

Е. А. Микишанина

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ УПРУГО-ПОРИСТОЙ ПЛИТЫ ПРИ НАГРУЖЕНИИ

Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается деформация тонкой упруго-пористой плиты, лежащей на упругом основании. Устанавливается связь коэффициента фильтрации среды с первым инвариантом тензора напряжений. Исследуется изменение коэффициента фильтрации плиты при чистом цилиндрическом изгибе в зависимости от закрепления продольных кромок.

Ключевые слова: упруго-пористая плита, изгиб, коэффициент фильтрации, напряжения.

УДК: 532.685

Введение. Задачи фильтрации жидкости через упруго-пористую среду рассматривались неоднократно в самых различных постановках [1], [2], в том числе через изгибающуюся под внешней нагрузкой плиту [1]. В приведенных выше работах коэффициент фильтрации среды было принято считать постоянным ввиду высоких упругих характеристик среды и при этом малых деформаций. Однако коэффициент фильтрации среды ввиду возникающих в среде упругих возмущений требует корректировки.

Известно [3], что напряженное состояние твердого тела определяется тензором напряжений σ_{ik} , который связан с тензором деформации ε_{ik} обобщенным законом Гука

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} J_1(\varepsilon) \delta_{ik} \right), \quad (1)$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, $J_1(\varepsilon) = \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – первый инвариант тензора деформаций, δ_{ik} – символ Кронекера. Первый инвариант тензора деформаций связан с тензором напряжения $J_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ соотношением [3]

$$J_1(\varepsilon) = \frac{1-2\nu}{E} J_1(\sigma).$$

Далее будет рассматриваться упруго-пористая среда. При фильтрации жидкости в упруго-пористой среде поры в зависимости от возникающих напряжений деформируются, одновременно изменяется коэффициент фильтрации. В представлении порового пространства в виде совокупности прямолинейных капиллярных трубок малого

© Микишанина Е. А., 2017

Микишанина Евгения Арифжановна

e-mail: evaeva_84@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 01.04.2017

радиуса [4], связь коэффициента фильтрации среды с возникающими в среде напряжениями может быть записана в виде

$$k' = k \left(1 + \frac{1 - 2\nu}{E} J_1(\sigma) \right). \quad (2)$$

где k , k' – коэффициенты недеформированной и деформированной сред соответственно.

Рассмотрим цилиндрический изгиб жесткой упруго-пористой плиты в форме полосы $-\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq 1$ толщиной h на упругом основании с коэффициентом жесткости C , распределенной по верхней поверхности силой $q_0(y)$ (рис. 1).

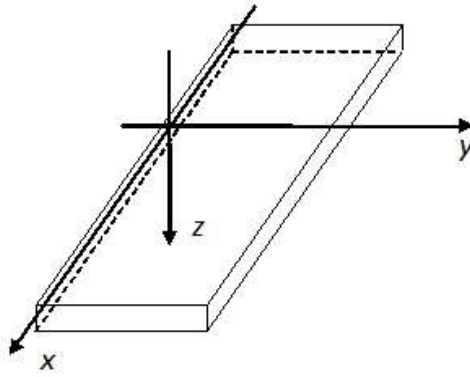


Рис. 1. Плита

Уравнение изгиба такой плиты имеет вид [1]:

$$\Delta^2 w + \frac{C}{D} w = \frac{q_0}{D}, \quad (3)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость плиты. Для упрощения введем обозначения $K^2 = C/D$, $q = q_0/D$, тогда уравнение (3) переписывается в виде

$$\Delta^2 w + K^2 w = q. \quad (4)$$

В зависимости от условий моделируемого сценария и формы плиты возможны разные условия на контуре.

Решение уравнения (4) имеет вид

$$w(y) = a_0(y) + d_1 e^{ny} \cos ny + d_2 e^{ny} \sin ny + d_3 e^{-ny} \cos ny + d_4 e^{-ny} \sin ny,$$

где $a_0(y)$ – частное решение неоднородного уравнения (4).

