*Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева*
*Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2 (32). С. 33–36*

*В. Д. Коробкин, М. Г. Ордян*

# ПОСТРОЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОГО ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ДЛЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

*Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия*

***Аннотация.*** Рассмотрен вопрос построения непрерывного поля скоростей перемещений при вдавливании пластического материала через матрицу с гладким профилем. Составлено дифференциальное уравнение и определены первые интегралы. Используя граничные условия на входе материала в пластическую область, решена задача Коши и определены скорости перемещений и компоненты скорости деформаций для осесимметричной задачи.

***Ключевые слова***: пластичность, технологические задачи, поле скоростей перемещений, верхняя оценка усилий деформирования.

*УДК*: 539.374

Вопрос о непрерывных полях скоростей перемещений возник в связи с тем, что, как показано в работе [1], в упрочняющихся материалах нет разрыва скоростей перемещений. При деформировании упрочняющихся материалов, как правило, учитывают влияние факта неразрывности в среднем. Используют решение для жестко-пластического материала и считают, что кинематика для упрочняющегося материала мало отличается. Иногда, как например в работе [2], вместо поверхности разрыва вводят слой, устремляя при этом его толщину к нулю и фактически получают фиктивную поверхность разрыва скоростей перемещений. Течение жестко-пластического материала подробно изучено классиками теории пластичности и теории обработки металлов давлением. Наша задача заключается в следующем: используя метод, предложенный в работе [3], определить непрерывные поля скоростей перемещений для осесимметричных профилей.

1. Рассматривается пространственный осесиметричный профиль (рис. 1). Задача решается в цилиндрических координатах $z$, $\theta$, $r$.

Пусть уравнение профиля матрицы задано в виде



*Коробкин Валерий Дмитриевич*
e-mail: v.d.korobkin@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия.
*Ордян Микаел Гарегинович*
e-mail: omg84@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный технический университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 21.02.2017

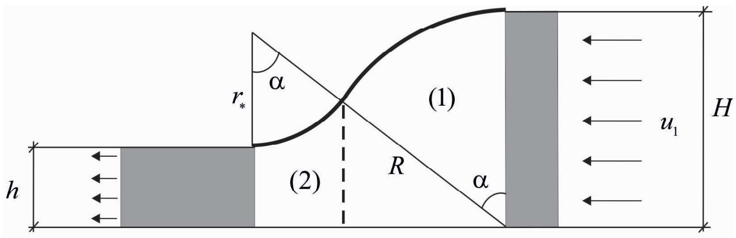


Рис. 1. Схема пластического течения

$$r = f(z). \tag{1.1}$$

Будем считать, что уравнения траекторий движений точек описываются следующим образом:

$$r = Cf(z), \tag{1.2}$$

где $C$ — постоянная, которая изменяется в пределах от нуля до 1.

Дифференциальные уравнения траекторий движения точек

$$\frac{dr}{dz} = Cf'(z). \tag{1.3}$$

Рассмотрим случай установившегося процесса

$$\frac{dr}{dz} = \frac{u_r}{u_z}. \tag{1.4}$$

Используя выражения (1.2), (1.3) и подставляя в уравнение (1.4), получим следующее соотношение

$$\frac{rf'(z)}{f(z)} = \frac{u_r}{u_z}. \tag{1.5}$$

Условие несжимаемости в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{1.6}$$

Подставляя в условия несжимаемости, получим

$$zf'(z)\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{2f'(z)}{f(z)}u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \tag{1.7}$$

2. Рассмотрим случай, когда угол $\alpha > 45^0$, а скорость $u_z$ зависит только от координаты $z$.

