

Ю. В. Немировский¹, С. В. Тихонов²

ДИНАМИКА ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК НА ВЯЗКО-УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

¹ *Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

² *Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. Первоначально основы теории предельного равновесия и динамического деформирования строительных конструкций из металлов и железобетона были разработаны А. А. Гвоздевым [1]–[3] и развиты его последователями [4]–[7]. Положенная в основу расчета модель идеального жестко-пластического материала позволила достаточно простыми методами определять во многих случаях предельные нагрузки несущей способности, а также верхние (кинематически возможные) или нижние (статически допустимые) значения для широкого класса разнообразных конструкций. При этом применительно к железобетонным конструкциям не учитывалось важнейшее свойство бетона существенно по разному сопротивляться растяжению и сжатию. Это обстоятельство было учтено в работе [8] для железобетонных балок в условиях квазистатического нагружения. В строительной практике часто возникают ситуации, когда деформирование сопровождается отпором окружающей среды [9]–[10], и возникает вопрос об оценке несущей способности конструкции и снижении уровня ее поврежденности при наличии такого отпора при воздействии динамических нагрузок. В рамках классической теории предельного равновесия А. А. Гвоздева этот вопрос не был рассмотрен, и в данной работе он будет исследован для железобетонных балок на упругом и вязкоупругом основании.

Ключевые слова: пластичность, многослойная железобетонная балка, предельное состояние, разносопротивляемость, прогиб, изгибающий момент, упругое основание, вязкое основание, нагрузки взрывного типа.

УДК: 539.374

При исследовании предельного состояния используем классическую модель идеального жесткопластического тела для всех материалов (бетона, арматуры) в соответствии с диаграммой (рис. 1).

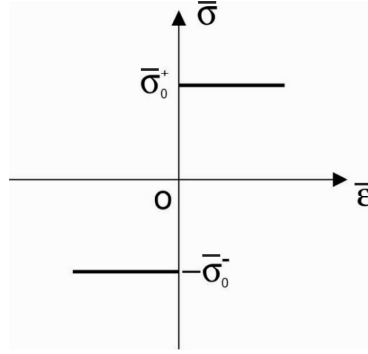


Рис. 1.

Предполагается, что все фазовые материалы будут разносопротивляющимися при растяжении и сжатии; примем для них диаграммы деформирования в виде изображенного на рис. 1, где σ_0^\pm – пределы текучести соответствующих фазовых материалов на растяжение + и сжатие –.

Будем считать, что структура армирования в слоях 1 и 3 поперечного сечения балки различна как по интенсивности, так и по свойствам фазовых материалов. Для всех рассматриваемых сечений будем считать справедливыми классические кинематические гипотезы Кирхгофа–Лява, в соответствии с которыми деформации $\bar{\epsilon}(\bar{x}, \bar{z})$ будет иметь выражения

$$\bar{\epsilon}(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{e}_0(\bar{x}) + \bar{z}\kappa(\bar{x}), \quad \bar{e}_0(\bar{x}) = \frac{d\bar{u}_0}{d\bar{x}}, \quad \kappa(\bar{x}) = -\frac{d^2\bar{w}}{d\bar{x}^2}, \quad (1)$$

где $\bar{u}_0(x)$ – перемещение вдоль отчетной оси \bar{x} балки, $\bar{w}(\bar{x})$ – прогиб.

Рассмотрим идеально-пластический участок балки, для которого

$$\bar{e}_0(\bar{x}) < 0, \quad \bar{e}_0 + \bar{h}_3\kappa(\bar{x}) > 0. \quad (2)$$

© Немировский Ю. В., Тихонов С. В., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики СО РАН им. С. А. Христиановича, г. Новосибирск, Россия.

Тихонов Сергей Владимирович

e-mail: strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-41-210272, 15-01-00825, 16-31-00511).

Поступила 01.03.2017

Оба неравенства будут выполнены при

$$\bar{\epsilon}_0(\bar{x}) < 0, \quad \kappa(\bar{x}) > 0. \quad (3)$$

Напряженное состояние будет соответствовать рис. 2.

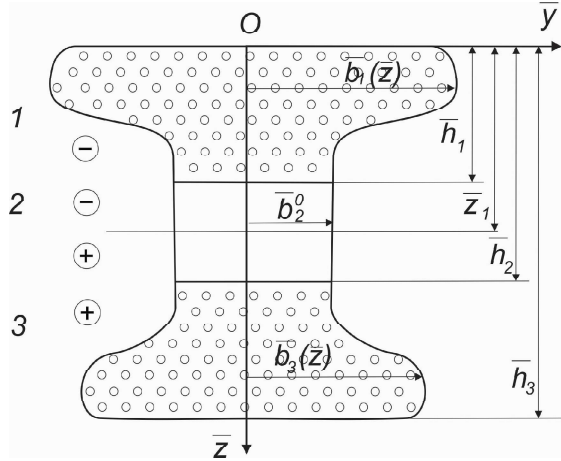


Рис. 2.

Тогда для рассматриваемого участка балки продольное усилие \bar{N} определяется равенством

$$\begin{aligned} \bar{N} = & -2\bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{02}^- \int_{\bar{h}_1}^{\bar{z}_1} \bar{b}_2^0 d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{02}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_2} \bar{b}_2^0 d\bar{z} + \\ & + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z} = -2\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \bar{z}_1 + 2\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1) - \\ & - 2\bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z}. \end{aligned} \quad (4)$$

Выражение для изгибающего момента $\bar{M}(\bar{x})$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{M} = & -2\bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{02}^- \int_{\bar{h}_1}^{\bar{z}_1} \bar{b}_2^0 \bar{z} d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{02}^+ \int_{\bar{z}_1}^{\bar{h}_2} \bar{b}_2^0 \bar{z} d\bar{z} + \\ & + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} = -\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+) \bar{z}_1^2 + \bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_1^2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_2^2) - \\ & - 2\bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (5)$$

В случае поперечного изгиба ($\bar{N} = 0$) имеем

$$\bar{z}_1 = \frac{\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1) - \bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z}}{\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+)}, \quad (6)$$

причем для \bar{z}_1 должно выполняться неравенство $\bar{h}_1 \leq \bar{z}_1 \leq \bar{h}_2$.

Подставляя в (5), получим предельный изгибающий момент

$$\begin{aligned} \bar{M}_0^+ = & \frac{\left(\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1) - \bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} + \bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z} \right)^2}{\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^- + \bar{\sigma}_{02}^+)} + \\ & + \bar{b}_2^0 \left(\bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_1^2 + \bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_2^2 \right) - 2\bar{\sigma}_{01}^- \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} + 2\bar{\sigma}_{03}^+ \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для идеально-пластического участка балки с деформированным состоянием

$$\bar{e}_0(\bar{x}) > 0, \quad \bar{e}_0 + \bar{h}_3 \quad \kappa(\bar{x}) < 0, \quad \bar{e}_0(\bar{x}) > 0, \quad \kappa(\bar{x}) < 0, \quad (8)$$

напряженное состояние будет соответствовать рис. 3.

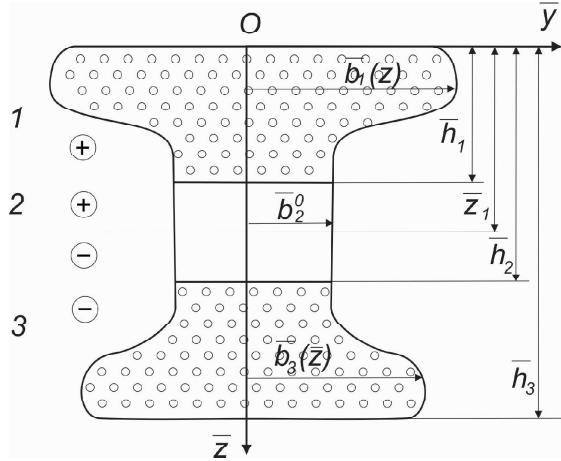


Рис. 3.

