

Ю. В. Немировский¹, А. В. Станиславович²

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

¹*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

²*Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия*

Аннотация. В статье представлена математическая модель теплопроводности многослойных круглых и кольцевых пластин, слои которых имеют различную толщину и структуру. Слои могут быть набраны как из изотропных, так и ортотропных материалов, таких как армированные волокнами либо частицами композиционные материалы, сотовые структуры с различными параметрами армирования. Предложена методика решения нестационарной задачи теплопроводности для многослойных пластин. Методика решения основана на сведении нестационарной задачи к стационарной с помощью преобразования Лапласа и построении решения полученной стационарной задачи в виде ряда методом Бубнова - Галеркина.

Ключевые слова: теплопроводность, кольцевые пластинки, круглые пластинки, сотовые конструкции, слоистые конструкции, аналитические решения.

УДК: 536.21

Введение. Исследование различных проблем теплопередачи играет важную роль при проектировании газотурбинных двигателей и установок, авиационной и ракетной техники [1], [2]. При этом помимо эффективного увеличения термического сопротивления по толщине стенок несущих и теплоотводящих конструкций требуется обеспечение достаточной прочности и жесткости при ограничении веса. Одновременное выполнение таких требований может быть реализовано в подкрепленных конструкциях коробчатого типа или в трехслойных панелях с легкими алюминиевыми или стеклопластиковыми сотовыми наполнителями. Теплопроводность таких конструкций была

© Немировский Ю. В., Станиславович А. В., 2017

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Станиславович Алексей Вячеславович

e-mail: alexey.st@bk.ru, ведущий специалист, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 11.05.2017

исследована в работах [3], [4]. В настоящее время существуют технологии производства многослойных сотовых и металлотопластовых конструкций, разделяющих жидкости или газы с различными температурами. Все составляющие конструкции подслои могут состоять из различных материалов, иметь различные структуры армирования, различную форму, плотность и взаимное расположение сот, и в связи с этим могут позволять в широких пределах управлять температурным полем в направлении нормали к поверхности многослойной конструкции. Решение такой задачи нам неизвестно и должно быть основано на относительно разумных и простых гипотезах, позволяющих построить сравнительно простую расчетную модель, обеспечивающую возможность решения соответствующих задач управления тепловым полем и оптимизационных задач.

Рассматривая слоистую в направлении оси Oz конструкцию (рисунок 1), будем считать все составляющие слои ортотропными и имеющими размеченную структуру в направлении оси Oz . Структура в каждом слое является регулярно-сотовой или однородной с “тонкими слоями армирования”, позволяет использовать модель теплопроводности из [5], [6].

Математическая модель. Пусть дана кольцевая пластина толщиной l , состоящая из N слоев постоянной толщины δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в направлении оси Oz , внутренний радиус равен \tilde{R}_1 , внешний – \tilde{R}_2 (рисунок 1). Граница между i -м и $(i + 1)$ -м слоями имеет координату l_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$). Тогда выполняются условия:

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_{(N-1)} < l_N = l.$$

Материал каждого слоя неоднороден и ортотропен по типу [5],[6]. На границе раздела i -го и $(i + 1)$ -го слоев задаются условия идеального теплового контакта [7]:

$$T^i = T^{i+1}; \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \mathbf{n}}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор единичной нормали к поверхности раздела слоев, λ_i , λ_{i+1} – коэффициенты теплопроводности i -го и $(i + 1)$ -го слоев соответственно в направлении нормали \mathbf{n} .

Будем считать, что распределение температуры не зависит от угловой координаты (осесимметричный случай).

В случае неидеального теплового контакта (контактные поверхности разделены тонкой прослойкой) обычно вводится понятие контактного сопротивления R . Равенство тепловых потоков здесь имеет место, но появляется пропорциональная им разность между двумя поверхностными температурами [8]:

$$\lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} = \frac{1}{R} \left(T^{i+1}(x, y, z, t) \Big|_{S_{i+1}} - T^i(x, y, z, t) \Big|_{S_i} \right), \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_i} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{i+1}}. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор внешней нормали к поверхности S_i относительно i -го слоя.

