Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2 (32). С. 98–??

Г. Е. Чекмарев

СООТНОШЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ ИЗ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Одним из основных свойств металлов является упрочнение, характеризующее влияние пластического деформирования на механическое поведение среды. Исследованию методом возмущений осесимметрической задачи деформирования тел из упрочняющегося материала и посвящена данная работа. В ней приведен алгоритм определения первого приближения в задаче пластического деформирования прута из упрочняющегося материала.

Ключевые слова: пластичность, деформация, линеаризация, упрочнение.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим вязкопластическое течение жесткого пространственного тела, изготовленного из однородного изотропного материала.

По аналогии с работами [1,2] введем тензор $S_{ij} = \sigma_{ij} - \mu\varepsilon_{ij}$, где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ - компоненты тензоров напряжения и скорости деформаций соответственно, μ - коэффициент вязкости. Для изотропного материала главные направления тензоров σ_{ij} и ε_{ij} совпадают. В главных направлениях условие пластичности представимо в виде

$$S_1 = S_2, \quad S_3 = S_1 + 2k\,.$$

Условие не сжимаемости материала запишется в виде

$$\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3 = 0.$$

Так как

$$\varepsilon = 0, \quad \sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3, \quad 3\sigma - 3\mu\varepsilon = 3S_1 + 2k,$$

то получим следующее выражение

$$S_1 = \sigma - 2k/3.$$

Представим тензор S_{ij} в виде суммы двух тензоров $S_1 \cdot \delta_{ij}$ и $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$, где δ_{ij} - символ Кронекера. В главных направлениях ранг матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ равен

Чекмарев Георгий Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.05.2017

единице. Преобразование тензора при переходе от одной декартовой системы координат к другой можно представить в матричной форме как произведение матрицы тензора и двух невырожденных матриц

$$S* = A^{-1} S\, A, \quad \text{где} \quad A = (\alpha_{ij}), \quad x_i* = \alpha_{ij} x_j, \quad |A| = 1.$$

Из линейной алгебры [3] известно, что при умножении некоторой матрицы слева или справа на невырожденную матрицу ранг исходной матрицы не меняется. Отсюда получим равенство ранга матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ единице в любой декартовой системе координат. Следовательно, все миноры второго порядка матрицы тензора $S_{ij} - S_1 \cdot \delta_{ij}$ будут равны нулю. С учетом симметрии тензора получим шесть соотношений

$$\begin{aligned}
&(\sigma_x - \sigma - \mu\varepsilon_x + 2k/3)(\sigma_y - \sigma - \mu\varepsilon_y + 2k/3) = (\tau_{xy} - \mu\varepsilon_{xy})^2,\\
&(\sigma_y - \sigma - \mu\varepsilon_y + 2k/3)(\sigma_z - \sigma - \mu\varepsilon_z + 2k/3) = (\tau_{yz} - \mu\varepsilon_{yz})^2,\\
&(\sigma_z - \sigma - \mu\varepsilon_z + 2k/3)(\sigma_x - \sigma - \mu\varepsilon_x + 2k/3) = (\tau_{xz} - \mu\varepsilon_{xz})^2,\\
&(\sigma_x - \sigma - \mu\varepsilon_x + 2k/3)(\tau_{yz} - \mu\varepsilon_{yz}) = (\tau_{xy} - \mu\varepsilon_{xy})(\tau_{xz} - \mu\varepsilon_{xz}),\\
&(\sigma_y - \sigma - \mu\varepsilon_y + 2k/3)(\tau_{xz} - \mu\varepsilon_{xz}) = (\tau_{xy} - \mu\varepsilon_{xy})(\tau_{yz} - \mu\varepsilon_{yz}),\\
&(\sigma_z - \sigma - \mu\varepsilon_z + 2k/3)(\tau_{xy} - \mu\varepsilon_{xy}) = (\tau_{xz} - \mu\varepsilon_{xz})(\tau_{yz} - \mu\varepsilon_{yz}),
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3 = 0, \quad \sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3.$$

С другой стороны, из равенства ранга симметричной матрицы единице следует, что строки и столбцы рассматриваемой матрицы отличаются друг от друга только коэффициентом.