В этом случае продольное усилие \bar{N} будет равно

$$\begin{aligned} \bar{N} = & 2\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ + \bar{\sigma}_{02}^-) \bar{z}_1 - 2\bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1 + \bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2) + \\ & + 2\bar{\sigma}_{01}^+ \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{03}^- \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) d\bar{z}, \end{aligned} \quad (9)$$

изгибающий момент \bar{M} равен

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ + \bar{\sigma}_{02}^-) \bar{z}_1^2 - \bar{b}_2^0 (\bar{\sigma}_{02}^+ \bar{h}_1^2 + \bar{\sigma}_{02}^- \bar{h}_2^2) + \\ & + 2\bar{\sigma}_{01}^+ \int_0^{\bar{h}_1} \bar{b}_1(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z} - 2\bar{\sigma}_{03}^- \int_{\bar{h}_2}^{\bar{h}_3} \bar{b}_3(\bar{z}) \bar{z} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (10)$$

Исключая с помощью условия $\bar{N} = 0$ величину \bar{z}_1 , аналогично получим выражение предельного изгибающего момента \bar{M}_0

$$\begin{aligned} \overline{M}_0^- = & \frac{\left(\overline{b}_2^0 (\overline{\sigma}_{02}^+ \overline{h}_1 + \overline{\sigma}_{02}^- \overline{h}_2) - \overline{\sigma}_{01}^+ \int_0^{\overline{h}_1} \overline{b}_1(\overline{z}) d\overline{z} - \overline{\sigma}_{03}^- \int_{\overline{h}_2}^{\overline{h}_3} \overline{b}_3(\overline{z}) d\overline{z} \right)^2}{\overline{b}_2^0 (\overline{\sigma}_{02}^+ + \overline{\sigma}_{02}^-)} \\ & - \overline{b}_2^0 \left(\overline{\sigma}_{02}^+ \overline{h}_1^2 + \overline{\sigma}_{02}^- \overline{h}_2^2 \right) + 2\overline{\sigma}_{01}^+ \int_0^{\overline{h}_1} \overline{b}_1(\overline{z}) \overline{z} d\overline{z} - 2\overline{\sigma}_{03}^- \int_{\overline{h}_2}^{\overline{h}_3} \overline{b}_3(\overline{z}) \overline{z} d\overline{z}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, в общем случае балка разделяется на участки, соответствующие деформированным состояниям $\overline{e}_0 < 0$, $\kappa < 0$ или $\overline{e}_0 > 0$, $\kappa > 0$ и $\overline{e}_0 = \kappa = 0$. Последние соответствуют жесткому недеформированному состоянию. Количество жестких участков и разделяющих их пластических шарниров будет зависеть от условий закрепления балок, типа распределенных и сосредоточенных нагрузок и закона сопротивления опорной среды.

Рассмотрим железобетонную балку длины l , лежащую на вязко-упругом основании и консольно закрепленную на левом краю $x = 0$ (рис. 4).

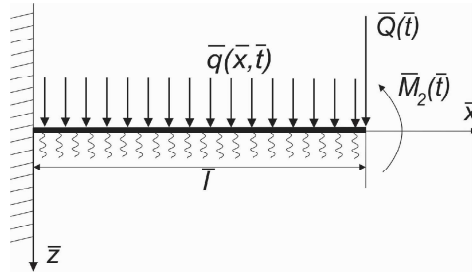


Рис. 4.

Балка нагружена распределенной поперечной нагрузкой $\overline{q}(x, t)$, собственным весом $\overline{q}_s = \overline{m}g$, сосредоточенной нагрузкой $\overline{Q}(t)$ и моментом $\overline{M}_2(t)$ на конце $\overline{x} = \overline{l}$. Здесь \overline{m} – масса единицы длины балки. Для балки с поперечным сечением, изображенной на рис. 2, 3 масса будет определяться

$$\begin{aligned} \overline{m} = & \int_0^{\overline{h}_1} (\overline{\rho}_1^a \mu_1 + \overline{\rho}_1^c (1 - \mu_1)) \overline{b}_1(\overline{z}) d\overline{z} + 2\overline{b}_2^0 \overline{\rho}_2^c (\overline{h}_2 - \overline{h}_1) + \\ & + \int_{\overline{h}_2}^{\overline{h}_3} (\overline{\rho}_3^a \mu_3 + \overline{\rho}_3^c (1 - \mu_3)) \overline{b}_3(\overline{z}) d\overline{z}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\rho_1^a, \rho_3^a, \rho_1^c, \rho_2^c, \rho_3^c$ – плотность материалов арматуры и связующих бетонов, μ_1, μ_3 – коэффициенты армирования.

Представим действующие внешние нагрузки в виде

$$\overline{q}(\overline{x}, \overline{t}) = \overline{q}_1 \overline{\varphi}(\overline{x}) \overline{\psi}_1(\overline{t}), \quad \overline{Q}(\overline{t}) = \overline{Q}_1 \overline{\psi}_2(\overline{t}), \quad \overline{M}_2(\overline{t}) = \overline{M}_{12} \overline{\psi}_3(\overline{t}). \quad (13)$$

Будем использовать для всех фазовых материалов железобетонной балки модель идеального разносопротивляющегося жестко-пластического материала. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{01}^{\pm} &= \mu_1 (\bar{\sigma}_{01}^{\pm})^a + (1 - \mu_1) (\bar{\sigma}_{01}^{\pm})^c, \\ \bar{\sigma}_{03}^{\pm} &= \mu_3 (\bar{\sigma}_{03}^{\pm})^a + (1 - \mu_3) (\bar{\sigma}_{03}^{\pm})^c.\end{aligned}\quad (14)$$

Для балок постоянного сечения, нагруженных равномерно-распределенной нагрузкой ($\varphi(x) = 1$) при условии $M_2(\bar{t}) \geq -\bar{M}_0^-$, движение будет происходить как жесткого стержня $\bar{e}_0 = 0, \bar{\kappa} = 0$ с образованием в опорном сечении $\bar{x} = 0$ пластического шарнира $\bar{M}_1 = \bar{M}_0^+$ при $\bar{M}_2(\bar{t}) \geq -\bar{M}_0^-$. Тогда для прогиба \bar{w} будем иметь выражение

$$\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{w}_0(\bar{t}) \frac{\bar{x}}{\bar{l}}, \quad 0 \leq \bar{x} \leq \bar{l} \quad (15)$$

и, учитывая, что по условиям динамического равновесия главный момент относительно опоры $\bar{x} = 0$ всех действующих сил, включая силы инерции, должен быть равен нулю, получим уравнение

$$\bar{M}_0^+ = -\bar{M}_2(\bar{t}) + \bar{l}\bar{Q}(\bar{t}) + \int_0^{\bar{l}} \left[\bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{q}_s - \bar{q}_r - \bar{m}\bar{x}\bar{\theta} \right] \bar{x} d\bar{x}, \quad (16)$$

где $\bar{\theta} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} = \frac{\bar{w}_0(\bar{t})}{\bar{l}}$, $\bar{q}_r = \bar{b}_0 \bar{k}_1 \bar{w} + \bar{b}_0 \bar{k}_2 \dot{\bar{w}}$, \bar{k}_1, \bar{k}_2 – коэффициенты упругого и вязкого сопротивления основания, причем далее всюду предполагаем, что $\bar{k}_1 > 0, \bar{k}_2 > 0$, $\bar{b}_0 = \bar{b}_3(\bar{h}_3)$ – длина основания поперечного сечения балки. Точка означает частную производную по времени \bar{t} .