Уравнение для определения $u_z$ имеет вид

$$\frac{du_z}{dz} + u_z\frac{2f'(z)}{f(z)} = 0. \tag{2.1}$$

Решая уравнение (2.1), имеем:

$$u_z f^2(z) = C_1. \tag{2.2}$$

Используя граничное условие для $u_z$, при $z = 0$, $u_z = u_1$, $f(0) = H$, и учитывая, что $H = 1$, получим

$$u_z = \frac{u_1}{1 - z^2}. \tag{2.3}$$

Из условия несжимаемости находим $u_r$:

$$u_r = -\frac{rz}{(1 - z^2)^2}. \tag{2.4}$$

Таким образом, учитывая, что для первой пластической области $f_1(z) = \sqrt{1 - z^2}$, получим выражения для компонент скоростей деформации и сдвига

$$\varepsilon_z = \frac{2z}{(1 - z^2)^2};\ \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{-z}{(1 - z^2)^2};\ \gamma_{rz} = \frac{-1 + 3z^2}{(1 - z^2)^3} r. \tag{2.5}$$

Для первой области мощность определяется по формуле

$$N_1 = 2\pi k \int_0^{sin\alpha} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \sqrt{12\varepsilon_r^2 + \gamma_{rz}^2} drdz. \tag{2.6}$$

Для второй области по формуле

$$N_2 = 2\pi k \int_{sin\alpha}^{1+r_* sin\alpha} \int_{cos\alpha}^{f_2(z)} \sqrt{12\varepsilon_r^2 + \gamma_{rz}^2} drdz, \tag{2.7}$$

где $f_2(z) = r_0 - \sqrt{r_*^2 - (z - z_0^2)^2}$, $r_*$ — радиус малой окружности, $r_0$ и $z_0$ — координаты центра малой окружности. Если задать $h$ и угол $\alpha$ , то $h$ и $r_*$ связаны зависимостью

$$h = (1 + r_*)cos\alpha - r_*. \tag{2.8}$$

Используя граничные условия для во второй области, получим

$$u_z = \frac{u_1 tg^2\alpha}{f_2^2(z)}. \tag{2.9}$$

Из условия несжимаемости

$$u_r = -\frac{r du_z}{dz}. \tag{2.10}$$

Аналогично определяются $\varepsilon_r$, $\varepsilon_\theta$, $\varepsilon_z$.

**Выводы.**

1. При определении верхней оценки усилия деформирования упрочняющегося материала через осесимметричные матрицы использование непрерывного поля скоростей позволит уточнить значение верхней оценки.

2. Используя линии тока можно для каждого сечения $z = const$ получить распределение интенсивности деформации в зависимости от координат $r$.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 232 с.

[2] Коробкин В. Д., Чудаков П. Д. Диссипация мощности на поверхностях разрыва в упрочняющемся материале // Изв. АН СССР, МТТ. 1969. № 3. С. 158–161.

[3] Коробкин В. Д. Построение непрерывных полей скоростей по линиям тока // Изв. вузов, Машиностроение. 1973. № 9. С. 28–31.

*V. D. Korobkin, M. G. Ordyan*

**CONSTRUCTION OF THE CONTINUOUS FIELD OF RATES OF DISPLACEMENTS FOR THE AXISYMMETRIC PROBLEM OF THE THEORY OF PLASTICITY**

*Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia*

***Abstract.*** The question of construction of continuous field of rates of displacements when plastic material is pressed through a matrix with a smooth profile is considered. A differential equation is constructed and the first integrals are determined. Using the boundary conditions on the input of material in plastic region the Cauchy problem is solved and rates of displacements and the components of the strain rate for the axisymmetric problem are determined.

***Keywords***: plasticity, technological problems, the field of rates of displacements, the upper estimate of deformation efforts.

## REFERENCES

[1] Ivlev D. D., Bikovtsev G. I. Theory of a hardening plastic body. M.: Nauka, 1971. 232 p. (in Russian).

[2] Korobkin V. D., Chudakov P. D. Dissipation of the power at surfaces of discontinuity in the hardening material // Izv. AN SSSR, MTT. 1969. № 3. P. 158–161.(in Russian).

[3] Korobkin V. D. Constructing continuous fields of velocity along current lines // Izv. vuzov, Mashinostroenie. 1973. № 9. P. 28–31. (in Russian).

*Korobkin Valery Dmitrievich*

`e-mail:` v.d.korobkin@yandex.ru, Doctor Sci. Phys. & Math, Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia.

*Ordyan Mikayel Gareginovich*

`e-mail:` omg84@mail.ru, PhD in Phys. & Math, Assoc. Professor, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia.