

Л. В. Ковтанюк, В. И. Штука

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЛАХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЛУЧЕВЫХ РЯДОВ

Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия

Аннотация. На примере одномерной задачи о нагружении упруговязкопластического цилиндрического слоя с предварительными деформациями скручивающего типа демонстрируется применение метода лучевых рядов для получения приближённого решения с двумя близко расположенными поверхностями разрывов деформаций. Такое решение оказывается применимым при численных расчётах, которые проводятся в целях верификации соотношений метода а также распространения области его определения на времена существенно большие, чем предполагает использование только лучевого метода. Предположения малости обратимых или необратимых деформаций не делается, поэтому используется теория больших упругопластических деформаций, за счёт чего снимаются соответствующие вопросы выбора объективной производной и самого разделения полных деформаций на составляющие.

Ключевые слова: динамика твёрдого тела, численные методы, ударные волны, несжимаемость, лучевые ряды, необратимое деформирование

УДК: 539.3

Введение. С точки зрения вискозиметрии важные и интересные опыты состоят в употреблении соосно-цилиндрических вискозиметров для определения параметров вязкоупругих сред [23]. Исследуемый материал помещается в пространство между двумя жёсткими цилиндрами, один из которых приводится во вращение, а другой при этом испытывает закручивающее воздействие. При обработке экспериментальных данных, полученных с помощью таких приборов, необходимо знать точное решение краевой задачи, что в отношении вязких и вязкопластических жидкостей не

© Ковтанюк Л. В., Штука В. И., 2017

Ковтанюк Лариса Валентиновна

e-mail: lk@iasr.dvo.ru, доктор физико-математических наук, зав. лабораторией необратимого деформирования, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Штука Виктор Игоревич

e-mail: onslice@mail.ru, аспирант, инженер-математик, Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, г. Владивосток, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-301-50007 "мол_нр".

Поступила 05.06.2017

является проблемой [21]. Учёт не только вязкопластических, но и упругих свойств материалов продиктован потребностями технологической практики, поскольку обратимые составляющие деформаций оказывают существенное влияние на окончательную картину распределения остаточных напряжений [11], а моделирование динамического нагружения в силу определённых причин лучше производить с учётом вязкости, чем без неё [15].

Процесс деформирования является сложным и нередко случаи, когда после окончания активного воздействия на твёрдое тело оно претерпевает значительные изменения и состояние его качественно отличается от первоначального. Чтобы моделировать и характеризовать подобные явления, необходимо иметь некоторый критерий разделения деформаций на обратимые (которые не определяют окончательной картины) и необратимые (которые вызывают изменения). Удовлетворительного критерия разделения полных деформаций не существует, поскольку его вид обусловлен произволом конструктора математической модели упруговязкопластической среды [8], [20]. Сами эти величины могут быть измерены лишь опосредованно при обращении к некоторым гипотезам, в то время как прямому измерению поддаются лишь полные деформации. Так, например, теория упругости изучает механику деформируемых твёрдых тел, которые после окончания действия внешних сил восстанавливают свою исходную форму. При значительных деформациях снятие нагрузки не приводит к полному её восстановлению. Деформации, которые сыграли при этом решающую роль, называются пластическими. Моделирование такого рода процессов учитывает различные подходы к определению необратимых деформаций, явлений нагрузки и разгрузки [8], [12].

Несмотря на сложность описания отклика упруговязкопластической среды на существенно нестационарные воздействия, при наличии свойства несжимаемости в ней будут распространяться поперечные ударные волны, причём скорости их в случае малых деформаций не будут отличными от скоростей ударных волн в несжимаемой упругой среде [4]. Иначе, полученные лучевым методом прифронтные асимптотики используются в разностных схемах с целью выделения разрывов и расчёта их интенсивностей в процессе распространения ударных волн. Качественный обзор [27] отражает отличительные характеристики метода лучевых рядов и всевозможные аспекты его применения к различным задачам нестационарного деформирования сплошных сред, обладающих разнообразными свойствами.

Для описания данных явлений поэтому была избрана теория больших необратимых деформаций, в которой разделение деформаций на составляющие является следствием дифференциальных определений, а в уравнениях переноса за счёт этого скорости пластических деформаций выступают в качестве источников. При этом выбирать объективную производную не приходится, поскольку её вид обусловлен термодинамическими соотношениями модели [8].

Применение метода С. К. Годунова [1], [2], [14] в задачах механики деформируемого твёрдого тела с целью выделения движущихся поверхностей разрывов невозможно, поскольку процессы распространения объёмных и сдвиговых явлений в твёрдых телах взаимосвязаны и взаимозависимы. Это обстоятельство делает затруднительным расчёт распада разрыва, потому непосредственное приложение метода выделения разрыва С.К. Годунова становится невозможным. Выход из такого положения находится в использовании схем сквозного счета и их различных модификаций. Однако такой подход не является универсальным, тем более что немонотонность схем в этом случае

заставляет прибегать к специальным приемам, в частности к введению искусственной вязкости, что вызывает неоправданное сглаживание разрывов. По-видимому первыми предложили конструктивную возможность реализации схемы, свободной от использования таких приёмов Новосибирские авторы [16].

Свойство вязкости естественным образом сказывается на решении ввиду формирования диссипативных явлений за ударными волнами, что приводит в конечном итоге к размытию разрыва, как раз за счёт появления необратимых деформаций. При численном моделировании была задействована апробированная на упругой задаче монотонная схема сквозного счёта с выделением и сохранением самого понятия разрыва [22]. К аналогичным работам [7], [13], где также описаны все моменты построения расчётных схем, сохраняющим сам разрыв, также можно обратиться поскольку в них были показаны особенности конструирования таких схем, специальные ограничения, положенные на величины шагов расчётной сетки, применительно к задачам с движущимися поверхностями сильных разрывов.

Модельные соотношения. Движение точек несжимаемой вязкоупругопластической среды при адиабатическом приближении в эйлеровых переменных x_1, x_2, x_3 определено системой

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \rho(\dot{v}_i + v_{i,j}v_j), \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}) - p\delta_{ij}, \quad v_i = \dot{u}_i + u_{i,j}v_j, \\ \alpha_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u_{k,j}) = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik}e_{kj} - e_{ik}p_{kj} - p_{ik}e_{kj} + e_{ik}p_{kl}e_{lj}, \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}), \quad \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \varepsilon_{ij}^p + r_{ik}\varepsilon_{kj}^p + \varepsilon_{ik}^p r_{kj}, \quad r_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) + z_{ij}, \\ z_{ij} &= A^{-1} (B^2 (\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj}) + B (\varepsilon_{ik}e_{kl}e_{lj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{lj}) + e_{ik}\varepsilon_{kl}e_{ln}e_{nj} - e_{ik}e_{kl}\varepsilon_{ln}e_{nj}), \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{kk}, \quad E_2 = e_{ij}e_{ji}, \quad E_3 = e_{ij}e_{jk}e_{ki}, \\ \dot{u}_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \frac{Dp_{ij}}{Dt} = \frac{dp_{ij}}{dt} + r_{ik}p_{kj} + p_{ik}r_{kj}. \end{aligned} \tag{1}$$

где: u_i, v_i – компоненты векторов перемещений и скоростей; σ_{ij}, α_{ij} – компоненты тензоров напряжений Коши-Эйлера и полных деформаций; e_{ij}, p_{ij} – компоненты тензоров обратимых и необратимых деформаций; $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p$ – компоненты тензоров скоростей полных и необратимых деформаций; D/Dt – оператор объективной производной (по типу Коттера-Ривлина); p – функция добавочного давления; $\rho = const$ – плотность среды. Индекс после запятой обозначает частную производную по соответствующей координате, точка над символом – по времени.

Потенциал изотропной несжимаемой упругой среды W определён своим разложением по инвариантам тензора полных деформаций A_1, A_2 в ряд Тейлора относительно свободного состояния

$$\begin{aligned} W(A_1, A_2) &= -2\mu A_1 - \mu A_2 + bA_1^2 - (\mu - b) A_1 A_2 - aA_1^3 + \dots, \\ A_1 &= \alpha_{kk}, \quad A_2 = \alpha_{ij}\alpha_{ji}. \end{aligned} \tag{2}$$

где: μ – модуль сдвига; a и b – модули упругости третьего порядка. Сокращение числа упругих постоянных связано с особенностями антиплоского деформирования [19].

В качестве условия пластичности был избран расширенный (с учётом вязкости) критерий Губера-Мизеса

$$\left(\tau_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p\right) \left(\tau_{ji} - \eta \varepsilon_{ji}^p\right) = K^2, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk},$$

где: η - коэффициент вязкости; K - предел текучести; ввиду чего зависимость скоростей пластических деформаций от напряжений получается следующей

$$\varepsilon_{ij}^p = \left(1 - \frac{K}{\sqrt{\tau_{lk}\tau_{kl}}}\right) \frac{\tau_{ij}}{\eta}. \quad (3)$$

Важно иметь явное выражение ассоциированного закона течения (3), чтобы использовать его в соотношениях метода и последующих расчётах с привлечением численных схем, поскольку ε_{ij}^p являются источниками необратимых деформаций (1), образующихся в теле, которое изначально их не имело ($p_{ij} = 0, \varepsilon_{ij}^p = 0$ - такое предположение делается именно в данной постановке).