Решение задачи нестационарной теплопроводности многослойных круговых пластин, состоящих из N слоев, разнородных по геометрии и тепловым свойствам материалов, при различных вариантах теплообмена с окружающей средой, совершенном или несовершенном контакте на поверхности раздела слоев сводится к решению системы уравнений:

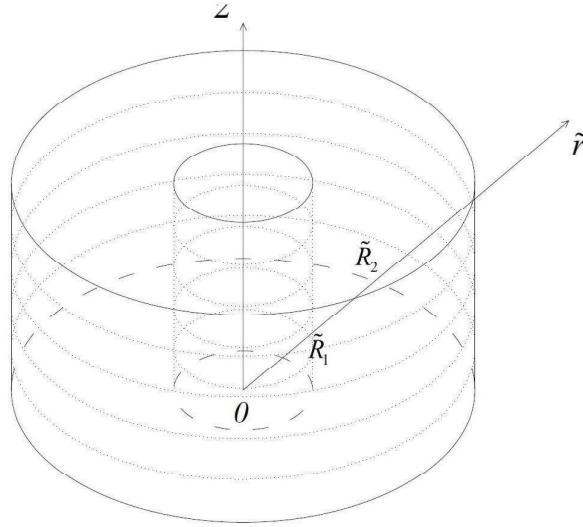


Рис. 1. Многослойная кольцевая пластина

$$\rho_i C_i \frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\lambda_r^i(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\lambda_z^i(\tilde{z}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \right) \right] = \tilde{f}_i(\tilde{r}, \tilde{z}, t), \quad (3)$$

$$t > 0, \quad \tilde{R}_1 < \tilde{r} < \tilde{R}_2, \quad l_{z(i-1)} < \tilde{z} < l_{zi} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь ρ_i , C_i – приведенная плотность и объемная теплоемкость i -го слоя, λ_r^i , λ_z^i – коэффициенты теплопроводности вдоль осей $O\tilde{r}$ и $O\tilde{z}$ соответственно, в общем случае зависящие от координат [6].

Дополним систему (2) следующими начальными и граничными условиями [8]:

$$T^i(\tilde{r}, \tilde{z}, t)|_{t=0} = \Phi_{oi}(\tilde{r}, \tilde{z}) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (4)$$

$$\beta_{11}^r \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1} - \beta_{21}^r T^i \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1} = -\phi_1^r(t), \quad \beta_{12}^r \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_2} - \beta_{22}^r T^i \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_2} = -\phi_2^r(t),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{\tilde{z}=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{\tilde{z}=l} = -\phi_2^z(t). \quad (5)$$

При $\beta_{1j}^k = 0$, $\beta_{2j}^k = 1$ получим первую краевую задачу.

При $\beta_{1j}^k = \lambda$, $\beta_{2j}^k = 0$ получим вторую краевую задачу.

При $\beta_{1j}^k = -\lambda$, $\beta_{2j}^k = \alpha$, $\phi_j^k(t) = \alpha T_{\text{ср}}^j$ получим третью краевую задачу. Здесь α – коэффициент теплопередачи, $T_{\text{ср}}^j$ – температура окружающей среды при конвективном теплообмене, $j = 1, 2$, $k = \text{“}r\text{”}$ или $\text{“}z\text{”}$.

Условия сопряжения (предполагается идеальный тепловой контакт) (1) записываются в виде:

$$T^i \Big|_{\tilde{z}=l_i} = T^{i+1} \Big|_{\tilde{z}=l_i},$$

$$\lambda_z^i(l_i) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_i} = \lambda_z^{i+1}(l_i) \frac{\partial T^{i+1}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (6)$$

Введем безразмерные переменные [8]:

$$r = \frac{\tilde{r}}{\tilde{R}_2}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{l}, \quad w_i = \frac{l_i}{l}, \quad \omega_i = \frac{\delta_i}{l}, \quad R_1 = \frac{\tilde{R}_1}{\tilde{R}_2}, \quad R_2 = \frac{\tilde{R}_2}{\tilde{R}_2} = 1. \quad (7)$$