Из (16) получим уравнение для определения прогиба

$$\ddot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + \frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{\bar{m}} \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + \frac{\bar{b}_0 \bar{k}_1}{\bar{m}} \bar{w}_0(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}), \quad (17)$$

где

$$\gamma(\bar{t}) = \frac{3}{2\bar{m}} \bar{q}_1 \psi_1(\bar{t}) + \frac{3\bar{g}}{2} + \frac{3}{\bar{m}\bar{l}^2} (-\bar{M}_0^+ + \bar{l}\bar{Q}_1 \psi_2(\bar{t}) - \bar{M}_{12} \psi_3(\bar{t})). \quad (18)$$

Принимая значения

$$\ddot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_0) = \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_0) = \bar{w}_0(\bar{\tau}_0) = 0,$$

получим уравнение для первых предельных амплитуд рассматриваемой балки

$$\frac{3}{2\bar{m}} \bar{q}_1 \psi_1(\bar{t}) + \frac{3\bar{g}}{2} + \frac{3}{\bar{m}\bar{l}^2} (-\bar{M}_0^+ + \bar{l}\bar{Q}_1 \psi_2(\bar{t}) - \bar{M}_{12} \psi_3(\bar{t})) = 0. \quad (19)$$

Из уравнения (19) можно определить момент времени $\bar{\tau}_0$, когда нагрузки начнут превышать уровень первых предельных нагрузок. Соответственно до достижения этого момента времени $\bar{t} < \bar{\tau}_0$ балка будет жесткой. В момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_0$ для прогиба и скорости прогиба справедливо

$$\bar{w}_0(\bar{\tau}_0) = 0, \quad \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_0) = 0. \quad (20)$$

В момент времени $\bar{t} \geq \bar{\tau}_0$ в месте защемления балки образуется пластический шарнир, который будет сохраняться, пока нагрузки превышают предельные значения.

Тогда для $\bar{t} \geq \bar{\tau}_0$ будет справедливо уравнение (17), интегрируя его при начальных условиях (20), можем получить три решения. Вид будет зависеть от таких параметров,

как площадь основания балки, масса балки, коэффициенты вязкости и упругости основания, коэффициенты армирования, пределы текучести арматуры и бетона.

I. В случае, когда $\bar{d} = \bar{b}_0^2 \bar{k}_2^2 - 4\bar{m} \bar{k}_1 \bar{b}_0 > 0$,

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = \frac{\bar{m}}{\sqrt{\bar{d}}} \left(e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 - \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z} dz - e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 - \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z} dz \right), \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = & \frac{1}{2\sqrt{\bar{d}}} \left((-\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}) e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z} dz + \right. \\ & \left. + (\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}) e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2 + \sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z} dz \right), \end{aligned} \quad (22)$$

II. В случае, когда $\bar{d} = \bar{b}_0^2 \bar{k}_2^2 - 4\bar{m} \bar{k}_1 \bar{b}_0 < 0$,

$$\begin{aligned} \bar{w}_0(\bar{t}) = & \frac{2\bar{m}}{\sqrt{\bar{d}}} e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \bar{t}} \left(\sin\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}\right) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} \cos\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z\right) \gamma(z) dz - \right. \\ & \left. - \cos\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}\right) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} \sin\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z\right) \gamma(z) dz \right), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = \frac{2\bar{m}}{\sqrt{\bar{d}}} e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \bar{t}}.$$

$$\begin{aligned} \cdot & \left(\left(-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \sin\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}\right) + \frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \cos\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}\right) \right) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} \cos\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z\right) \gamma(z) dz - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \cos\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}\right) + \frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \sin\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} \bar{t}\right) \right) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} \sin\left(\frac{\sqrt{\bar{d}}}{2\bar{m}} z\right) \gamma(z) dz \right). \end{aligned} \quad (24)$$

III. В случае, когда $\bar{d} = \bar{b}_0^2 \bar{k}_2^2 - 4\bar{m} \bar{k}_1 \bar{b}_0 = 0$,

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \bar{t}} \left(\bar{t} \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} dz - \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) z e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} dz \right), \quad (25)$$

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = -\frac{1}{2\bar{m}} e^{-\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} \bar{t}} \left((\bar{b}_0 \bar{k}_2 \bar{t} - 2\bar{m}) \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} dz - \bar{b}_0 \bar{k}_2 \int_{\tau_0}^{\bar{t}} \gamma(z) z e^{\frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{2\bar{m}} z} dz \right). \quad (26)$$

В каждом случае остановка движения будет происходить в момент времени $\bar{t}_{1\Phi}^*$, определяемым из уравнения

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}_{1\Phi}^*) = 0, \quad (27)$$

и максимальный остаточный прогиб определяется равенством

$$\bar{w}_0^* = \bar{w}_0(\bar{t}_{1\Phi}^*). \quad (28)$$

Если принять, что закон изменения давления на балку $\bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{q}_1 \bar{\psi}_1(\bar{t})$ меняется по закону (рис. 5),

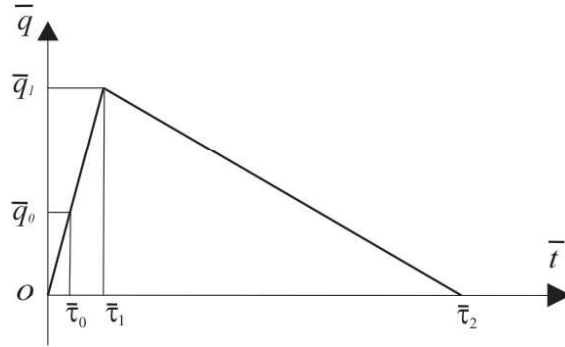


Рис. 5.

$$\bar{\psi}_1(\bar{t}) = \begin{cases} \frac{\bar{t}}{\bar{\tau}_1}, & \text{если } \bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1, \\ 1 - \frac{\bar{t} - \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, & \text{если } \bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2, \end{cases} \quad (29)$$

действующий внешний момент и сосредоточенная сила при $\bar{x} = \bar{l}$ отсутствуют

$$\bar{M}_2(\bar{t}) = 0, \quad \bar{Q}(\bar{t}) = 0,$$

тогда до достижения первой предельной нагрузки \bar{q}_0 в момент времени $0 \leq \bar{t} < \bar{\tau}_0$ балка будет жесткой, причем для момента времени образования пластического шарнира и величины первой предельной нагрузки справедливо

$$\bar{\tau}_0 = \frac{2\bar{m}}{3\bar{q}_1} \left(\frac{3\bar{M}_0^+}{\bar{m}\bar{l}^2} - \frac{3\bar{g}}{2} \right) \bar{\tau}_1, \quad \bar{q}_0 = \frac{2\bar{m}}{3} \left(\frac{3\bar{M}_0^+}{\bar{m}\bar{l}^2} - \frac{3\bar{g}}{2} \right). \quad (30)$$

Из соотношений (30) и предположений $0 < \bar{\tau}_0 < \bar{\tau}_1$ следует необходимость выполнения неравенств

$$0 < \frac{3\bar{M}_0^+}{\bar{m}\bar{l}^2} - \frac{3\bar{g}}{2} < 1. \quad (31)$$

В случае возрастания нагрузки по закону (29) после достижения первой предельной нагрузки для отрезка времени $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$ соотношения (17), (18) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_1 \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_2 \bar{w}_0(\bar{t}) &= \gamma(\bar{t}), \\ \gamma(\bar{t}) &= f_4 \bar{t} + f_3, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$f_1 = \frac{\bar{b}_0 \bar{k}_2}{\bar{m}}, \quad f_2 = \frac{\bar{b}_0 \bar{k}_1}{\bar{m}}, \quad f_3 = \frac{3\bar{g}}{2} - \frac{3}{\bar{m}\bar{l}^2} \bar{M}_0^+, \quad f_4 = \frac{3}{2\bar{m}} \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_1}.$$

Тогда для случая I, интегрируя уравнение (32) при начальных условиях (20), получим для прогиба выражение

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = g_3 e^{g_1 \bar{t}} + g_4 e^{g_2 \bar{t}} + g_5 \bar{t} + g_6, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, & g_2 &= \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, \\ g_3 &= \frac{-f_4 f_2 - (f_4 f_2 \bar{\tau}_0 + f_3 f_2 - f_4 f_1) g_1}{(g_2 e^{g_2 \bar{\tau}_0} - e^{g_2 \bar{\tau}_0} g_1) f_2^2}, & g_4 &= \frac{-f_4 f_2 + (f_4 f_2 \bar{\tau}_0 + f_3 f_2 - f_4 f_1) g_1}{(g_2 e^{g_2 \bar{\tau}_0} - e^{g_2 \bar{\tau}_0} g_1) f_2^2}, \\ g_5 &= \frac{f_4}{f_2}, & g_6 &= \frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2}. \end{aligned}$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = g_3 g_1 e^{g_1 \bar{t}} + g_4 g_2 e^{g_2 \bar{t}} + g_5. \quad (34)$$