Компоненты тензора напряжений Коши-Эйлера согласно (1) и (2) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -2\mu - p - \theta_1 m - \theta_2 m^2 + \dots, & \sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma_{rr} + \mu e_{r\varphi}^2 - \theta_3 e_{rz}^2 m + \dots, \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{rr} + \mu e_{rz}^2 - \theta_3 e_{r\varphi}^2 m + \dots, & \sigma_{\varphi z} &= 4(\mu + \theta_3 m + \dots) e_{rz} e_{r\varphi}, \\ \sigma_{r\varphi} &= 2\mu(1 + \chi m^2 + \dots) e_{r\varphi} = 2\rho h e_{r\varphi}, & \sigma_{rz} &= 2\mu(1 + \chi m^2 + \dots) e_{rz} = 2\rho h e_{rz}, \\ \theta_1 &= \frac{\mu + b}{2}, & \theta_2 &= \frac{3(a - b + \mu)}{4}, & \theta_3 &= -\frac{\mu - b}{2}, & \chi &= \frac{\theta_2}{\mu}, & m &= e_{r\varphi}^2 + e_{rz}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение движения (1) в развёрнутом виде выглядит следующим образом ($C = \sqrt{\mu/\rho}$)

$$\begin{aligned} p, r + r^{-1}(\mu e_{r\varphi}^2 - \theta_3 e_{rz}^2) + 2(\theta_1 + 2\theta_2 m)(e_{rz,r} e_{rz} + e_{r\varphi,r} e_{r\varphi}) &= r^{-1} \rho v_\varphi^2, \\ (e_{r\varphi,r} + 2r^{-1} e_{r\varphi})(1 + \chi m^2) + 4\chi(e_{rz,r} e_{rz} + e_{r\varphi,r} e_{r\varphi}) e_{r\varphi} m &= C^{-2} v_{z,t}, \\ (e_{rz,r} + r^{-1} e_{rz})(1 + \chi m^2) + 4\chi(e_{rz,r} e_{rz} + e_{r\varphi,r} e_{r\varphi}) e_{rz} m &= C^{-2} v_{z,t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Первая компонента системы (3) используется только для определения функции добавочного всестороннего давления (является производной величиной) уже по известным $e_{r\varphi}(r, t)$ и $e_{rz}(r, t)$.

В принципе, достаточно иметь представление системы (1) в деформациях. Однако, чтобы организовать пересчёт результатов на компоненты вектора перемещений, необходимо воспользоваться представлением

$$u_r = r(1 - \cos \psi(r, t)), \quad u_\varphi = r \sin \psi(r, t), \quad u_z = u(r, t). \quad (6)$$

где функциями, определяющими поле деформаций, являются тангенциальная $\psi(r, t)$ и аксиальная $u(r, t)$ составляющие перемещения.

Ударные волны. Поскольку нестационарность воздействия предполагает существование механизмов переноса возмущений от границы вглубь среды, то естественными переносчиками таких явлений будут поверхности разрывов деформаций (ударные волны), характеристики которых определяются динамическим условием совместности

$$[\sigma_{ij}] n_j = \rho^+ (v_j^+ n_j - G) [v_i], \quad (7)$$

где: $[f] = f^+ - f^-$ – разрыв функции; n_i – компоненты вектора внешней к поверхности разрывов нормали. В дальнейшем индекс "плюс" для обозначения состояния перед поверхностью разрывов опускается.

В рассматриваемом случае (7) сводится к системе трёх уравнений ($n_r = 1, n_\varphi = 0, n_z = 0$)

$$[\sigma_{rr}] = 0, \quad [\sigma_{r\varphi}] = -\rho G[v_\varphi], \quad [\sigma_{rz}] = -\rho G[v_z], \quad (8)$$

первое из которых позволяет выразить $[p]$, а следующие два дают условие, определяющие существование ударных волн. Для его получения в явном виде необходимо умножить второе уравнение системы (8) на $[v_z]$, третье – на $[v_\varphi]$, а затем вычесть одно из другого

$$[h] (e_{r\varphi}[v_z] - e_{rz}[v_\varphi]) + h ([e_{r\varphi}][v_z] - [e_{rz}][v_\varphi]) = 0. \quad (9)$$