Обозначим

$$k_i(r) = \frac{\lambda_r^i(r)}{\rho_i C_i}, \quad a_i(z) = \frac{\lambda_z^i(z)}{\rho_i C_i}, \quad f_i(r, z, t) = \frac{1}{\rho_i C_i} \tilde{f}(r, z, t). \quad (8)$$

Тогда соотношения (2) – (6) придут к виду:

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_i(r) r \frac{\partial T^i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_i(z) \frac{\partial T^i}{\partial z} \right) \right] = f_i(r, z, t), \quad (9)$$

$$t > 0, \quad R_1 < r < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

$$T^i(r, z, t) \Big|_{t=0} = \Phi_{oi}(r, z) \quad (i = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

$$\beta_{11}^r \frac{\partial T^i}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - \beta_{21}^r T^i \Big|_{r=R_1} = -\phi_1^r(t), \quad \beta_{12}^r \frac{\partial T^i}{\partial x} \Big|_{r=1} - \beta_{22}^r T^i \Big|_{r=1} = -\phi_2^r(t),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{z=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial z} \Big|_{z=1} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{z=1} = -\phi_2^z(t). \quad (11)$$

$$T^i \Big|_{z=w_i} = T^{i+1} \Big|_{z=w_i},$$

$$\lambda_z^i(w_i) \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=w_i} = \lambda_z^{i+1}(w_i) \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (12)$$

Рассмотрим теперь случай сплошной круглой пластинки.

Пусть дана круглая пластина толщиной l , состоящая из N слоев постоянной толщиной δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$) в направлении оси $O\tilde{z}$, радиусом \tilde{R} (рисунок 2). Граница между i -м и $(i+1)$ -м слоями имеет координату l_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$). Тогда выполняются соотношения:

$$0 = l_0 < l_1 < l_2 < \dots < l_{(N-1)} < l_N = l.$$

Материал каждого слоя неоднороден и ортотропен по типу [5], [6]. На границе раздела i -го и $(i+1)$ -го слоев задаются условия идеального теплового контакта (1).

Так же, как в случае кольцевой пластинки, будем считать, что распределение температуры не зависит от угловой координаты.

Решение задачи нестационарной теплопроводности многослойных круглых пластин, состоящих из N слоев, разнородных по геометрии и тепловым свойствам материалов, при различных вариантах теплообмена с окружающей средой, совершенном или несовершенном контакте на поверхности раздела слоев сводится к решению системы уравнений:

$$\rho_i C_i \frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\lambda_r^i(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\lambda_z^i(\tilde{z}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \right) \right] = \tilde{f}_i(\tilde{r}, \tilde{z}, t),$$

$$t > 0, \quad 0 < \tilde{r} < \tilde{R}, \quad l_{z(i-1)} < \tilde{z} < l_{zi} \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь ρ_i, C_i – приведенная плотность и объемная теплоемкость i -го слоя, λ_r^i, λ_z^i – коэффициенты теплопроводности вдоль осей $O\tilde{r}$ и $O\tilde{z}$ соответственно, в общем случае зависящие от координат [6]. Уравнение (8) отличается от (2) лишь граничными условиями.