Обозначим через $\bar{w}_{0\tau}$ и $\bar{w}_{1\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_1$

$$\begin{aligned} \bar{w}_0(\bar{\tau}_1) &= g_3 e^{g_1 \bar{\tau}_1} + g_4 e^{g_2 \bar{\tau}_1} + g_5 \bar{\tau}_1 + g_6 = \bar{w}_{0\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_1) &= g_3 g_1 e^{g_1 \bar{\tau}_1} + g_4 g_2 e^{g_2 \bar{\tau}_1} + g_5 = \bar{w}_{1\tau}. \end{aligned} \quad (35)$$

В диапазоне времени $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$ выражения (17), (18) примут вид

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_1 \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_2 \bar{w}_0(\bar{t}) &= \gamma(\bar{t}), \\ \gamma(\bar{t}) &= j_4 \bar{t} + j_3, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$j_3 = \frac{3\bar{g}}{2} - \frac{3}{m\bar{l}^2} M_0^+ + \frac{3}{2m} \bar{q}_1 + \frac{3}{2m} \bar{q}_1 \frac{\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, \quad j_4 = -\frac{3}{2m} \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}.$$

Решение (36) с учетом условий

$$\bar{w}_0(\bar{\tau}_1) = \bar{w}_{0\tau}, \quad \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_1) = \bar{w}_{1\tau}, \quad (37)$$

имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = v_3 e^{v_1 \bar{t}} + v_4 e^{v_2 \bar{t}} + v_5 \bar{t} + v_6, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, & v_2 &= \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, & v_5 &= \frac{j_4}{f_2}, & v_6 &= \frac{j_3 f_2 - j_4 f_1}{f_2^2}, \\ v_3 &= \frac{(w_{0\tau} - v_5 \bar{\tau}_1 - v_6) v_2 - w_{1\tau} + v_5}{e^{v_1 \bar{\tau}_1} (v_2 - v_1)}, & v_4 &= \frac{-(w_{0\tau} - v_5 \bar{\tau}_1 - v_6) v_1 + w_{1\tau} - v_5}{e^{v_2 \bar{\tau}_1} (v_2 - v_1)}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\bar{w}_{2\tau}$ и $\bar{w}_{3\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_2$

$$\begin{aligned} \bar{w}_0(\bar{\tau}_2) &= v_3 e^{v_1 \bar{\tau}_2} + v_4 e^{v_2 \bar{\tau}_2} + v_5 \bar{\tau}_2 + v_6 = \bar{w}_{2\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_2) &= v_3 v_1 e^{v_1 \bar{\tau}_2} + v_4 v_2 e^{v_2 \bar{\tau}_2} + v_5 = \bar{w}_{3\tau}. \end{aligned} \quad (39)$$

После прекращения действия нагрузки при $\bar{t} > \bar{\tau}_2$ балка продолжит движение по инерции, прогиб определяется из уравнения

$$\ddot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_1 \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) + f_2 \bar{w}_0(\bar{t}) = y_1, \quad (40)$$

где

$$y_1 = \frac{3\bar{g}}{2} - \frac{3}{m\bar{l}^2} \bar{M}_0^+.$$

Решение (40) с учетом условий

$$\bar{w}_0(\bar{\tau}_2) = \bar{w}_{2\tau}, \quad \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_2) = \bar{w}_{3\tau} \quad (41)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}_0(\bar{t}) &= u_3 e^{u_1 \bar{t}} + u_4 e^{u_2 \bar{t}} + u_5, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) &= u_3 u_1 e^{u_1 \bar{t}} + u_4 u_2 e^{u_2 \bar{t}}, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, \quad u_2 = \frac{-f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_2}}{2}, \quad u_5 = \frac{y_1 f_2}{f_2^2}, \\ u_3 &= \frac{(w_{2\tau} - u_5)u_2 - w_{3\tau}}{e^{u_1 \bar{\tau}_2} (u_2 - u_1)}, \quad u_4 = \frac{-(w_{2\tau} - u_5)u_1 + w_{3\tau}}{e^{u_2 \bar{\tau}_2} (u_2 - u_1)}. \end{aligned}$$

Время остановки движения $\tau_{1\Phi}$ определяется из уравнения

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}_{1\Phi}) = 0, \quad (43)$$

откуда

$$\bar{t}_{1\Phi} = \frac{\ln\left(-\frac{u_4 u_2}{u_1 u_3}\right)}{u_1 - u_2}, \quad (44)$$

максимальный остаточный прогиб тогда будет равен

$$\bar{w}_0(\bar{t}_{1\Phi}) = u_3 e^{u_1 \bar{t}_{1\Phi}} + u_4 e^{u_2 \bar{t}_{1\Phi}} + u_5. \quad (45)$$

Данное решение будет справедливо на всей длине балки $0 \leq \bar{x} \leq \bar{l}$, если изгибающий момент $\bar{M}(\bar{x}, t)$ будет находиться в пределах

$$-\bar{M}_0^- \leq \bar{M}(\bar{x}, t) \leq \bar{M}_0^+. \quad (46)$$

При $0 \leq \bar{t} < \bar{\tau}_0$ балка остается жесткой, тогда уравнение для определения момента имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{q}_s, \quad (47)$$

проинтегрировав которое при граничных условиях

$$\bar{M}(\bar{l}, \bar{t}) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \bar{M}(\bar{l}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} = 0, \quad (48)$$

получим уравнение для момента, справедливое для $0 \leq \bar{t} < \bar{\tau}_0$

$$\bar{M}(\bar{x}) = \frac{\bar{q}_1 \bar{t} + \bar{m}g\bar{\tau}_1}{2\bar{\tau}_1} \bar{x}^2 - \frac{\bar{q}_1 \bar{t} \bar{l} + \bar{m}g\bar{l}\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_1} \bar{x} - \frac{3(\bar{q}_1 \bar{t} + \bar{m}g\bar{\tau}_1) \bar{l}^2}{2\bar{\tau}_1}. \quad (49)$$

Уравнение изгиба балки в случае появления пластического шарнира в месте защемления балки имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) + \bar{q}_s - \frac{\bar{m}x\ddot{w}_0(\bar{t})}{\bar{l}} - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0 x \dot{w}_0(\bar{t})}{\bar{l}} - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0 x \dot{w}_0(\bar{t})}{\bar{l}}, \quad (50)$$

подставив в (50) выражение для прогиба (33) получим

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(g_7 e^{g_1 \bar{t}} + g_8 e^{g_2 \bar{t}} + g_9 \bar{t} + g_{10} \right) + g_{11} \bar{t} + g_{12}, \quad (51)$$

где

$$g_7 = -\frac{\bar{m}g_3 g_1^2 + k_1 g_3 \bar{b}_0 + k_2 g_1 g_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_8 = -\frac{\bar{m}g_4 g_2^2 + k_1 g_4 \bar{b}_0 + k_2 g_2 g_4 \bar{b}_0}{\bar{l}},$$

$$g_9 = -\frac{k_1 g_5 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_{10} = -\frac{k_1 g_6 \bar{b}_0}{\bar{l}} - \frac{k_2 g_5 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_{11} = \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_1}, \quad g_{12} = \bar{m}g.$$

Интегрируя его по \bar{x} при условиях (33) получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \bar{x}^3 \left(\frac{g_7}{6} e^{g_1 \bar{t}} + \frac{g_8}{6} e^{g_2 \bar{t}} + \frac{g_9}{6} \bar{t} + \frac{g_{10}}{6} \right) + \\ & + \bar{x}^2 \left(\frac{g_{11}}{2} \bar{t} + \frac{g_{12}}{2} \right) + \bar{x} \left(-\frac{\bar{l}^2}{2} g_7 e^{g_1 \bar{t}} - \frac{\bar{l}^2}{2} g_8 e^{g_2 \bar{t}} - \left(\frac{\bar{l}^2}{2} g_9 + \bar{l} g_{11} \right) \bar{t} - \frac{\bar{l}^2}{2} g_{10} - \bar{l} g_{12} \right) + \\ & + \frac{\bar{l}^3}{3} g_7 e^{g_1 \bar{t}} + \frac{\bar{l}^3}{3} g_8 e^{g_2 \bar{t}} + \left(\frac{\bar{l}^3}{3} g_9 + \frac{\bar{l}^2}{2} g_{11} \right) \bar{t} + \bar{l}^2 \left(\frac{\bar{l} g_{10}}{3} + \frac{g_{12}}{2} \right). \end{aligned} \quad (52)$$