Без ограничения общности предположим $T_{11} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \alpha T_{11} & \alpha T_{12} & \alpha T_{13} \\ \beta T_{11} & \beta T_{12} & \beta T_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & \alpha T_{11} & \beta T_{11} \\ \alpha T_{11} & \alpha^2 T_{11} & \alpha\beta T_{11} \\ \beta T_{11} & \beta\alpha T_{11} & \beta^2 T_{11} \end{pmatrix}, \quad (T_{ij} = T_{ji}).$$

Коэффициенты α, β определим через элементы первого столбца

$$\alpha = \frac{T_{21}}{T_{11}}, \quad \beta = \frac{T_{31}}{T_{11}}.$$

Из условий

$$T_{22} = \alpha^2 T_{11}, \quad T_{33} = \beta^2 T_{11}, \quad T_{23} = \alpha\beta T_{11},$$

получим

$$T_{22} = \left(\frac{T_{21}}{T_{11}}\right)^2 T_{11}, \quad T_{33} = \left(\frac{T_{31}}{T_{11}}\right)^2 T_{11}, \quad T_{23} = \frac{T_{21}}{T_{11}} \frac{T_{31}}{T_{11}} T_{11}.$$

В результате условие равенства ранга симметричной матрицы T единице эквивалентно трем условиям

$$T_{11} T_{22} = T_{21}^2, \quad T_{11} T_{33} = T_{13}^2, \quad T_{23} T_{11} = T_{12} T_{13} \quad T_{11} \neq 0.$$

Следовательно, из шести условий (1) линейно независимыми являются только три соотношения

$$\begin{gathered}
(\sigma_y - \mu\, \varepsilon_y - \sigma + 2k/3)(\sigma_z - \mu\, \varepsilon_z - \sigma + 2k/3) = (\tau_{yz} - \mu\, \varepsilon e_{yz})^2,\\
(\sigma_x - \mu\, \varepsilon_x - \sigma + 2k/3)(\sigma_z - \mu\, \varepsilon_z - \sigma + 2k/3) = (\tau_{xz} - \mu\, \varepsilon_{xz})^2,\\
(\sigma_z - \mu\, \varepsilon_z - \sigma + 2k/3)(\tau_{xy} - \mu\, \varepsilon_{xy}) = (\tau_{xz} - \mu\, \varepsilon_{xz})(\tau_{yz} - \mu\, \varepsilon_{yz}),\\
\sigma_z - \mu\, \varepsilon_z - \sigma + 2k/3 \neq 0, \quad (xyz).
\end{gathered}$$

2. Приведем решение задачи о вязкопластическом течении жесткого изотропного бруса переменного прямоугольного поперечного сечения под действием растягивающих сил вдоль оси бруса.

Уравнения боковых граней бруса имеют вид

$$x = \pm\,[h_1 + f_1(y,z)], \quad y = \pm\,[h_2 + f_2(x,z)], \text{где} \qquad f_1(y,z) \langle\langle\, h_1, \;\; f_2(x,z) \langle\langle\, h_2.$$

Решение задачи ищется в виде

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij} = \sigma^0_{ij} + \sigma_{ij}*, \; \varepsilon_{ij} = \varepsilon^0_{ij} + \varepsilon_{ij}*,\\
u = u^0 + u*, \;\; v = v^0 + v*, \;\; w = w^0 + w*.
\end{gathered}$$

В качестве исходного состояния принято однородное напряженно-деформированное состояние

$$\begin{gathered}
\sigma^0_x = 0, \; \sigma^0_y = 0, \; \sigma^0_z = k + \tfrac{3}{2}\mu\varepsilon^0_3, \;\; \tau^0_{xy} = \tau^0_{yz} = \tau^0_{xz} = 0,\\
\varepsilon^0_z = \varepsilon^0_3, \quad \varepsilon^0_x = \varepsilon^0_y = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^0_3, \quad \varepsilon^0_{xy} = \varepsilon^0_{yz} = \varepsilon^0_{xz} = 0.
\end{gathered}$$

Компоненты возмущения получат следующий вид

$$\begin{gathered}
\sigma^*_x - \sigma^* - \mu\varepsilon^*_x = 0, \quad \sigma^*_y - \sigma^* - \mu\varepsilon^*_y = 0, \quad \varepsilon^*_x + \varepsilon^*_y + \varepsilon^*_z = 0,\\
\tau^*_{xy} - \mu\varepsilon^*_{xy} = 0, \quad \sigma^*_x - \sigma^*_y - \tfrac{2}{3}(\sigma^*_x + \sigma^*_y + \sigma^*_z) - \mu(\varepsilon^*_x + \varepsilon^*_y) = 0,\\
\tfrac{1}{3}(\sigma^*_x + \sigma^*_y) - \tfrac{2}{3}\sigma^*_z + \mu\varepsilon^*_z = 0, \quad \tfrac{1}{3}(\sigma^*_x + \sigma^*_y + \sigma^*_z) - \sigma^*_z + \mu\varepsilon^*_z = 0,\\
\sigma^*_z - \sigma^* - \mu\varepsilon^*_z = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Для компонент τ^*_{xy}, ε^*_{xy}, τ^*_{yz}, ε^*_{yz}, τ^*_{xz}, ε^*_{xz} из условия изотропии выполняются следующие соотношения

