_2 . Ее характеристический полином имеет вид

$$P(\lambda) = \det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}),$$

где

$$A^{11} = \begin{pmatrix} \omega m_3 & 0 \\ 0 & 0,5\omega m_4 \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & \omega(\nu m_3 + 0,5m_4) \\ \omega(\nu m_3 + 0,5m_4) & 0 \end{pmatrix}, A^{22} = \begin{pmatrix} 0,5\omega m_4 & 0 \\ 0 & \omega m_3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $P(\lambda) = 0$ после подстановки m_3, m_4 через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν запишется как биквадратное уравнение

$$\lambda^4 + \frac{3\nu^2 - 1 + 10\nu}{2(\nu - 1)}\lambda^2 + 1 = 0.$$

Находим четыре корня биквадратного уравнения:

$$\lambda_k = \pm \frac{\sqrt{-(\nu - 1)(3\nu^2 - 1 + 10\nu) \pm \sqrt{9\nu^4 + 78\nu^2 + 60\nu^3 - 15 + 12\nu}}}{2(\nu - 1)}, \quad (k = \overline{1, 4}).$$

Исследование выражения под радикалом $(9\nu^4 + 78\nu^2 + 60\nu^3 - 15 + 12\nu)$ как функции от ν показало, что оно имеет отрицательный знак на интервале $[0; 0,38]$. Это означает, что корни λ_k комплексно сопряженные на этом интервале. Рассматриваемая система (29), (30) имеет эллиптический тип. Заметим, что для многих материалов коэффициент Пуассона принимает значения от 0,25 до 0,3. Следовательно, возможные значения коэффициентов Пуассона попадают в указанный интервал, где корни λ_k – комплексно сопряженные.

Для построения численной схемы запишем оба уравнения в дивергентном виде. Предварительно введем следующие обозначения:

$$y_1 = \omega_1(x, y), \quad y_2 = z(x, y), \quad z_1 = (1 - y_1)m_3, \quad z_2 = (1 - y_1)m_4/2.$$

Здесь y_1, y_2 – известные функции координат, u_1, u_2 – неизвестные функции. Заметим выполнение следующих соотношений для слагаемых, входящих в первое уравнение

$$\begin{aligned}(1 - y_1)m_3u_{1,11} + m_3(-y_{1,1})u_{1,1} &= (z_1u_{1,1})_{,1}, \\ (1 - y_1)m_3\nu u_{2,11} + m_3(-y_{1,1})\nu u_{2,1} &= (\nu z_1u_{2,2})_{,1}, \\ \frac{(1 - y_1)}{2}m_4u_{1,22} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{1,2} &= (z_2u_{1,2})_{,2}, \\ \frac{(1 - y_1)}{2}m_4u_{2,12} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{2,1} &= (z_2u_{2,1})_{,2}.\end{aligned}$$

В итоге оно запишется

$$\begin{aligned}(z_1u_{1,1})_{,1} + (\nu z_1u_{2,2})_{,1} + (z_2u_{1,2})_{,2} + (z_2u_{2,1})_{,2} + F_1 &= 0, \\ F_1 = -b_1 + m_3y_{1,1}L^T + \sigma_1y_1\left(-\frac{y_2}{(1 + y_2^2)^2}y_{2,1} - \frac{y_2^2}{(1 + y_2^2)^2}y_{2,2}\right).\end{aligned}$$

Используем соотношения для второго уравнения

$$\begin{aligned}(1 - y_1)m_3u_{2,22} + m_3(-y_{1,1})u_{2,2} &= (z_1u_{2,2})_{,2}, \\ (1 - y_1)m_3\nu u_{1,12} + m_3(-y_{1,2})\nu u_{1,1} &= (\nu z_1u_{1,1})_{,2}, \\ \frac{(1 - y_1)}{2}m_4u_{1,12} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{1,2} &= (z_2u_{1,2})_{,1}, \\ \frac{(1 - y_1)}{2}m_4u_{2,11} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{2,1} &= (z_2u_{2,1})_{,1}.\end{aligned}$$

В итоге второе уравнение запишется

$$\begin{aligned}(z_1u_{2,2})_{,2} + (\nu z_1u_{1,1})_{,2} + (z_2u_{1,2})_{,1} + (z_2u_{2,1})_{,1} + F_2 &= 0, \\ F_2 = -b_2 + m_3y_{1,2}L^T + \sigma_1y_1\left(\frac{1}{(1 + y_2^2)^2}y_{2,1} + \frac{y_2}{(1 + y_2^2)^2}y_{2,2}\right).\end{aligned}$$

Таким образом получили дивергентную форму записи уравнений (29), (30), рассматриваемых как система относительно u_1, u_2 .