Для отрезка времени $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$, приняв что прогиб определяется соотношениями (38), получим выражение для момента

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(v_7 e^{v_1 \bar{t}} + v_8 e^{v_2 \bar{t}} + v_9 \bar{t} + v_{10} \right) + v_{11} \bar{t} + v_{12}, \quad (53)$$

где

$$v_7 = -\frac{\bar{m}v_3 v_1^2 + k_1 v_3 \bar{b}_0 + k_2 v_1 v_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_8 = -\frac{\bar{m}v_4 v_2^2 + k_1 v_4 \bar{b}_0 + k_2 v_2 v_4 \bar{b}_0}{\bar{l}},$$

$$v_9 = -\frac{k_1 v_5 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_{10} = -\frac{k_1 v_6 \bar{b}_0}{\bar{l}} - \frac{k_2 v_5 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_{11} = -\frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, \quad v_{12} = \bar{m}g + \bar{q}_1 + \frac{\bar{q}_1 \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}.$$

Интегрируя (53) получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \bar{x}^3 \left(\frac{v_7}{6} e^{v_1 \bar{t}} + \frac{v_8}{6} e^{v_2 \bar{t}} + \frac{v_9}{6} \bar{t} + \frac{v_{10}}{6} \right) + \\ & + \bar{x}^2 \left(\frac{v_{11}}{2} \bar{t} + \frac{v_{12}}{2} \right) + \bar{x} \left(-\frac{\bar{l}^2 v_7}{2} e^{v_1 \bar{t}} - \frac{\bar{l}^2 v_8}{2} e^{v_2 \bar{t}} - \left(\frac{\bar{l}^2}{2} v_9 + \bar{l} v_{11} \right) \bar{t} - \frac{\bar{l}^2}{2} v_{10} - \bar{l} v_{12} \right) + \\ & + \frac{\bar{l}^3}{3} v_7 e^{v_1 \bar{t}} + \frac{\bar{l}^3}{3} v_8 e^{v_2 \bar{t}} + \left(\frac{\bar{l}^3}{3} v_9 + \frac{\bar{l}^2}{2} v_{11} \right) \bar{t} + \bar{l}^2 \left(\frac{\bar{l} v_{10}}{3} + \frac{v_{12}}{2} \right). \end{aligned} \quad (54)$$

С момента прекращения действия нагрузки и до остановки движения при $\bar{\tau}_2 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_{1\Phi}$ дифференциальное уравнение для определения момента имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = u_6 + \bar{x}(u_7 e^{u_1 \bar{t}} + u_8 e^{u_2 \bar{t}} + u_9), \quad (55)$$

где

$$\begin{aligned} u_6 = \bar{m} \bar{g}, \quad u_7 = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}} u_3 u_1^2 - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_3 - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_3 u_1, \quad u_8 = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}} u_4 u_2^2 - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_4 - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_4 u_2, \\ u_9 = -\frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_5. \end{aligned}$$

Откуда получим выражение для момента

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{\bar{x}^3}{6} (u_7 e^{u_1 \bar{t}} + u_8 e^{u_2 \bar{t}} + u_9 u_5) + \frac{\bar{x}^2}{2} u_6 + \\ & + \frac{\bar{x}}{2} \left(-\bar{l}^2 u_7 e^{u_1 \bar{t}} - \bar{l}^2 u_8 e^{u_2 \bar{t}} - \bar{l}^2 u_9 u_5 - 2u_6 \bar{l} \right) + \\ & + \frac{2}{3} u_7 \bar{l}^3 e^{u_1 \bar{t}} + \frac{2}{3} u_8 \bar{l}^3 e^{u_2 \bar{t}} + \frac{2}{3} \bar{l}^3 u_9 u_5 + \frac{1}{2} \bar{l}^2 u_6. \end{aligned} \quad (56)$$

Для случая II, интегрируя уравнение (32) при начальных условиях (20), получим для прогиба выражение, справедливое при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = e^{g_1 \bar{t}} (g_5 \cos(g_2 \bar{t}) + g_6 \sin(g_2 \bar{t})) + g_3 \bar{t} + g_4, \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 = \frac{-f_1}{2}, \quad g_2 = \frac{\sqrt{4f_2 - f_1^2}}{2}, \quad g_3 = \frac{f_4}{f_2}, \quad g_4 = \frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2}, \\ g_5 = \frac{(-g_3 g_2 \bar{\tau}_0 - g_4 g_2) \cos(g_2 \bar{\tau}_0) + (-g_3 g_1 \bar{\tau}_0 - g_4 g_1 + g_3) \sin(g_2 \bar{\tau}_0)}{\cos(2g_2 \bar{\tau}_0)} e^{-g_1 \bar{\tau}_0}, \\ g_6 = \frac{(-g_3 + g_3 g_1 \bar{\tau}_0 + g_4 g_1) \cos(g_2 \bar{\tau}_0) + (-g_2 g_3 \bar{\tau}_0 - g_2 g_4) \sin(g_2 \bar{\tau}_0)}{\cos(2g_2 \bar{\tau}_0)} e^{-g_1 \bar{\tau}_0}. \end{aligned}$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = ((g_5 g_1 + g_6 g_2) \cos(g_2 \bar{t}) + (g_6 g_1 - g_5 g_2) \sin(g_2 \bar{t})) e^{g_1 \bar{t}} + g_3. \quad (58)$$

Обозначим через $\bar{w}_{0\tau}$ и $\bar{w}_{1\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_1$

$$\begin{aligned}\bar{w}_0(\bar{\tau}_1) &= e^{g_1\bar{\tau}_1}(g_5 \cos(g_2\bar{\tau}_1) + g_6 \sin(g_2\bar{\tau}_1)) + g_3\bar{\tau}_1 + g_4 = \bar{w}_{0\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_1) &= ((g_5g_1 + g_6g_2) \cos(g_2\bar{\tau}_1) + (g_6g_1 - g_5g_2) \sin(g_2\bar{\tau}_1))e^{g_1\bar{\tau}_1} + g_3 = \bar{w}_{1\tau}.\end{aligned}\quad (59)$$

Решение (36) с учетом условий (37), справедливое при $\bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$, имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = e^{v_1\bar{t}}(v_5 \cos(v_2\bar{t}) + v_6 \sin(v_2\bar{t})) + v_3\bar{t} + v_4, \quad (60)$$

где

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{-f_1}{2}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{4f_2 - f_1^2}}{2}, \quad v_3 = \frac{j_4}{f_2}, \quad v_4 = \frac{j_3f_2 - j_4f_1}{f_2^2}, \\ v_5 &= \frac{(-v_3v_2\bar{\tau}_1 - v_4v_2 + v_2\bar{w}_{0\tau}) \cos(v_2\bar{\tau}_1) + (-v_3v_1\bar{\tau}_1 - v_4v_1 + v_3 - \bar{w}_{1\tau} + v_1\bar{w}_{0\tau}) \sin(v_2\bar{\tau}_1)}{\cos(2v_2\bar{\tau}_1)e^{v_1\bar{\tau}_1}}, \\ v_6 &= \frac{(\bar{w}_{1\tau} - v_1\bar{w}_{0\tau} - v_3 + v_3v_1\bar{\tau}_1 + v_4v_1) \cos(v_2\bar{\tau}_1) + (-v_2v_3\bar{\tau}_1 - v_2v_4 + v_2\bar{w}_{0\tau}) \sin(v_2\bar{\tau}_1)}{\cos(2v_2\bar{\tau}_1)e^{v_1\bar{\tau}_1}}.\end{aligned}$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = ((v_5v_1 + v_6v_2) \cos(v_2\bar{t}) + (v_6v_1 - v_5v_2) \sin(v_2\bar{t}))e^{v_1\bar{t}} + v_3. \quad (61)$$