$$\begin{gathered}
\tau^*_{xy} = \mu\varepsilon^*_{xy}, \quad \tau^*_{yz} = 2a\,\varepsilon^*_{yz}, \quad \tau^*_{xz} = 2a\,\varepsilon^*_{xz},\\
a = \tfrac{\mu}{2} + \tfrac{S^0_1 - S^0_3}{2(\varepsilon^0_1 - \varepsilon^0_3)} = \tfrac{\mu}{2} + \tfrac{k}{3\varepsilon^0_3},
\end{gathered} \tag{3}$$

где a зависит только от одного “0” приближения и, следовательно, принимает постоянное значение.

Переходя к компонентам перемещений и подставляя (2), (3) в линеаризованные уравнения равновесия, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma*}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x}\right) + a\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x}\right) = 0,\\
\frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial\sigma*}{\partial y} + \mu\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^2} + a\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial y}\right) = 0,\\
a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x}\right) + a\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial y}\right) + \frac{\partial\sigma*}{\partial z} + \mu\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^2} = 0,\\
\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Будем искать $\sigma^*, u^*,\ v^*,\ w^*$ в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma^* = H\cos mx\cos ny\cos\lambda z,\\
&u^* \ = A\ \sin mx\cos ny\cos\lambda z,\\
&v^* \ = B\ \cos mx\sin ny\cos\lambda z,\\
&w^* = C\ \cos mx\cos ny\sin\lambda z.
\end{aligned}\tag{5}$$

Подставляя (5) в (4) получим

$$\left\{\begin{array}{l}
(\mu m^2+\frac{\mu}{2}n^2+a\lambda^2)A+mn\frac{\mu}{2}B+am\lambda C+Hm=0,\\
mn\frac{\mu}{2}A+(\frac{\mu}{2}m^2+\mu n^2+a\lambda^2)B+an\lambda C+Hn=0,\\
am\lambda A+an\lambda B+(m\lambda^2+an^2+am^2)C+H\lambda=0,\\
mA+nB+\lambda C=0.
\end{array}\right.\tag{6}$$

Система (6) является однородной системой линейных алгебраических уравнений относительно $A,\ B,\ C,\ H$. Она имеет нетривиальное решение только в том случае, когда её определитель равен нулю [3], т.е.

$$\Delta=\left|\begin{array}{llll}
\mu m^2+\frac{\mu}{2}n^2+a\lambda^2 & mn\frac{\mu}{2} & am\lambda & m\\
mn\frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2}m^2+\mu n^2+a\lambda^2 & an\lambda & n\\
am\lambda & an\lambda & \mu\lambda^2+an^2+am^2 & \lambda\\
m & n & \lambda & 0
\end{array}\right|=0.$$

После серии элементарных преобразований приходим к уравнению$\left(\mu(m^2+n^2)+2a\lambda^2\right)\left\{a\lambda^4+2(m^2+n^2)(\mu-a)\lambda^2+a(m^2+n^2)^2\right\}=0$, которое выражает зависимость $\lambda=\lambda(m,n)$. Если $m,\ n$предположить действительными числами, то из приведенного выше уравнения следует, что величина λ принимает комплексные значения.

Разрешая систему (6) для коэффициентов A,B,C получим следующие выражения

$$\begin{aligned}
&A=\frac{Hm(2(\mu-a)\lambda^2+am^2+an^2)}{((\mu-2a)\lambda^2+am^2+an^2)\left(\frac{\mu}{2}m^2+\frac{\mu}{2}n^2+a\lambda^2\right)},\\
&B=-H\frac{\left(\mu m^2+\frac{\mu}{2}n^2+a\lambda^2\right)\lambda^2+m^2((\mu-2a)\lambda^2+am^2+an^2)}{((\mu-2a)\lambda^2+am^2+an^2)\left(\frac{\mu}{2}m^2+\frac{\mu}{2}n^2+a\lambda^2\right)},\\
&C=\frac{\lambda H}{((\mu-2a)\lambda^2+am^2+an^2)}.
\end{aligned}\tag{7}$$

Граничные условия на боковых гранях, свободных от напряжения, запишутся в виде

$$\sigma_x\alpha+\tau_{xy}\beta+\tau_{xz}\gamma=0,\tau_{xy}\alpha+\sigma_y\beta+\tau_{yz}\gamma=0,\quad \tau_{xz}\alpha+\tau_{yz}\beta+\sigma_z\gamma=0,$$

где α,β,γ - направляющие косинусы нормали к боковой поверхности бруса.