Так как пластические деформации являются непрерывными ($[p_{ij}] = 0$) [3], имеем

$$[e_{r\varphi}][v_z] - [e_{rz}][v_\varphi] = 0. \quad (10)$$

Поэтому условие (10) является полностью аналогичным условию существования поверхностей сильных разрывов в упругой среде, рассмотренному в работе [22]. Там разделения деформаций на обратимые и необратимые не происходило. Следовательно распространяться будут также ударные волны двух типов, скорости которых вычисляются из выражения

$$G^2 = h - [h] + \frac{e_{r\varphi}}{[e_{r\varphi}]}[h] = h - [h] + \frac{e_{rz}}{[e_{rz}]}[h]. \quad (11)$$

В результате выводы относительно соотношений на поверхностях разрывов оказываются согласными с [22]. Представим их:

1. Выражение (9) выполняется при $e_{r\varphi}[v_z] - e_{rz}[v_\varphi] = 0$, т.е.

$$\frac{e_{r\varphi}}{[e_{r\varphi}]} = \frac{e_{rz}}{[e_{rz}]}.$$

Скорость распространения такой поверхности разрывов определяется из уравнения (11)

$$G_1 = \left(h - [h] + \frac{e_{r\varphi}}{[e_{r\varphi}]}[h] \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (12)$$

Такая ударная волна является плоскополяризованной по определению и называется волной нагрузки. Она не изменяет направление предварительного сдвига, однако увеличивает его. При отсутствии предварительной деформации антиплоского типа $e_{rz} = 0$ за поверхностью волны её значение останется прежним $e_{rz}^- = 0$, а предварительная деформация скручивающего типа ($e_{r\varphi} \neq 0$) возрастёт, поскольку ударные волны на которых происходило бы уменьшение предварительного сдвига невозможны. За подтверждением данного факта следует обратиться к термодинамическому условию совместности разрывов для несжимаемых сред (аналогу теоремы Цемпелена в газовой динамике).

$$\sigma_{ij}[v_i]n_j - (v_i n_i - G) \left([W] + \frac{\rho}{2}[v_j][v_j] \right) \geq 0.$$

2. Выражение (9) выполняется при $[m] = 0$. Этот случай соответствует нейтральной волне или волне круговой поляризации [5], скорость которой определена выражением

$$G_2 = h^{\frac{1}{2}}. \quad (13)$$

Такая волна не оказывает никакого влияния на интенсивность сдвига, а изменяет только его направленность. Скорость её распространения зависит от предварительного состояния среды, то есть от состояния за фронтом волны нагрузки. Для несжимаемой среды порядок следования поверхностей сильных разрывов чётко определён: $G_1 > G_2$. Данное обстоятельство было показано ещё в работе [6]. Это также несложно заметить, обратившись к явному виду выражений для скоростей ударных волн.

Лучевой метод. Изначально лучевой метод был применён именно к упругопластическим средам [25], [3]. Авторы упомянутых подходов, однако, даже не рассматривали вариант применения подобных разложений к задачам с ударными волнами. Предложенный в начале 90-х годов приём [10] позволил разрешить этот вопрос посредством введения дополнительного разложения на ударных волнах [28]. Полагаем, что: несжимаемая упругая среда, движение которой определено соотношениями (1), (2) заполняет собой цилиндрический слой, расположенный между двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями $r = r_0$ и $r = R$ ($R > r_0$). На внешней границе $r = R$ выполняется условие жёсткого закрепления. На внутренней границе $r = r_0$ задана тангенциальная составляющая перемещений $\psi(r_0, t) = \psi_0$, определяющая предварительные ($t \leq 0$) деформации в слое (6). Для времени $t > 0$ краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} \psi(r_0, t) &= \psi_0, & \psi(R, t) &= 0, \\ u(r_0, t) &= u_1 t + u_2 t^2 / 2, & u(R, t) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

чем инициируют развитие аксиального воздействия и распространение ударных волн.

Расходящихся поверхностей сильных разрывов: Σ_1 и следом за ней Σ_2 . В работах [9], [17] описываются альтернативные подходы к решению задач о нагружении предварительно недеформированных несжимаемых сред, за счёт чего в них распространяется лишь одна поверхность сильных разрывов. На рисунке 1 римской цифрой I обозначена область перед волной нагрузки Σ_1 (присутствуют скручивающие деформации), II - между Σ_1 и волной поляризации Σ_2 , III - за Σ_1 .