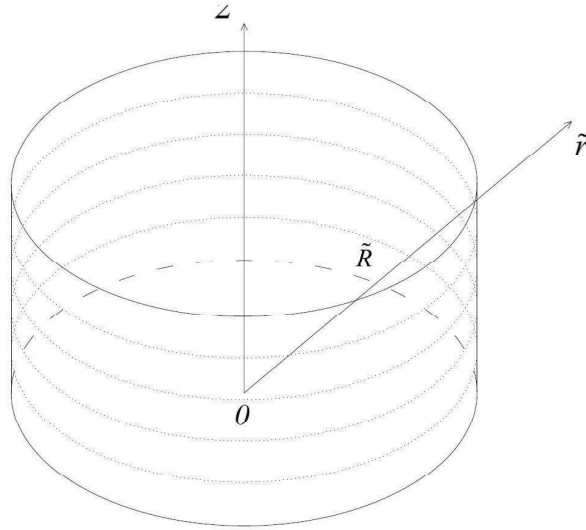


Рис. 2. Многослойная круглая пластина

В случае, когда материал i -го слоя имеет радиальное или круговое армирование, в центр круговой пластинки вставляется шайба из изотропного материала (рисунок 3). Это делается для того, чтобы исключить особенность в виде бесконечной плотности армирования при $r \rightarrow 0$. Таким образом, уравнение (8) распадается на два:

$$\tilde{\rho} \tilde{C} \frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial t} - \left[\tilde{\lambda}_r \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}^i}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial \tilde{r}} \right) + \tilde{\lambda}_z \frac{\partial^2 \tilde{T}^i}{\partial \tilde{z}^2} \right] = \tilde{f}_i(\tilde{r}, \tilde{z}, t),$$

$$t > 0, \quad 0 < \tilde{r} < \tilde{R}_1, \quad 0 < \tilde{z} < l_z,$$

$$\rho_i C_i \frac{\partial T^i}{\partial t} - \left[\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\lambda_r^i(\tilde{r}) \tilde{r} \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\lambda_z^i(\tilde{z}) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{z}} \right) \right] = \tilde{f}_i(\tilde{r}, \tilde{z}, t),$$

$$t > 0, \quad \tilde{R}_1 < \tilde{r} < \tilde{R}, \quad l_{i-1} < \tilde{z} < l_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

На границе $\tilde{r} = \tilde{R}_1$ ставится условие идеального контакта по температуре (1):

$$T^i|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1} = \tilde{T}^i|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1},$$

$$\lambda_r^i(\tilde{R}_1) \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1} = \tilde{\lambda}_r \frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}_1}.$$

Здесь $\tilde{\rho}$, \tilde{C} – приведенная плотность и объемная теплоемкость материала шайбы, $\tilde{\lambda}_r^i$, $\tilde{\lambda}_z^i$ – коэффициенты теплопроводности вдоль осей $O\tilde{r}$ и $O\tilde{z}$ соответственно.

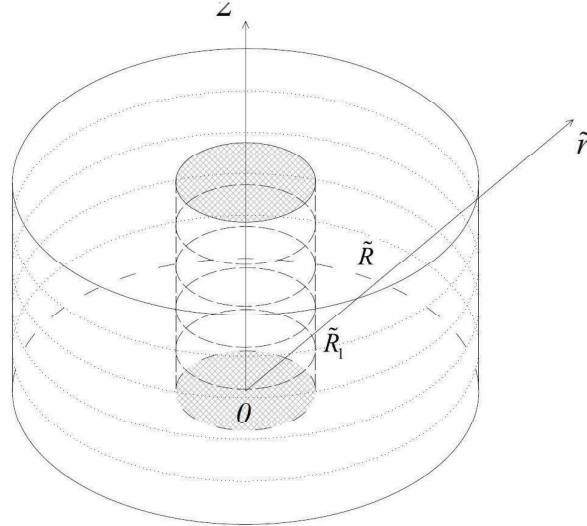


Рис. 3. Многослойная круглая составная пластина

Дополним систему (14) – (15) следующими начальными и граничными условиями, аналогичными (3) – (5) [8]:

$$T^i(\tilde{r}, \tilde{z}, t)|_{t=0} = \Phi_{oi}(\tilde{r}, \tilde{z}), \quad \tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{z}, t)|_{t=0} = \Phi_{oi}(\tilde{r}, \tilde{z}) \quad (16)$$

$$\left| \tilde{T}(\tilde{r}, \tilde{z}, t) \right|_{\tilde{r}=0} < \infty, \quad \beta_{11}^r \frac{\partial T^i}{\partial \tilde{r}} \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} - \beta_{21}^r T^i \Big|_{\tilde{r}=\tilde{R}} = -\phi_1^r(t),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} - \beta_{21}^z T^1 \Big|_{\tilde{z}=0} = -\phi_1^z(t), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l} - \beta_{22}^z T^N \Big|_{\tilde{z}=l} = -\phi_2^z(t),$$