Исследуем изменение коэффициента фильтрации при возникновении упругих возмущений в плите от распределенной по верхней поверхности плиты нагрузки $q(y) = q = const$ в зависимости от способа закрепления кромок:

1. Продольные края плиты жестко защемлены. В случае жесткого защемления продольных кромок функция прогиба имеет вид [1]

$$w(y) = \frac{q}{K^2} + d_1 e^{ny} \cos ny + d_2 e^{ny} \sin ny + d_3 e^{-ny} \cos ny + d_4 e^{-ny} \sin ny, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= -C_1 \cdot (e^n \sin n - 1 + e^n \cos n), & d_2 &= C_1 \cdot (-e^n \sin n - 1 + e^n \cos n), \\ d_3 &= -C_1 \cdot e^n (\sin n + e^n - \cos n), & d_4 &= C_1 \cdot e^n (\sin n - e^n + \cos n), \\ C_1 &= q/K^2 (2e^n \sin n + e^{2n} - 1), & n &= \sqrt{K/2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Рассмотрим сечение плиты в плоскости Oxy . Ось сечения направлена параллельно оси y . В некоторых местах сечения происходит растяжение, в некоторых – сжатие. Вдоль длины сечения проходит так называемая «нейтральная» плоскость ($z = 0$), в точках которой не происходит ни сжатия, ни растяжения, то есть первый инвариант тензора деформаций, а, следовательно, и тензора напряжений будет равен в этих точках нулю. Пренебрегая напряжением σ_{zz} в силу его малости по сравнению с напряжениями σ_{xx} , σ_{yy} , первый инвариант тензора напряжений в соответствии с известными выражениями [3] примет вид

$$J_1(\sigma) = -\frac{Ez}{1-\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

На рис. 2 изображена функция прогиба бетонной плиты ($E = 1.7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.18$) толщиной $h = 0.1$ м на песчаном грунте с коэффициентом постели $C = 36$ МПа/м, нагрузкой на верхней поверхности $q = 2$ и жестко защемленными продольными кромками.

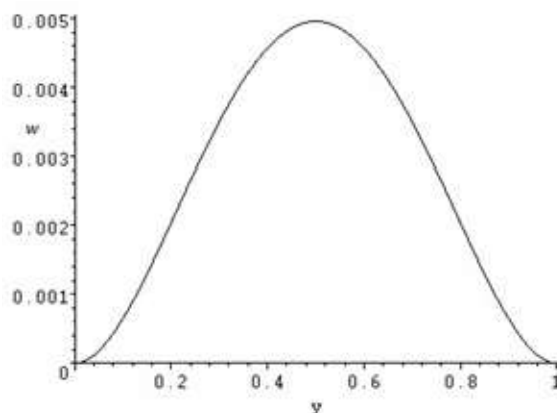


Рис. 2. Функция прогиба плиты, жестко защемленной по продольным кромкам

На рис. 3 изображены графики относительного изменения коэффициента фильтрации

$$\delta = \frac{k' - k}{k} = -\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot z \quad (7)$$

вдоль сечения при $z = -0.05$ (1), $z = -0.025$ (2), $z = 0$ (3), $z = 0.025$ (4), $z = 0.05$ (5).

2. Продольные края пластины шарнирно оперты. В случае шарнирно опертых продольных кромок функция прогиба примет вид (5), где константы определяются следующим образом:

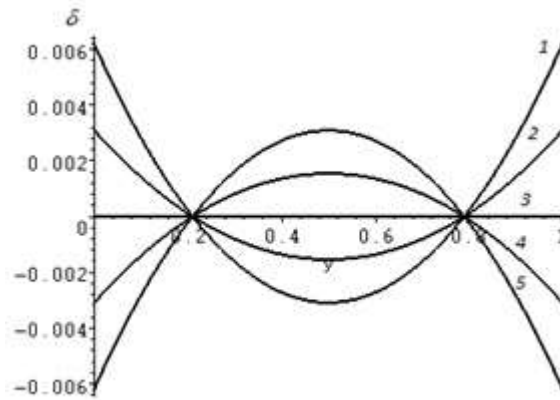


Рис. 3. Изменение коэффициента фильтрации

$$\begin{aligned}
 d_1 &= -C_2 \cdot (e^n \cos n + 1), & d_2 &= -C_2 \cdot e^n \sin n, \\
 d_3 &= -C_2 \cdot e^n (e^n + \cos n), & d_4 &= -C_2 \cdot e^n \sin n, \\
 C_2 &= q/K^2 (e^{2n} + 2e^n \cos n + 1).
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

На рис. 4 изображена функция прогиба бетонной плиты ($E = 1.7 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0.18$) толщиной $h = 0.1$ м на песчаном грунте с коэффициентом постели $C = 36$ МПа/м, нагрузкой на верхней поверхности $q = 2$ и шарнирно опертыми кромками.