Заключение. В работе получены разрешающие системы уравнений плоской задачи для одного семейства равнонапряженных и нерастяжимых, прямолинейных и криволинейных волокон в прямоугольной декартовой системе координат. Задача рассмотрена в рамках линейной неоднородной анизотропной теории упругости. Установлено, что разрешающие системы являются системами составного типа для семейства нерастяжимых волокон. Введение условия равнонапряженности семейства волокон приводит к вырождению типа системы. Получены численно-аналитические решения частных задач. Для иллюстрации расчетов выбран металлокомпозит (алюминиевая пластинка армируется стальными волокнами). Знание типа системы позволяет как корректно строить численные схемы, так и применять широко используемые в настоящее время программные продукты, например ANSYS и COSMOS. При этом приведенные решения могут служить тестовыми примерами при решении более общих задач.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. Красноярск: СФУ, 2010. 136 с.
- [2] Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Исследование рациональных структур криволинейного армирования в полярной системе координат // Вестн. Сам. Гос.тех.ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2013. № 1 (30). С. 233–244.
- [3] Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Предельные деформации термоупругих плоских конструкций с криволинейным армированием // Вестник Сиб.гос. аэрокосмич.ун-та. 2016. № 1 (17). С. 73–78.
- [4] Nemirovsky Yu. V. On the elastic-plastic behaviour of the reinforced layer // Int. J. Mech. Sci. 1970. Vol. 12. P. 898-903.
- [5] Бушманов С. Б., Немировский Ю. В. Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композитных материалов. 1983. Т. 19 № 2. С. 207–213.
- [6] Коваленко А. Д. Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
- [7] Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [8] Композиционные материалы: справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
- [9] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1979. 237 с.
- [10] Джураев А. Системы уравнений составного типа. М.: Наука, 1972. 227 с.

Yu. V. Nemirovsky, N. A. Feodorova

**SOLUTION OF PLANAR PROBLEM FOR METAL COMPOSITE
REINFORCED WITH SINGLE FAMILY OF CURVILINEAR FIBERS**

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. One-family straight and curved fibers reinforcement is considered by reference to the structural model within the inhomogeneous anisotropic theory planar problem. We consider inextensible and equally stressed families of fibers. The resolving systems of equations for these problems are constructed and its type is studied. The numerical-analytical solutions of the particular problems for a metal composite were obtained.

Keywords: curvelinear reinforcement, structural model, single family of curvilinear fibers

REFERENCES

- [1] Nemirovsky Yu. V., Feodorova N. A. Mathematical modeling of the plane constructions from reinforced fibrous materials. Krasnoyarsk: Siberian Federal University, 2010. 136 p. (in Russian).
- [2] Nemirovsky Yu. V., Feodorova N. A. Study of curvilinear reinforcement rational structures in polar coordinate system // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki, 2013. № 1(30). P. 233–244. (in Russian).
- [3] Nemirovsky Yu. V., Feodorova N. A. Breaking strains of planar thermoelastic constructions reinforced by curvilinear structures // Vestnik SibGAU, 2016. Vol. 17. № 1. P. 73–78. (in Russian).
- [4] Nemirovsky Yu. V. On the elastic-plastic behaviour of the reinforced layer // Int. J. Mech. Sci. 1970. Vol. 12. P. 898–903. (in Russian).
- [5] Bushmanov S. B., Nemirovsky Yu. V. Designing plates reinforced equally-stressed fibers with constant cross-section // Mech. Compos. Materials, 1983. Vol. 19. № 2. P. 207–213. (in Russian).
- [6] Kovalenko A. D. Introduction to thermoelasticity. Kiev: Naukova Dumka, 1965. 204 p. (in Russian).
- [7] Bitsadze A. V. Some classes of partial differential equations. M.: Nauka, 1981. 448 p. (in Russian).
- [8] Vasilyev V. V., Protasov V. D., Bolotin V. V. et al. Composite Materials: handbook. M.: Machine Building. 1990. 510 p. (in Russian).
- [9] Dzhurayev T. D. Boundary value problems for mixed and mixed-compound equations. Tashkent: Fan, 1979. 237 p. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemiryury@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk, Russia.

Feodorova Natalia Alexandrovna

e-mail: feodorova.natalia@mail.ru, Ph.D. Phys. & Math., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia.

[10] Dzhurayev A. Systems of equations of compound type. M.: Nauka, 1972. 227 p. (in Russian).