$$\tilde{\beta}_{11}^z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=0} - \tilde{\beta}_{21}^z \tilde{T} \Big|_{\tilde{z}=0} = -\phi_1^z(t), \quad \tilde{\beta}_{12}^z \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=l} - \tilde{\beta}_{22}^z \tilde{T} \Big|_{\tilde{z}=l} = -\phi_2^z(t). \quad (17)$$

Условия сопряжения между слоями в направлении оси $O\tilde{z}$ (1) записываются в виде (6).

Методика решения. Рассмотрим случай кольцевой пластинки. Положим [8]:

$$\bar{T}(r, z, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} T(r, z, t) dt. \quad (18)$$

Применив преобразование Лапласа (10) к задаче (6) – (11), получим:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_i(r) r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_i(z) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \right) - p \bar{T}^i(r, z, p) = \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p), \quad (19)$$

$$t > 0, \quad R_1 < r < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где

$$\bar{\Phi}_{1i}(r, z, p) = -(\Phi_{0i}(r, z) + \bar{f}_i(r, z, p)).$$

Начальные и граничные условия (7) – (11) принимают вид:

$$\beta_{11}^r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - \beta_{21}^r \bar{T}^i \Big|_{r=R_1} = -\bar{\phi}_1^r(p), \quad \beta_{12}^r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial x} \Big|_{r=1} - \beta_{22}^r \bar{T}^i \Big|_{r=1} = -\bar{\phi}_2^r(p),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

$$\beta_{11}^z \frac{\partial \bar{T}^1}{\partial z} \Big|_{z=0} - \beta_{21}^z \bar{T}^1 \Big|_{z=0} = -\bar{\phi}_1^z(p), \quad \beta_{12}^z \frac{\partial \bar{T}^N}{\partial z} \Big|_{z=1} - \beta_{22}^z \bar{T}^N \Big|_{z=1} = -\bar{\phi}_2^z(p). \quad (20)$$

Здесь $f_i(x, y, z, t) \rightarrow \bar{f}_i(x, y, z, p)$, $\phi_j^k(t) \rightarrow \bar{\phi}_j^k(p)$ ($k = "r"$ или $"z"$).

Условия сопряжения (12) приходят к виду:

$$\bar{T}^i \Big|_{z=w_i} = \bar{T}^{i+1} \Big|_{z=w_i},$$

$$\lambda_z^i(w_i) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \Big|_{z=w_i} = \lambda_z^{i+1}(w_i) \frac{\partial \bar{T}^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=w_i} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1). \quad (21)$$

Обозначим

$$L[\bar{T}^i(r, z, p)] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_i(r) r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(a_i(z) \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} \right) - p \bar{T}^i(r, z, p). \quad (22)$$

Тогда выражение (11) можно записать в виде:

$$L[\bar{T}^i(r, z, p)] - \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p) = 0. \quad (23)$$

Решение задачи (11)–(21) будем искать с помощью метода Бубнова – Галеркина в виде ряда [9], [10], [11]:

$$\bar{T}^i(r, z, p) = \phi_0(r, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m(p) \phi_m(r, z). \quad (24)$$

Здесь $\phi_m(r, z)$, – какая-то полная система линейно независимых функций, дважды непрерывно дифференцируемая в

$$S = \{R_1 \leq r \leq 1; \quad 0 \leq z \leq 1\},$$

удовлетворяющая однородным краевым условиям, $\phi_0(r, z)$ – какая-то функция, удовлетворяющая неоднородным краевым условиям (20)–(21), $A_m(p)$ – произвольные коэффициенты. Тогда в общем случае ряд (14) не удовлетворяет дифференциальному уравнению (13):