Приближённое решение в области II представляется в форме лучевого ряда

$$\begin{aligned} u(r, t) &= -\sum_{j=1}^{\infty} \kappa_j \frac{(t - t_1)^j}{j!}, & \psi(r, t) &= \psi(r) - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \frac{(t - t_1)^j}{j!}, \\ \kappa_j &= \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, & \lambda_j &= \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_1}, & t_1 &= \int_0^r G_1^{-1}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Волна нагрузки движется согласно (12) со скоростью

$$G_1 = C \left(1 + \chi e_{r\varphi}^4 \left(5 - 10 \frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} + 10 \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^2 - 5 \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^3 + \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^4 \right) + \dots \right). \quad (16)$$

Уравнения лучевого метода на волне нагрузки

$$\frac{\delta \lambda_1}{\delta t} = \lambda_1 \left(-\frac{C}{r} + \frac{5}{8} \chi \frac{e_{r\varphi}^3}{C} (\lambda_2 - C^2 e_{r\varphi, r}) \right) + \dots, \quad \kappa_2 = 0. \quad (17)$$

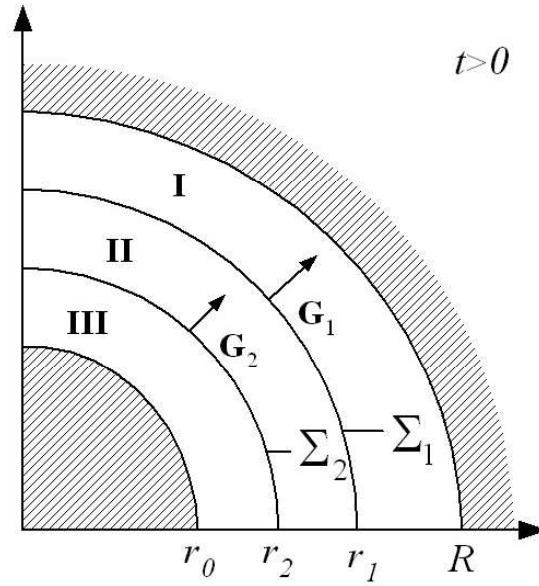


Рис. 1. Схема распространения цилиндрических ударных волн

За второй поверхностью разрывов запишем лучевые ряды

$$u^-(r, t) = u(r, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{(t - t_2)^j}{j!}, \quad \psi^-(r, t) = \psi(r, t) - \sum_{j=1}^{\infty} \omega_j \frac{(t - t_2)^j}{j!}, \quad (18)$$

$$\eta_j = \left[\frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad \omega_j = \left[\frac{\partial^j \psi}{\partial t^j} \right]_{t=t_2}, \quad t_2 = \int_0^r G_2^{-1}(\xi) d\xi.$$

Скорость распространения волны круговой поляризации получается из (13) и имеет вид

$$G_2 = C \left(1 + \chi e_{r\varphi}^4 \left(1 - 4 \frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} + 6 \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^2 - 4 \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^3 + \left(\frac{r\lambda_1}{C e_{r\varphi}} \right)^4 \right) + \dots \right). \quad (19)$$

Уравнения лучевого ряда на волне круговой поляризации

$$\begin{aligned} \frac{\delta \omega_1}{\delta t} &= \omega_1 \left(-\frac{1}{2} \frac{C}{r} + 2\chi \frac{e_{r\varphi}^3}{C} (\lambda_2 - C^2 e_{r\varphi, r}) \right) + \\ &+ \chi e_{r\varphi}^2 \lambda_1 \left(3\omega_1 \left(\frac{e_{r\varphi}}{r} + 2 \left(\frac{\lambda_2}{C^2} - e_{r\varphi, r} \right) \right) + 2 \frac{\omega_2 e_{r\varphi}}{C} \right) + \dots, \quad (20) \\ \eta_2 &= -\frac{r^2 \omega_1 \omega_2}{C e_{r\varphi}} \left(1 - \frac{4}{5} \frac{\lambda_1}{C e_{r\varphi}} (1 - \chi e_{r\varphi}^4) \right) - 2 \frac{\mu}{\eta} r \omega_1 + \dots \end{aligned}$$

Как видно из уравнений (17), (20) коэффициент затухания интенсивности волны нагрузки определяется множителем $-\frac{C}{r}$ при λ_1 , аналогичный параметр для волны

поляризации множителем $-\frac{1}{2} \frac{C}{r}$ при ω_1 . Поэтому существенная доля в явлении затухания ударных волн приходится на геометрические эффекты, однако доля нелинейных эффектов может быть с ней сравнимой при существенном граничном воздействии.