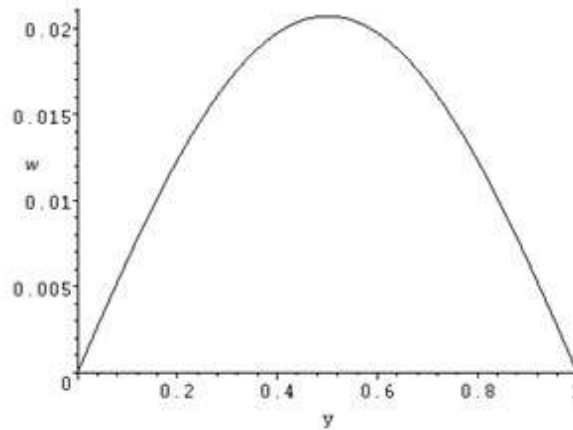


Рис. 4. Функция прогиба плиты, шарнирно опертой по продольным кромкам

На рис. 5 изображены графики относительного изменения коэффициента фильтрации (8) вдоль сечения плиты при $z = -0.05$ (1), $z = -0.025$ (2), $z = 0$ (3), $z = 0.025$ (4), $z = 0.05$ (5).

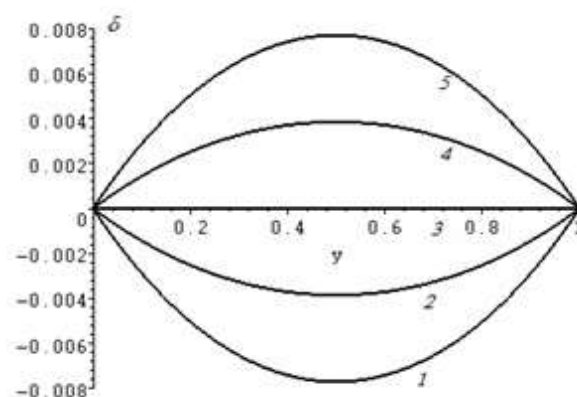


Рис. 5. Изменение коэффициента фильтрации

Учитывая скорректированный коэффициент фильтрации при чистом цилиндрическом изгибе

$$k' = k(1 + \delta(y, z)),$$

где функция $\delta(y, z)$ линейна относительно переменной z , определение давления жидкости при фильтрации через изогнутую плиту сводится к решению уравнения

$$\nabla \cdot ((1 + \delta(y, z)) \cdot \nabla P(y, z)) = 0. \quad (9)$$

Граничные условия будут формулироваться в зависимости от моделируемого сценария.

Заключение. В работе было исследовано изменение коэффициента фильтрации плиты в виде полосы постоянной толщины терпящей чистый цилиндрический изгиб под действием распределенной по верхней поверхности силы для случая жесткого защемления и шарнирного опирания продольных кромок. Изменение коэффициента фильтрации связано с возникающими в среде напряжениями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Микишанина Е. А., Терентьев А. Г. Фильтрация через упруго-пористую плиту // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4 (30). С. 33–40.
- [2] Кулагина М. Ф., Микишанина Е. А. Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22. № 3. С. 11–19.
- [3] Терентьев А. Г. Теория упругости с элементами сопротивления материалов и пластичности: учебное пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2016. 264 с.
- [4] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.;Л.: Гостехиздат, 1950. 676 с.

E. A. Mikishanina

**RESEARCH OF FILTRATION COEFFICIENT ELASTIC-POROUS PLATE AT
LOADING**

I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia

Abstract. The author describes the deformation of a thin elastic-porous plate lying on an elastic foundation, connection of the filtration coefficient of the medium with the first invariant of the stress tensor, examines the change in the coefficient of filter plate with clean cylindrical bending, depending on the fastening of the longitudinal edges.

Keywords: elastic-porous plate, bending, filtration coefficient, voltage.

REFERENCES

- [1] Mikishanina E. A., Terentiev A. G. Filtration in elastic porous plate // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. – 2016. – №4(30). – P. 33-40 (in Russian)
- [2] Kulagina M. F., Mikishanina E. A. Construction of almost periodic solutions to some systems of differential equations // Mat. Zamet. SVFU. – 2015. – T.22. – № 3. – P. 11-19.(in Russian)
- [3] Terentiev A. G. Theory of elasticity elements of strength of materials and plasticity : a tutorial. – Cheboksary : Publishing house of the Chuvash. University press, 2016. — 264 p. (in Russian)
- [4] Loitsianskii L. G. Fluid mechanics. – Moscow-Leningrad : Gostehizdat, 1950. – 676 p. (in Russian)

Mikishanina Evgeniya Arifzhanovna

e-mail: evaeva_84@mail.ru, Senior Lecturer, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.