$$\begin{aligned}
& L [\bar{T}^i (r, z, p)] - \Phi_{1i} (r, z, p) = \\
& = L \left[\phi_0 (r, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (p) \phi_m (r, z) \right] - \Phi_{1i} (r, z, p) = \\
& = L [\phi_0 (r, z)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (p) L [\phi_m (r, z)] - \Phi_{1i} (r, z, p) = F (r, z, p) \neq 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Очевидно, что невязка полученного решения существенно зависит от значений неопределенных коэффициентов $A_m (p)$. Потребуем выполнения условий ортогональности функции $F (r, z, p)$ полной системе линейно независимых функций $\phi_k (r, z)$:

$$\begin{aligned}
& \iint_{(S_i)} F (r, z, p) \phi_k^i (r, z) dr dz = \\
& = \iint_{(S_i)} \left[L [\phi_0 (r, z)] + \sum_{m=1}^{\infty} A_m^i (p) L [\phi_m^i (r, z)] - \Phi_{1i} (r, z, p) \right] \times \phi_k^i (r, z) dr dz = \\
& = \sum_{m=1}^{\infty} B_{mk}^i A_m^i - C_k^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N; \quad k = 1, 2, 3 \dots).
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
B_{mk}^i &= \iint_{(S_i)} L [\phi_m^i (r, z)] \phi_k^i (r, z) dr dz, \\
C_k^i &= \iint_{(S_i)} [\Phi_{1i} (r, z, p) - \phi_0 (r, z)] \phi_k^i (r, z) dr dz.
\end{aligned}$$

Таким образом получена система алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_{mk}^i A_m^i = C_k^i \quad (i = 1, 2, \dots, N; \quad k = 1, 2, 3 \dots)$$

для определения коэффициентов A_m^i , таких что функции $F^i (r, z, p)$ ортогональны системе функций $\phi_k^i (r, z)$ и, следовательно, функции $F^i (r, z, p)$ тождественно равны нулю:

$$F (x, y, z, p) = L [T^i (x, y, z, p)] - \Phi_{1i} (x, y, z, p) \equiv 0.$$

Так как система алгебраических уравнений в общем случае является полной бесконечной системой, решение которой в общем виде возможно лишь при определенных соотношениях между коэффициентами системы, то на практике обычно ограничиваются конечным числом членов ряда, получая таким образом приближенное решение.

Более простое решение получается, если системы функций $L [\phi_m^i (x, y, z)]$ и $\phi_k^i (x, y, z)$ взаимно ортогональны в области интегрирования. Тогда метод Бубнова – Галеркина приводит к системе независимых алгебраических уравнений для каждого неизвестного коэффициента A_m^i :

$$A_m^i = \frac{C_m^i}{B_{mm}^i}. \tag{27}$$

Таким образом, ряд (14) задает решение задачи (2) – (5) в изображениях.

В случае, когда толщина стенки мала по сравнению с ее размерами, задачу можно свести к одномерной, аппроксимировав распределение температуры вдоль оси Oz какой-либо функцией заданного вида (например, квадратичным полиномом).

Положим,

$$\bar{T}^i(r, z, p) = \bar{F}_1^i(r, p) F_2^i(z),$$

где

$$F_2^i(z) = z^2 + b_i z + c_i. \quad (28)$$

Коэффициенты b_i, c_i найдем из второго из соотношений (20) и условий сопряжения (21). Таким образом, с этого момента функции $F_2^i(z)$ будем считать известными. Задача (11) – (21) сводится к следующему виду:

$$F_2^i(z) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(k_i(r) r \frac{d\bar{F}_1^i}{dr} \right) + \bar{F}_1^i \frac{d}{dz} \left(a_i(z) \frac{dF_2^i}{dz} \right) - p \bar{F}_1^i(r, p) F_2^i(z) = \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p), \quad (29)$$

$$t > 0, \quad R_1 < r < 1, \quad w_{i-1} < z < w_i \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

$$\beta_{11}^r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - \beta_{21}^r \bar{T}^i \Big|_{r=R_1} = -\bar{\phi}_1^r(p), \quad \beta_{12}^r \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial r} \Big|_{r=1} - \beta_{22}^r \bar{T}^i \Big|_{r=1} = -\bar{\phi}_2^r(p),$$