Разрывы скоростей и ускорений представлены рядами уже относительно эйконалов согласно модификации лучевого метода, предложенной в [10]

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{jk} \frac{t_1^k}{k!}, \quad \lambda_{jk} = \left[\frac{\delta^k \lambda_j}{\delta t^k} \right] |_{t_1=0}, \quad \omega_j = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_{jk} \frac{t_2^k}{k!}, \quad \omega_{jk} = \left[\frac{\delta^k \omega_j}{\delta t^k} \right] |_{t_2=0}, \quad (21)$$

благодаря которой были получены аналитические выражения при решении упругой задачи, как за волной нагрузки, так и за волной круговой поляризации.

$$\lambda_{10} = \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{C e_{r\varphi}(r_0)} + \dots, \quad \lambda_{20} = C^2 r e_{r\varphi,r}(r_0) + 2 \frac{u_1}{C} \left(\frac{u_2}{e_{r\varphi}} + C \frac{\mu}{\eta} \right) + \dots, \quad (22)$$

$$\omega_{10} = -u_1, \quad \omega_{20} = -u_2.$$

Помимо коэффициентов лучевых рядов, а следовательно и разложений искомым функций за поверхностями разрывов, получены значения эйконалов

$$t_1 = \frac{r - r_0}{C (1 + 5\chi e_{r\varphi}^2(r_0) (e_{r\varphi}^2(r_0) + 2C^{-1}\lambda_{10} (C^{-1}\lambda_{10} - e_{r\varphi}(r_0))))} - \frac{5\chi\lambda_{11}e_{r\varphi}^2(r_0) (2C^{-1}\lambda_{10} - e_{r\varphi}(r_0)) (r - r_0)^2}{C^3 (1 + 5\chi e_{r\varphi}^2(r_0) (e_{r\varphi}^2(r_0) + 2C^{-1}\lambda_{10} (C^{-1}\lambda_{10} - e_{r\varphi}(r_0))))^3} + \dots, \quad (23)$$

$$t_2 = \frac{r - r_0}{C (1 + \chi e_{r\varphi}^2(r_0) (e_{r\varphi}^2(r_0) + 2C^{-1}\lambda_{10} (3C^{-1}\lambda_{10} - 2e_{r\varphi}(r_0))))} - \frac{2\chi\lambda_{11}e_{r\varphi}^2(r_0) (3C^{-1}\lambda_{10} - e_{r\varphi}(r_0)) (r - r_0)^2}{C^3 (1 + \chi e_{r\varphi}^2(r_0) (e_{r\varphi}^2(r_0) + 2C^{-1}\lambda_{10} (3C^{-1}\lambda_{10} - 2e_{r\varphi}(r_0))))^3} + \dots$$

Лучевой метод позволяет получить и следующие коэффициенты в разложениях (15) и (18), для чего следует разрешить второй и последующие шаги метода записью в разрывах продифференцированного по времени уравнения движения. Однако, ограничившись заданием краевых условий в форме рядов их квадратичным представлением по времени (14), первого шага лучевого метода оказывается достаточно, чтобы полностью замкнуть систему.

Существенной особенностью рассматриваемой задачи является моментальный выход на активное нагружение, который обусловлен соответствующим предварительным состоянием среды ($p_{ij} = 0, \varepsilon_{ij}^p = 0$), а также граничным воздействием, которое сразу приводит к проявлению необратимых деформаций ($\tau_{ij}\tau_{ji} \geq K^2$). Следовательно ударная волна нагрузки является локомотивом, который тянет за собой все диссипативные явления, а волна поляризации, как и полагается, идёт следом уже в зоне вязкопластического ядра. Пластические деформации в соответствующих областях определяются посредством соотношения

$$p_{ij}^- = p_{ij}^+ - [\dot{p}_{ij}] (t - t_{\Sigma}) - [\ddot{p}_{ij}] (t - t_{\Sigma})^2 - \dots \quad (24)$$

В случае необходимости определения остаточных деформаций, необходимо воспользоваться данным разложением и проделать те же действия, которые описаны в работе [4].

Определение добавочного давления по уже известным $e_{r\varphi}(rt)$ и $e_{rz}(rt)$ не представляет особенных сложностей, за исключением производства аналитических и численных расчётов, но является важным с точки зрения получения полного решения поставленной задачи.

Численное моделирование. Полученное в предыдущем разделе с помощью модифицированного лучевого метода решение (22) может считаться справедливым только для малых послееударных времён. Обусловлено это тем, что в выражениях (21), описывающих эволюцию интенсивности разрывов и (15), (18), представляющих непосредственно движение точек сплошной среды после прохождения через них ударной волны, содержится ограниченное число слагаемых, которые не в состоянии обеспечить асимптотический характер интенсивностям ударных волн. Поэтому при расчётах, основанных на чисто приближённом решении необходимо ограничиваться некоторым значением времени t_q , величина которого обусловлена несколькими факторами.

Поскольку расчётная область $t > t_q$ и $r \in [r_0; r_2]$ разбивается равномерной сеткой с шагом Δt по времени и Δr по пространственной координате, а уравнение движение записывается в дискретизированном виде, то сама возможность записи второй производной функций для шаблона с центральными разностями будет определяться величиной шага. То есть желание как можно раньше производить учёт состояния среды по уравнению движения за волной поляризации вызывает необходимость уменьшения шага, что в свою очередь приводит к увеличению расчётного времени. Эти явления уже относятся к области оптимизации и определения некоторого оптимального критерия, который бы определял взаимосвязь всех этих параметров.