Обозначим через $\bar{w}_{2\tau}$ и $\bar{w}_{3\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_2$

$$\begin{aligned}\bar{w}_0(\bar{\tau}_2) &= e^{v_1\bar{\tau}_2}(v_5 \cos(v_2\bar{\tau}_2) + v_6 \sin(v_2\bar{\tau}_2)) + v_3\bar{\tau}_2 + v_4 = \bar{w}_{2\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_2) &= ((v_5v_1 + v_6v_2) \cos(v_2\bar{\tau}_2) + (v_6v_1 - v_5v_2) \sin(v_2\bar{\tau}_2))e^{v_1\bar{\tau}_2} + v_3 = \bar{w}_{3\tau}.\end{aligned}\quad (62)$$

Решение (40) с учетом условий (41), справедливое при $\bar{\tau}_2 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_\Phi$, имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = e^{u_1\bar{t}}(u_4 \cos(u_2\bar{t}) + u_5 \sin(u_2\bar{t})) + u_3, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{-f_1}{2}, \quad u_2 = \frac{\sqrt{4f_2 - f_1^2}}{2}, \quad u_3 = \frac{y_1}{f_2}, \\ u_4 &= \frac{(-u_3u_2 + u_2\bar{w}_{0\tau}) \cos(u_2\bar{\tau}_2) + (-u_3u_1 - \bar{w}_{1\tau} + u_1\bar{w}_{0\tau}) \sin(u_2\bar{\tau}_2)}{\cos(2u_2\bar{\tau}_2)} e^{-u_1\bar{\tau}_2}, \\ u_5 &= \frac{(\bar{w}_{1\tau} - u_1\bar{w}_{0\tau} + u_3u_1) \cos(u_2\bar{\tau}_2) + (-u_2u_3 + u_2\bar{w}_{0\tau}) \sin(u_2\bar{\tau}_2)}{\cos(2u_2\bar{\tau}_2)} e^{-u_1\bar{\tau}_2}.\end{aligned}$$

Время остановки движения $\tau_{1\Phi}$ будет равно

$$\bar{t}_{1\Phi} = \frac{1}{u_2} \arctan \left(\frac{u_1u_4 + u_5u_2}{u_4u_2 - u_5u_1} \right), \quad (64)$$

максимальный остаточный прогиб будет равен

$$\bar{w}_0(\bar{t}_{1\Phi}) = e^{u_1\bar{t}_{1\Phi}}(u_4 \cos(u_2\bar{t}_{1\Phi}) + u_5 \sin(u_2\bar{t}_{1\Phi})) + u_3. \quad (65)$$

Изгибающий момент для отрезка времени $\bar{\tau}_0 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$ определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(e^{g_1 \bar{t}} (g_7 \cos(g_2 \bar{t}) + g_8 \sin(g_2 \bar{t})) + g_9 \bar{t} + g_{10} \right) + g_{11} \bar{t} + g_{12}, \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} g_7 &= \frac{-\bar{m}(g_5 g_1^2 + 2g_1 g_2 g_6 - g_5 g_2^2) - \bar{k}_1 \bar{b}_0 g_5 - \bar{k}_2 \bar{b}_0 (g_5 g_1 + g_6 g_2)}{\bar{l}}, \\ g_8 &= \frac{-\bar{m}(g_6 g_1^2 - 2g_5 g_1 g_2 - g_6 g_2^2) - \bar{k}_1 \bar{b}_0 g_6 - \bar{k}_2 \bar{b}_0 (g_6 g_1 - g_5 g_2)}{\bar{l}}, \\ g_9 &= -\frac{k_1 g_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_{10} = -\frac{k_1 g_4 \bar{b}_0}{\bar{l}} - \frac{k_2 g_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad g_{11} = \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_1}, \quad g_{12} = \bar{m}g. \end{aligned}$$

Интегрируя его по \bar{x} , получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{g_1 \bar{t}} (g_7 \cos(g_2 \bar{t}) + g_8 \sin(g_2 \bar{t})) + g_9 \bar{t} + g_{10} \right) + \frac{\bar{x}^2}{2} (g_{11} \bar{t} + g_{12}) - \\ &- \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{g_1 \bar{t}} (g_7 \bar{l}^2 \cos(g_2 \bar{t}) + g_8 \bar{l}^2 \sin(g_2 \bar{t})) + (g_9 \bar{l}^2 + 2g_{11} \bar{l}) \bar{t} + g_{10} \bar{l}^2 + 2g_{12} \bar{l} \right) + \\ &+ \frac{\bar{l}^3}{3} \left(e^{g_1 \bar{t}} (g_7 \cos(g_2 \bar{t}) + g_8 \sin(g_2 \bar{t})) + g_9 \bar{t} + g_{10} \right) + \frac{\bar{l}^2}{2} (g_{11} \bar{t} + g_{12}). \end{aligned} \quad (67)$$

Изгибающий момент для отрезка времени $\bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$ определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(e^{v_1 \bar{t}} (v_7 \cos(v_2 \bar{t}) + v_8 \sin(v_2 \bar{t})) + v_9 \bar{t} + v_{10} \right) + v_{11} \bar{t} + v_{12}, \quad (68)$$

где

$$\begin{aligned} v_7 &= \frac{-\bar{m}(v_5 v_1^2 + 2v_1 v_2 v_6 - v_5 v_2^2) - \bar{k}_1 \bar{b}_0 v_5 - \bar{k}_2 \bar{b}_0 (v_5 v_1 + v_6 v_2)}{\bar{l}}, \\ v_8 &= \frac{-\bar{m}(v_6 v_1^2 - 2v_5 v_1 v_2 - v_6 v_2^2) - \bar{k}_1 \bar{b}_0 v_6 - \bar{k}_2 \bar{b}_0 (v_6 v_1 - v_5 v_2)}{\bar{l}}, \\ v_9 &= -\frac{k_1 v_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_{10} = -\frac{k_1 v_4 \bar{b}_0}{\bar{l}} - \frac{k_2 v_3 \bar{b}_0}{\bar{l}}, \quad v_{11} = -\frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, \quad v_{12} = \bar{m}g + \bar{q}_1 + \frac{\bar{q}_1 \bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}. \end{aligned}$$

Интегрируя его по \bar{x} получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$:

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{v_1 \bar{t}} (v_7 \cos(v_2 \bar{t}) + v_8 \sin(v_2 \bar{t})) + v_9 \bar{t} + v_{10} \right) + \frac{\bar{x}^2}{2} (v_{11} \bar{t} + v_{12}) - \\ &- \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{v_1 \bar{t}} (v_7 \bar{l}^2 \cos(v_2 \bar{t}) + v_8 \bar{l}^2 \sin(v_2 \bar{t})) + (v_9 \bar{l}^2 + 2v_{11} \bar{l}) \bar{t} + v_{10} \bar{l}^2 + 2v_{12} \bar{l} \right) + \\ &+ \frac{\bar{l}^3}{3} \left(e^{v_1 \bar{t}} (v_7 \cos(v_2 \bar{t}) + v_8 \sin(v_2 \bar{t})) + v_9 \bar{t} + v_{10} \right) + \frac{\bar{l}^2}{2} (v_{11} \bar{t} + v_{12}). \end{aligned} \quad (69)$$

С момента прекращения действия нагрузки и до остановки движения при $\bar{\tau}_2 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_{1\phi}$ дифференциальное уравнение для определения момента имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(e^{u_1 \bar{t}} (u_7 \cos(u_2 \bar{t}) + u_8 \sin(u_2 \bar{t})) + u_9 \right) + u_{10}, \quad (70)$$

где

$$u_7 = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}} u_3 u_1^2 - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_3 - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_3 u_1, \quad u_8 = -\frac{\bar{m}}{\bar{l}} u_4 u_2^2 - \frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_4 - \frac{\bar{k}_2 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_4 u_2, \\ u_9 = -\frac{\bar{k}_1 \bar{b}_0}{\bar{l}} u_5, \quad u_{10} = \bar{m} \bar{g}.$$

Откуда получим выражение для момента

$$\bar{M} = \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{u_1 \bar{t}} (u_7 \cos(u_2 \bar{t}) + u_8 \sin(u_2 \bar{t})) + u_9 \right) + \frac{\bar{x}^2}{2} u_{10} - \\ - \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{u_1 \bar{t}} (u_7 \bar{l}^2 \cos(u_2 \bar{t}) + u_8 \bar{l}^2 \sin(u_2 \bar{t})) + u_9 \bar{l}^2 + 2u_{10} \bar{l} \right) + \\ + \frac{\bar{l}^3}{3} \left(e^{u_1 \bar{t}} (u_7 \cos(u_2 \bar{t}) + u_8 \sin(u_2 \bar{t})) + u_9 \right) + \frac{\bar{l}^2}{2} u_{10}. \quad (71)$$

Для случая III, интегрируя уравнение (32) при начальных условиях (20), получим для прогиба выражение, справедливое при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = g_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + g_2 \bar{t} e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + g_3 \bar{t} + g_4, \quad (72)$$

где

$$g_1 = e^{\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_0} \left(-\frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2} + \frac{f_4 f_1}{2 f_2} \bar{\tau}_0^2 + \frac{f_3 f_2 f_1 - f_4 f_1^2}{2 f_2^2} \bar{\tau}_0 \right), \\ g_2 = e^{\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_0} \left(-\frac{f_4}{f_2} - \frac{f_1}{2} \left(\frac{f_4}{f_2} \bar{\tau}_0 + \frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2} \right) \right), \\ g_3 = \frac{f_4}{f_2}, \quad g_4 = \frac{f_3 f_2 - f_4 f_1}{f_2^2}.$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = \left(-\frac{f_1}{2} g_1 + g_2 \right) e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} - \frac{f_1}{2} g_2 \bar{t} e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + g_3. \quad (73)$$

Обозначим через $\bar{w}_{0\tau}$ и $\bar{w}_{1\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_1$

$$\bar{w}_0(\bar{\tau}_1) = g_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_1} + g_2 \bar{\tau}_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_1} + g_3 \bar{\tau}_1 + g_4 = \bar{w}_{0\tau}, \\ \dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_1) = \left(-\frac{f_1}{2} g_1 + g_2 \right) e^{-\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_1} - \frac{f_1}{2} g_2 \bar{\tau}_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{\tau}_1} + g_3 = \bar{w}_{1\tau}. \quad (74)$$

Решение (36) с учетом условий (37), справедливое при $\bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$, имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = v_1 e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + v_2 \bar{t} e^{-\frac{f_1}{2} \bar{t}} + v_3 \bar{t} + v_4, \quad (75)$$

где

$$\begin{aligned}
v_1 &= e^{\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0} \left(\bar{w}_{0\tau} - \frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0\bar{w}_{0\tau} - \frac{j_3f_2 - j_4f_1}{f_2^2} + \frac{j_4f_1}{2f_2}\bar{\tau}_0^2 - \bar{\tau}_0\bar{w}_{1\tau} + \frac{j_3f_2f_1 - j_4f_1^2}{2f_2^2}\bar{\tau}_0 \right), \\
v_2 &= e^{\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0} \left(\bar{w}_{1\tau} - \frac{j_4}{f_2} - \frac{f_1}{2} \left(\frac{j_4}{f_2}\bar{\tau}_0 + \frac{j_3f_2 - j_4f_1}{f_2^2} - \bar{w}_{0\tau} \right) \right), \\
v_3 &= \frac{j_4}{f_2}, \quad v_4 = \frac{j_3f_2 - j_4f_1}{f_2^2}.
\end{aligned}$$

Для скорости прогиба справедливо

$$\dot{\bar{w}}_0(\bar{t}) = \left(-\frac{f_1}{2}v_1 + v_2 \right) e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} - v_2 \frac{f_1}{2}\bar{t}e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} + v_3. \quad (76)$$

Обозначим через $\bar{w}_{2\tau}$ и $\bar{w}_{3\tau}$ прогиб и скорость прогиба соответственно в момент времени $\bar{t} = \bar{\tau}_2$

$$\begin{aligned}
\bar{w}_0(\bar{\tau}_2) &= v_1e^{-\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2} + v_2\bar{\tau}_2e^{-\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2} + v_3\bar{\tau}_2 + v_4 = \bar{w}_{2\tau}, \\
\dot{\bar{w}}_0(\bar{\tau}_2) &= \left(-\frac{f_1}{2}v_1 + v_2 \right) e^{-\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2} - v_2 \frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2e^{-\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_2} + v_3 = \bar{w}_{3\tau}.
\end{aligned} \quad (77)$$

Решение (40) с учетом условий (41), справедливое при $\bar{\tau}_2 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_\Phi$, имеет вид

$$\bar{w}_0(\bar{t}) = u_1e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} + u_2\bar{t}e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} + u_3, \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned}
u_1 &= e^{\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0} \left(\bar{w}_{2\tau} - \frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0\bar{w}_{2\tau} - \frac{-j_3f_1}{f_2^2} + \frac{j_3f_1}{2f_2}\bar{\tau}_0^2 - \bar{\tau}_0\bar{w}_{3\tau} + \frac{j_3f_2f_1 - j_4f_1^2}{2f_2^2}\bar{\tau}_0 \right), \\
u_2 &= e^{\frac{f_1}{2}\bar{\tau}_0} \left(\bar{w}_{3\tau} - \frac{j_3}{f_2} - \frac{f_1}{2} \left(\frac{j_3}{f_2}\bar{\tau}_0 + \frac{-j_3f_1}{f_2^2} - \bar{w}_{2\tau} \right) \right), \quad u_3 = \frac{y_1}{f_2}.
\end{aligned}$$

Время остановки движения $\tau_{1\Phi}$ будет равно

$$\bar{t}_{1\Phi} = \frac{2u_2 - f_1u_1}{f_1u_2}, \quad (79)$$

максимальный остаточный прогиб будет равен

$$\bar{w}_0(\bar{t}_{1\Phi}) = u_1e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}_{1\Phi}} + u_2\bar{t}_{1\Phi}e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}_{1\Phi}} + u_3. \quad (80)$$

Изгибающий момент для отрезка времени $\bar{\tau}_0 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$ определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{x}^2} = \bar{x} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (g_5 + g_6\bar{t}) + g_7\bar{t} + g_8 \right) + g_9\bar{t} + g_{10}, \quad (81)$$

где

$$g_5 = \frac{-\bar{m}f_1^2g_1 + 4\bar{m}f_1g_2 - 4\bar{k}_1b_0g_1 + 2\bar{k}_2b_0f_1g_1 - 4\bar{k}_2b_0g_2}{4\bar{l}},$$

$$g_6 = \frac{-\bar{m}f_1^2g_2 - 4\bar{k}_1b_0g_2 + 4\bar{k}_2b_0f_1g_2}{4\bar{l}},$$

$$g_7 = -\frac{\bar{k}_1b_0g_3}{\bar{l}}, \quad g_8 = -\frac{\bar{k}_1b_0g_4 + \bar{k}_2b_0g_3}{\bar{l}}, \quad g_9 = \frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_0}, \quad g_{10} = \bar{m}\bar{g}.$$

Интегрируя его по \bar{x} , получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_0 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (g_5 + g_6\bar{t}) + g_7\bar{t} + g_8 \right) + \\ & + \frac{\bar{x}^2}{2} (g_9\bar{t} + g_{10}) - \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (g_5\bar{l}^2 + g_6\bar{l}^2\bar{t}) + (g_7\bar{l}^2 + 2g_9\bar{l})\bar{t} + g_8\bar{l}^2 + 2g_{10}\bar{l} \right) + \\ & + e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} \left(\frac{1}{3}\bar{l}^3 g_5 + \frac{1}{3}\bar{l}^3 g_6\bar{t} \right) + \left(\frac{1}{3}\bar{l}^3 g_7 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 g_9 \right) \bar{t} + \frac{1}{3}\bar{l}^3 g_8 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 g_{10}. \end{aligned} \quad (82)$$