$$(i = 1, 2, \dots, N). \quad (30)$$

Повторяя рассуждения (12)–(17), получим решение в виде ряда вида (14) для задачи (19) – (30). Отметим, что если

$$k_i(r) = const, \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

то уравнения (19) сводятся к виду

$$\frac{\partial \bar{F}_1^i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{F}_1^i}{\partial r} + \frac{1}{k_i F_2^i} \left[\frac{d}{dz} \left(a_i(z) \frac{dF_2^i}{dz} \right) - p F_2^i \right] \bar{F}_1^i = \frac{1}{k_i F_2^i} \bar{\Phi}_{1i} \quad (31)$$

и представляют собой в зависимости от знака выражения

$$Q_i = \frac{1}{k_i F_2^i} \left[\frac{d}{dz} \left(a_i(z) \frac{dF_2^i}{dz} \right) - p F_2^i \right]$$

либо неоднородное уравнение Бесселя нулевого порядка ($Q > 0$), либо неоднородное модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка ($Q < 0$) [12]. Тогда решение задачи (20) можно записать в виде

$$\bar{F}_1^i(r, z, p) = A_i(z, p) J_0(r\sqrt{Q_i}) + B_i(z, p) Y_0(r\sqrt{Q_i}) + \bar{\Psi}_{1i}(r, z, p), \quad (32)$$

когда $Q > 0$, или

$$\bar{F}_1^i(r, z, p) = A_i(z, p) I_0(r\sqrt{|Q_i|}) + B_i(z, p) K_0(r\sqrt{|Q_i|}) + \bar{\Psi}_{2i}(r, z, p), \quad (33)$$

когда $Q < 0$. Здесь J_0, Y_0 – функции Бесселя первого и второго рода, I_0, K_0 – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка. $A_i(z, p), B_i(z, p)$ – произвольные коэффициенты, определяемые из граничных условий (30). $\bar{\Psi}_{1i}(r, z, p), \bar{\Psi}_{2i}(r, z, p)$ – некоторые частные решения обыкновенного и модифицированного уравнения Бесселя, в общем случае имеющие вид

$$\bar{\Psi}_{1i}(r, z, p) = \sqrt{Q_i} J_0(r\sqrt{Q_i}) \int [r Y_0(r\sqrt{Q_i}) \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p)] dr - \sqrt{Q_i} Y_0(r\sqrt{Q_i}) \int [r J_0(r\sqrt{Q_i}) \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p)] dr, \quad (34)$$

$$\bar{\Psi}_{2i}(r, z, p) = \sqrt{|Q_i|} I_0(r\sqrt{|Q_i|}) \int [r K_0(r\sqrt{|Q_i|}) \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p)] dr - \sqrt{|Q_i|} K_0(r\sqrt{|Q_i|}) \int [r I_0(r\sqrt{|Q_i|}) \bar{\Phi}_{1i}(r, z, p)] dr. \quad (35)$$

Задача (8)–(15) решается аналогичным образом.

Таким образом, ряды вида (14) представляют собой решение задачи (6)–(12) в изображениях. Для обратного перехода к оригиналам можно воспользоваться одним из справочников по преобразованию Лапласа, например [13], [14], [15].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Авдудевский В. С., Галицейский Б. М., Глебов Г. А. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
- [2] Иванов В. Л., Леонтьев А. И., Манушин Э. А., Осипов М. И. Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок: учебник для вузов. 2-е изд., стереотип. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 592 с.
- [3] Марченко В. М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 298 с.
- [4] Поварницын М. С. Исследование температурного поля в трехслойной пластине с сотовым наполнителем при несимметричном нагреве // Инженерно-физический журнал. 1961. №10. Т. 4. С. 64–70.
- [5] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Влияние формы и расположения армирующих элементов на тепловые свойства композитов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. 2015. № 4 (16). С. 3–24.
- [6] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Теплопроводность пакета полиармированных слоев // Вестник КемГУ. 2015. № 4 (64). Т. 3. С. 177–183.
- [7] Коляно Ю. М., Ломакин В. А., Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
- [8] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
- [9] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений: в 2 т. Т. 2. температурное поле. М.: ГИФМЛ, 1959. 620 с.
- [10] Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев: Техника, 1967. 213 с.
- [11] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 512 с.
- [12] Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Часть первая. М.: Иностран. Лит., 1949. 799 с.
- [13] Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
- [14] Егер Д., Карслоу Х. Операционные методы в прикладной математике. М.: Издательство иностранной литературы, 1948. 290 с.

