*Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2 (32). С. 18–22*

*Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов*

# К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

*Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва*

***Аннотация.*** В работе рассмотрено кручение идеальнопластического прямоугольного призматического стержня с включением. Определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжений, построено поле характеристик.

***Ключевые слова***: кручение, напряжение, пластичность, предел текучести.

*УДК*: 539.735

Кручение изотропных цилиндрических и призматических идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1], [2]. Кручение анизотропных и неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [1]–[5].

Рассмотрим призматический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат $xyz$.

Ось $z$ направлена параллельно образующим стержня. Сечение стержня плоскостью $z = const$ есть прямоугольник $ABCD$ со сторонами равными $2a$ и $2b$.

Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных левой половиной эллипса (рис. 1), тогда

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a_0 < a - b.$$

Стержень закручивается вокруг оси $z$ равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} &\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ &\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

---



*Миронов Борис Гурьевич*
`e-mail`: mbg.chspu@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва.
*Миронов Юрий Борисович*
`e-mail`: mistiam@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, г. Москва.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-41-210272).

Поступила 01.03.2017

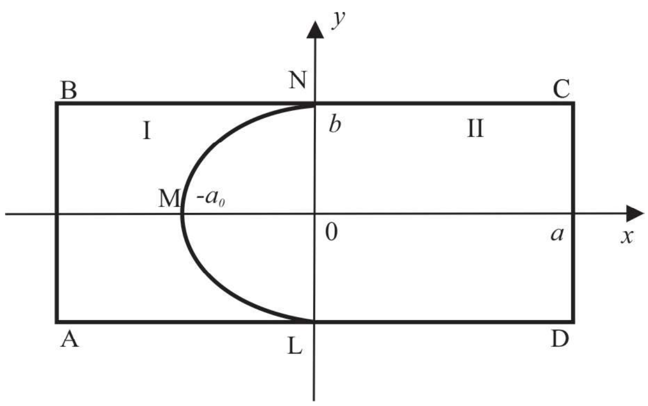


Рис. 1.

условиями пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2 \tag{2}$$

в области I,

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2 \tag{3}$$

в области II,
уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

где $k_1 < k_2$.

Согласно [2] характеристики соотношения (4) есть прямые, ортогональные вектору касательного напряжения

$$\overline{\tau} = \tau_{xz}\overline{i} + \tau_{yz}\overline{j}, \tag{5}$$

где $\overline{i}, \overline{j}$ – орты осей $x$ и $y$ соответственно, который направлен по касательной к контуру поперечного сечения стержня и не меняется вдоль характеристики.

На линии неоднородности $LMN$ неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через кривую $LMN$ вектор касательного напряжения $\overline{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. Это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений $ME$, $LE$ и $NE$, выходящим из точек $M$, $L$ и $N$ области II (рис. 2).

В области $MNE$ характеристики соотношения (4) задаются уравнением

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a_0^2}} - (x - x_0)\operatorname{ctg}(\alpha - \beta), \tag{6}$$

а вектор касательного напряжения имеет вид

$$\overline{\tau}_{MNE} = -k_2\left(\overline{i}\cos(\alpha - \beta) + \overline{j}\sin(\alpha - \beta)\right); \tag{7}$$

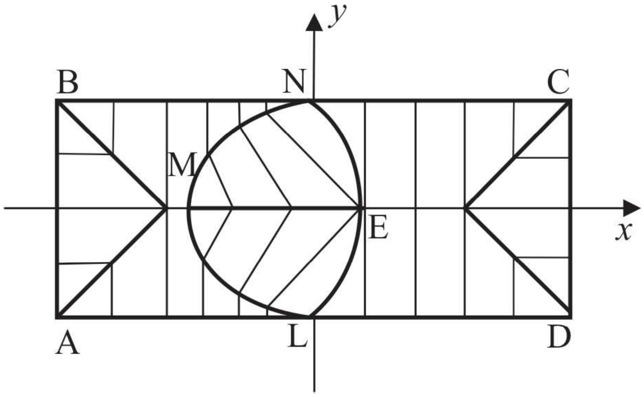


Рис. 2.