На боковой грани $x=\pm\left[h_1+f_1(y,z)\right]$ компоненты нормали примут значения

$$\alpha=\pm1,\ \ \beta=-\frac{\partial f_1(y,z)}{\partial y},\ \ \gamma=-\frac{\partial f_1(y,z)}{\partial z}.$$

Соответствующие граничные условия, преобразуются к виду

$$\sigma_x^*=0,\quad \tau_{xz}^*\mp\sigma_z^0\frac{\partial f_1}{\partial z}=0\quad x=\pm h_1.\tag{8}$$

Аналогично на грани $y=\pm[h_2+f_2(x,z)]$ получим

$$\sigma_y^* = 0, \quad \tau_{yz}^* \mp \sigma_z^0 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \quad y = \pm h_2. \tag{9}$$

Из (5), (8), (9) получим

$$mh_1 = \tfrac{\pi}{2} + \pi k_1, \quad nh_2 = \tfrac{\pi}{2} + \pi k_2, \quad k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$
$$m = \pi(2k_1 + 1)/2h_1, \quad n = \pi(2k_2 + 1)/2h_2, \quad k_1, k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{(-1)^{k_1}}{3\varepsilon_3^0} (-A\lambda - Cm) \cos ny \sin \lambda z, \tag{10}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{(-1)^{k_2}}{3\varepsilon_3^0} (-B\lambda - Cn) \cos mx \sin \lambda z. \tag{11}$$

Функции f_1, f_2 при которых имеет место решение, определяются из (10), (11), причем задание уравнения одной боковой грани определяет уравнение другой. В случае $\mu = 0$ полученные результаты совпадают с результатами работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Артемов М.А., Ивлев Д.Д. Об общих соотношениях теории идеальной пластичности при кусочно-линейных условиях текучести // ДАН РАН. 1996. Т.350. №3. С.332-334.

[2] Чекмарев Г. Е. Условие пластичности для задачи деформирования тел из упрочняющегося материала при условии осевой симметрии. Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 177–179

[3] Ф.Р. Гантмахер Теория матриц. – М.: Наука, 1966, 576 с.

[4] Артемов М.А., Ивлев Д.Д. О пластическом течении бруса переменного прямоугольного сечения при растяжении // Динамика сплошных сред со свободными границами. Чебоксары: изд-во ЧГУ, 1996. С.8-17.

G. E. Chekmarev

DEFORMATION OF HARDENING PLASTIC ROD, WEAKENED BY GENTLE GROOVE

I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia

Abstract. One of the main properties of metals is the hardening that characterizes the influence of plastic deformation on the mechanical behavior of the environment. The study by the method of perturbations of the axisymmetric problem of deformation of bodies of hardenable material this work is dedicated to. It shows the algorithm for determining a first approximation in the problem of plastic deformation of a rod of hardenable material.

Keywords: plasticity, deformation, linearization, hardening.

Chekmarev Georgij Evgen'evich, Candidate of Phys. & Math., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

REFERENCES

[1] Artemov M.A., Ivlev D.D. Ob obshchih sootnosheniyah teorii ideal'noj plastichnosti pri kusochno-linejnyh usloviyah tekuchesti // DAN RAN. 1996. T.350. №3. S.332-334.

[2] Chekmarev G. E. Uslovie plastichnosti dlja zadachi deformirovanija tel iz uprochnjajushhegosja materiala pri uslovii osevoj simmetrii // Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state. 2015. № 2 (24). S. 177–179. (in Russian).

[3] F.R. Gantmaher Teoriya matric. – M.: Nauka, 1966, 576 s.

[4] Artemov M.A., Ivlev D.D. O plasticheskom techenii brusa peremennogo pryamougol'nogo secheniya pri rastyazhenii // Dinamika sploshnyh sred so svobodnymi granicami. CHeboksary: izd-vo CHGU, 1996. S.8-17.