При $t > t_q$ в расчётную схему включается процедура удовлетворения уравнениям динамики (5) в той части области, где уже прошла ударная волна поляризации и где возможно записать в разностном виде вторые производные по времени функций $\psi(r, t)$ и $u(r, t)$.

Также близ фронта волны происходит обращение к лучевым разложениям (15) и (18), только с неизвестными коэффициентами в рядах (21), вычислять которые придётся посредством решения сложной системы нелинейных алгебраических уравнений. Для реализации означенного подхода применяется специальная неявная конечно-разностная схема. Функции в узлах с координатами r_i и t_j записываются посредством индексов

$$\psi_{i,j} = \psi(r_i, t_j), \quad u_{i,j} = u(r_i, t_j).$$

Положения фронтов поверхностей разрывов деформаций $r_1(t)$ и $r_2(t)$ в момент времени $t = t_j$ обозначены x_j и y_j соответственно. Для неявной конечно-разностной схемы с центральными разностями аппроксимация производных функций, входящих в уравнение движения, записывается так

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta r}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \approx \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta r^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \approx \frac{\psi_{i,j} - 2\psi_{i,j-1} + \psi_{i,j-2}}{\Delta t^2}.$$

Таким образом, в текущий момент времени t_j для точек $r \in [r_0; y_{j-2}]$ (именно в этой области возможна разностная запись $\ddot{\psi}$ и \ddot{u}) исходному уравнению движения ставится в соответствие его дискретный аналог в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. В качестве краевых условий используются значения функций на нагружаемой границе (14) и их значения, вычисленные посредством лучевых рядов в ближайшем к $r = y_{j-2}$ узле. Таким образом определяется поле перемещений за второй ударной волной за исключением прифронтальной зоны, где записать дискретизированное

уравнение движения невозможно. Предполагается, что в этой зоне функции и также описываются лучевыми рядами в форме (15), (18) с той лишь разницей, что значения дельта-производных аппроксимируются выражениями

$$\frac{\delta\omega_1}{\delta t} \approx \frac{\omega_{1,j} - \omega_{1,j-1}}{\Delta t}, \quad \omega_{1,j} \approx \omega_{1,j-1} + \frac{\delta\omega_1}{\delta t} \Delta t, \quad \omega_{2,j} \approx \omega_{2,j-1}.$$

После при помощи метода наименьших квадратов решается задача минимизации невязки лучевого разложения решения, полученных интегрированием уравнения динамики на нескольких соседних точках близ границы $r = y_{j-2}$. Этим завершается текущий шаг алгоритма по времени: во всей области за ударной волной круговой поляризации определены перемещений точек среды и получены значения величин разрывов.

Таким образом, численная схема получается замкнутой и реализуется методом простых итераций. Естественным образом, необходимо пересчитывать значений функций в ближайших к поверхности разрывов точках. Однако только так возможно достичь хорошего качества исполнения алгоритма и повысить его точность. Для наглядности на рисунке 2 представлена маркировка узлов расчётной сетки, где: 'o' – записаны лучевые ряды, '+' – где решается дискретный аналог уравнения движения.

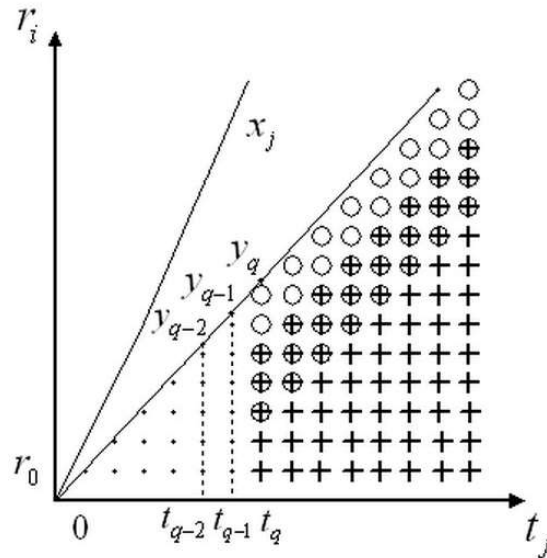


Рис. 2. Маркировка узлов расчётной сетки

Ввиду линейной аппроксимации интенсивностей разрывов на волнах нагрузки и круговой поляризации (21) время t_q , начиная с которого производится учёт уравнения движения (5) в области за второй ударной волной, не должно быть слишком большим, поскольку для него существует ещё ограничение. Приближённое решение для интенсивности ω_1 представляет собой линейную функцию и не следует допускать ситуации, когда она обратится в нуль. Поэтому $t_q < 2r_0/C$. При учёте следующих слагаемых в (21) можно показать, что ω_1 стремится к нулю асимптотически.