[15] Диткин В. А., Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. М.: Государственное издательство технико-технической литературы, 1951. 255 с.

Yu. V. Nemirovskii¹, A. V. Stanislavovich²

THERMAL CONDUCTIVITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC ANNULAR CIRCULAR AND CIRCULAR PLATES

¹*S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia*

Abstract. The paper presents mathematical model of heat conduction of multilayer annular circular and circular plates. Each layer of plate which is under consideration is either isotropic material or fiber composite or dispersion-strengthened composite or honeycomb composite structure. Method for solving unsteady-state heat conduction equation for multilayer annular circular or circular plate is proposed in the article. Proposed method is based on reduction of unsteady-state problem to steady-state heat conduction problem using Laplace transformation. Then steady-state heat conduction problem is solved using Galerkin – Bubnov method.

Keywords: heat conduction, annular circular plates, circular plates, honeycomb structures, fiber composites, analytical solutions.

REFERENCES

- [1] Avduevskii V. S., Galitseiskii B. M., Glebov G. A. Basics of heat transfer in aviation and aerospace machinery. 2nd edition. M.: Mashinostroenie, 1992. – 528 p.
- [2] Ivanov V. L., Leontev A. I., Manushin E. A., Osipov M. I. Heat exchangers and gas-turbine systems and integrated plants cooling systems: textbook for high school. 2nd edition. M.: Publishing house of Baumans MSTU, 2004. 592 p.
- [3] Marchenko V. M. Temperature fields and stresses in aircraft structures. M.: Mashinostroenie, 1965. 592 p.
- [4] Povarnitsyn M. S. Research of temperature field in three-layer honeycomb plate under nonsymmetrical heating // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 1961. № 10. V. 4. P. 64–70.
- [5] Nemirovskii Y. V., Stanislavovich A. V. The influence of shape and arrangement of rein-forcing elements on the thermal properties of rein-foeced materials // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. № 4 (16). P. 3–24.
- [6] Nemirovskii Y. V., Stanislavovich A. V. Thermal conductivity of the packet of multidirectional reinforced layers // Bulletin of KemSU. 2015. № 4 (64). V. 3. P. 177–183.
- [7] Koliano Y. M., Lomakin V. A., Podstrigach I. S. Thermoelasticity bodies non-homogeneous structures. M.: Mir, 1984. 368 p.

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Associate, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

Stanislavovich Alexey Viacheslavovich, Leading specialist at Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

- [8] Kartashov E. M. Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids. M.: Vyssh. Shkola, 2001. 550 p.
- [9] Berezin I. S., Zhidkov N. P. Computing methods: Vol. 2. M.: GIFML, 1959. 620 p.
- [10] Rvachev V. L. Geometric applications of logic algebra. Kiev: Technika, 1967. 213 p.
- [11] Mikhlin S. G. Variational methods in mathematical physics. 2nd edition. M.: Nauka, 1970. 512 p.
- [12] Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions. M.: Inostr. lit., 1949. 799 p.
- [13] Dech G. A guide to the practical application of the Laplace transform and the Z-transformation. M.: Nauka, 1971. 288 p.
- [14] Karslow G., Eger D. Variational methods in applied mathematics. M.: Foreign literature publishing house, 1948. 290 p.
- [15] Ditkin V. A. Kuznetsov P. I. Operator calculus handbook. M.: State Publishing House of Technical and Technical Literature, 1951. 255 p.