в области $MLE$ характеристики соотношения (4) определяются уравнением

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a_0^2}} + (x - x_0)\, ctg\,(\alpha - \beta)\,, \tag{8}$$

а вектор касательного напряжения имеет вид

$$\overline{\tau}_{MLE} = k_2\left(\overline{i}\cos(\alpha - \beta) - \overline{j}\sin(\alpha - \beta)\right), \tag{9}$$

где

$$x_0 \in (-a_0; 0)\,, \quad \sin\alpha = -\frac{b^2 x_0}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a_0^4 y_0^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{a_0^2 y_0}{\sqrt{b^4 x_0^2 + a_0^4 y_0^2}}, \quad \frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

$$\sin\beta = k_1 \sin\alpha / k_2, \quad \cos\beta = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\alpha}/k_2.$$

Согласно (6) и (8) уравнения линий разрыва напряжений $LE$ и $NE$ имеют вид

$$NE: \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha - \beta}{2}, \tag{10}$$

где $y = b$ при $x = 0$;

$$LE: \frac{dy}{dx} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha - \beta}{2}, \tag{11}$$

где $y = -b$ при $x = 0$.

Рассмотрим призматический стержень с прямоугольным сечением, в случае, когда сечение содержит включение в виде эллипса (рис. 3).

Пусть условие пластичности в эллипсе имеет вид (3), а вне ее – (2). В этом случае, в эллипсе появятся две дополнительные линии разрыва напряжений, которые совпадают с его диаметрами.

Характеристики соотношения (4) определяются уравнениями (6), (8) и соотношениями

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a_0^2}} + (x - x_0)\, ctg\,(\alpha - \beta)\,, \tag{12}$$

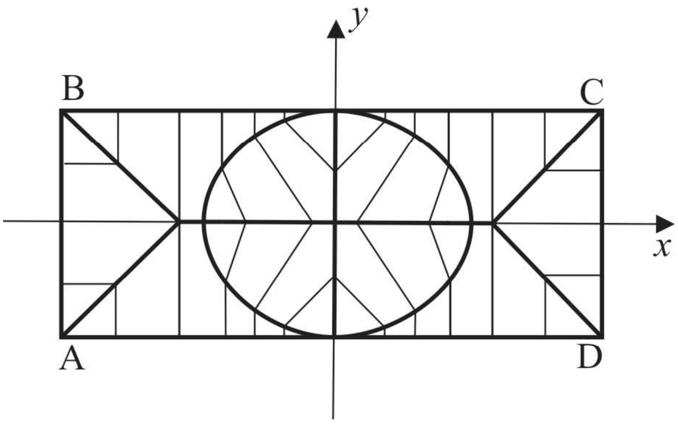


Рис. 3.

$$y = -b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a_0^2}} - (x - x_0)\,\mathrm{ctg}\,(\alpha - \beta)\,, \tag{13}$$

где $x_0 \in (0; a_0)$.

На рисунках 2 и 3 жирными линиями нарисованы линии разрыва напряжений, а тонкими линиями – характеристики.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

[3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2012. № 4 (14). С. 108–112.

[4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении цилиндрических анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния, 2011. № 1 (9). С. 150–155.

[5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964. 156 с.

*B. G. Mironov, Yu. B. Mironov*

**ABOUT TORSION OF PIECEWISE ISOTROPIC PRISMATIC CORES WITH INCLUSION**

*N. Bauman Moscow State Technical University, Moscow*

***Abstract.*** In work torsion of a ideal plastic prismatic core with inclusion in the form of a rectangle is considered. Tension of a core is defined, lines of a rupture of tension are found, the field of characteristics is built.

***Keywords***: torsion, tension, plasticity, fluidity limit

## REFERENCES

[1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teorija plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[2] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. (in Russian).

[3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhih sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2012. № 4. P. 108–112. (in Russian).

[4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. O kruchenii cilindricheskih anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2011. No 9. P. 150–155. (in Russian).

[5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. Teorija plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).

---

*Mironov Boris Guryevich*
`e-mail:` mbg.chspu@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, N. Bauman Moscow State Technical University, Moscow.
*Mironov Yuriy Borisovich*
`e-mail:` mistiam@gmail.com, Cand. Phys. & Math., Associate Professor, N. Bauman Moscow State Technical University, Moscow.