Изгибающий момент для отрезка времени $\bar{\tau}_1 < \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$ определим из уравнения

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{v}^2} = \bar{x} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (v_5 + v_6\bar{t}) + v_7\bar{t} + v_8 \right) + v_9\bar{t} + v_{10}, \quad (83)$$

где

$$v_5 = \frac{-\bar{m}f_1^2v_1 + 4\bar{m}f_1v_2 - 4\bar{k}_1b_0v_1 + 2\bar{k}_2b_0f_1v_1 - 4\bar{k}_2b_0v_2}{4\bar{l}},$$

$$v_6 = \frac{-\bar{m}f_1^2v_2 - 4\bar{k}_1b_0v_2 + 4\bar{k}_2b_0f_1v_2}{4\bar{l}},$$

$$v_7 = -\frac{\bar{k}_1b_0v_3}{\bar{l}}, \quad v_8 = -\frac{\bar{k}_1b_0v_4 + \bar{k}_2b_0v_3}{\bar{l}}, \quad v_9 = -\frac{\bar{q}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}, \quad v_{10} = \bar{m}\bar{g} + \bar{q}_1 + \frac{\bar{q}_1\bar{\tau}_1}{\bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_1}.$$

Интегрируя его по \bar{x} , получим выражение для момента, справедливого при $\bar{\tau}_1 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_2$:

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (v_5 + v_6\bar{t}) + v_7\bar{t} + v_8 \right) + \\ & + \frac{\bar{x}^2}{2} (v_9\bar{t} + v_{10}) - \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} (v_5\bar{l}^2 + v_6\bar{l}^2\bar{t}) + (v_7\bar{l}^2 + 2v_9\bar{l})\bar{t} + v_8\bar{l}^2 + 2v_{10}\bar{l} \right) + \\ & + e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} \left(\frac{1}{3}\bar{l}^3 v_5 + \frac{1}{3}\bar{l}^3 v_6\bar{t} \right) + \left(\frac{1}{3}\bar{l}^3 v_7 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 v_9 \right) \bar{t} + \frac{1}{3}\bar{l}^3 v_8 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 v_{10}. \end{aligned} \quad (84)$$

С момента прекращения действия нагрузки и до остановки движения при $\bar{\tau}_2 \leq \bar{t} \leq \bar{\tau}_{1\phi}$ дифференциальное уравнение для определения момента имеет вид

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \bar{v}^2} = \bar{x} \left(e^{-\frac{f_1}{2}\bar{t}} u_5 + u_6 \right) + u_7, \quad (85)$$

где

$$u_5 = \frac{-\bar{m}f_1^2v_1 + 4\bar{m}f_1v_2 - 4\bar{k}_1b_0v_1 + 2\bar{k}_2b_0f_1v_1 - 4\bar{k}_2b_0v_2}{4\bar{l}}, \quad u_6 = -\frac{\bar{k}_1\bar{b}_0}{\bar{l}}u_3, \quad u_7 = \bar{m}g.$$

Откуда получим выражение для момента

$$\begin{aligned} \bar{M} = \frac{\bar{x}^3}{6} \left(e^{-\frac{f_1\bar{t}}{2}}u_5 + u_6 \right) + \frac{\bar{x}^2}{2}u_7 - \frac{\bar{x}}{2} \left(e^{-\frac{f_1\bar{t}}{2}}u_5\bar{l}^2 + u_6\bar{l}^2 + 2u_7\bar{l} \right) + \frac{1}{3}\bar{l}^3 u_5 e^{-\frac{f_1\bar{t}}{2}} + \\ + \frac{1}{3}\bar{l}^3 u_6 + \frac{1}{2}\bar{l}^2 u_7. \end{aligned} \quad (86)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гвоздев А. А. К расчету конструкций на действие взрывной волны // Строительная промышленность. 1943. № 1. С. 18–21.
- [2] Гвоздев А. А. Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия. М.: Стройиздат, 1949. 280 с.
- [3] Гвоздев А. А. О развитии теории расчета железобетонных конструкций в СССР / Теория расчета бетонных и железобетонных конструкций. М.: Стройиздат, 1949. С. 3–18.
- [4] Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М.: Стройиздат, 1954. 288 с.
- [5] Ерхов М. И. Теория идеальнопластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.
- [6] Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. Новосибирск: Наука, 1984. 236 с.
- [7] Шамин В. М. Расчет элементов сооружений на действие взрывных нагрузок. М.: Стройиздат, 1989. 72 с.
- [8] Немировский Ю. В., Тихонов С. В. Предельные состояния железобетонных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3. С. 134–158.
- [9] Савельев Н. Г. Расчет балок переменного сечения на упругом основании // Расчеты на прочность. М.: Машгиз, 1956. Выпуск 2.
- [10] Горбунов-Посадов М. И. Балки и плиты на упругом основании. М.: Машстройиздат, 1949.

Y. V. Nemirovsky¹, S. V. Tikhonov²

DYNAMICS OF REINFORCED CONCRETE BEAMS ON THE VISCO-ELASTIC FOUNDATION

¹*Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

²*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

Abstract. Originally, fundamentals of the theory of limit equilibrium and dynamic deformation of building structures of metal and concrete were developed by A. A. Gvozdev [1]–[3] and evolved by his followers [4]–[7]. Forming the basis for the calculation model of an ideal rigid-plastic material made it possible to determine in many cases the ultimate load of bearing capacity and upper (kinematically possible) or lower (statically valid) values for a wide class of different structures by simple methods. Thus, with reference to concrete structures the most important property of concrete to resist significantly different tension and compression was not considered. This circumstance was taken into account in work [8] for reinforced concrete beams under conditions of quasi-static loading. In building practice there are often situations when the deformation is accompanied by the resistance of the environment [9]–[10], and the problem is about the assessment of the bearing capacity of the structure and reducing the level of its damage in the presence of such resistance when exposed to dynamic loads. In the framework of classical limit equilibrium theory by A. A. Gvozdev this issue was not considered, and in this paper it is investigated for reinforced concrete beams on elastic and visco-elastic foundation.

Keywords: plasticity, multi-layered reinforced concrete beam, limit state, multimodulus behavior, deflection, bending moment, elastic foundation, viscous base, loads of explosive type.

REFERENCES

- [1] Gvozdev A. A. To calculation of designs on action of a blast wave // Building industry. 1943. № 1. P. 18–21. (in Russian).
- [2] Gvozdev A. A. Calculation of the bearing ability of designs for a method of extreme balance. M.: Stroyizdat, 1949. 280 p. (in Russian).
- [3] Gvozdev A. A. About development of the theory of calculation of reinforced concrete structures in the USSR / Theory of calculation of concrete and reinforced concrete structures. M., 1949. P. 3–18 (in Russian).
- [4] Rzhancin A. P. Calculation of constructions taking into account plastic properties of materials. M.: Stroyizdat, 1954. 288 p. (in Russian).
- [5] Erkhov M. I. Theory of ideally plastic solids and structures. M.: Nauka, 1978. – 352 p. (in Russian).

Nemirovsky Yuri Vladimirovich

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Institute of Theoretical and Applied Mechanics S. Christianovich Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia.

Tikhonov Sergey Vladimirovich

e-mail: strangcheb@mail.ru, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

[6] Komarov K. L., Nemirovsky Yu. V. Dynamics of rigid and plastic elements of designs. Novosibirsk: Nauka, 1984. 236 p. (in Russian).

[7] Shamin V. M. Calculation of elements of constructions on action of explosive loadings. M.: Stroyizdat, 1989. 72 p. (in Russian).

[8] Nemirovsky Yu. V., Tikhonov S. V. Limit conditions of reinforced concrete beams // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2016. № 3. P. 134–158 (in Russian).

[9] Savelyev N. G. Calculation of beams of variable section on the elastic base // Calculations on durability. M.: Mashgiz, 1956. Volume 2. (in Russian).

[10] Gorbunov-Posadov M. I. Beams and plates on the elastic foundation. M.: Mashstroyizdat, 1949. (in Russian).