Схема с центральными разностями даёт хорошее приближение к решению и имеет порядок $O(\Delta t^2)$ за счёт чего при уменьшении шага сетки в 2 и 4 раза относительное отклонение полученного решения от предыдущего (менее точного) составило 5 и 3 % соответственно, а расчётное время увеличилось примерно в 4 и 16 раз. Подобные особенности численного моделирования свидетельствуют о сходимости и устойчивости неявной конечно-разностной схемы (был смоделирован отклик при различных параметрах нагрузки и свойствах среды), благодаря которой удалось отойти от естественных для метода лучевых рядов ограничений (малости послеударных времён), определить поля напряжений, деформаций (полных, обратимых и необратимых) и расширить область их определения.

Результаты экспериментов. Для верификации полученного приближённого решения и применения разработанного алгоритма расчёта был проведён ряд численных экспериментов, чтобы рассмотреть влияние различных граничных воздействий и параметров материала на распределение полей напряжений и деформаций. При различных параметрах материала а также размерах ячейки сеточной области отклонения решений находились в рамках допустимой погрешности, что является свидетельством устойчивости расчётной схемы. Представленные ниже графики приведены для материала с параметрами: $c = 55$ м/с, $\chi = 200$, $\mu = 2,6 \cdot 10^6$ Па, $K = 1.01\mu$, $\eta = 2,6 \cdot 10^6$ Па/с. Геометрию слоя определяют внешний и внутренний радиусы: $r_0 = 10^{-2}$ м, $R = 2 \cdot 10^{-2}$ м. Условия на внутренней границе следующие: $\psi_0 = 10^{-2}$, $u_1 = 10$ м/с, $u_2 = 200$ м/с². На рисунках 3 и 4 представлены эпюры (всего 10 штук, с указанием моментов времени, для которых они показаны) осевого смещения u , нормированной касательной компоненты тензора напряжений Коши-Эйлера $\sigma_{\varphi z}/\mu$, компоненты тензора необратимых деформаций p_{rz} , рассчитанная по данным (4) и (24), эволюция интенсивности ω_1 , где момент включения в расчётную схему уравнения движения (5) и определения состояния за поверхностями разрывов соответствует стыку линейного и нелинейного участков ($t_q \approx 10^{-5}$).

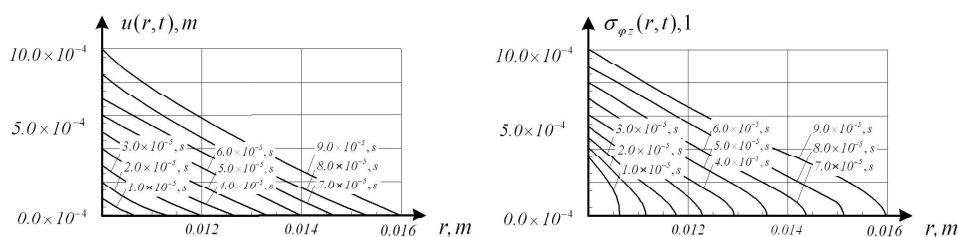


Рис. 3. Аксиальное смещение точек слоя и компонента тензора напряжений

Заключение. На основании приближённого метода лучевых рядов и специально устроенной конечно-разностной расчётной схемы был смоделирован отклик вязкоупругопластической среды на ударное граничное воздействие, которое вызывало распространение в предварительно продеформированном несжимаемом цилиндрическом слое двух поверхностей сильных разрывов. Было показано существенное влияние предварительного сдвига на скорости ударных волн, и, главным образом, их число. В

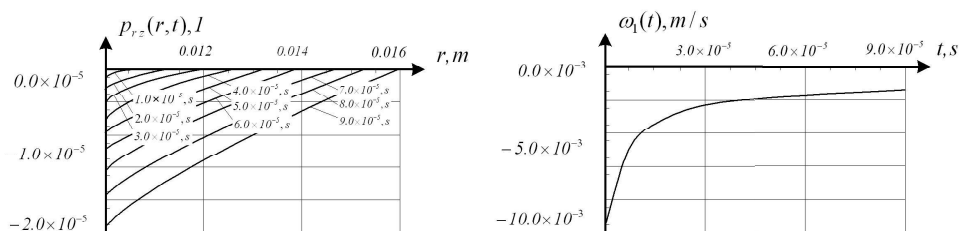


Рис. 4. Компонента тензора необратимых деформаций и изменение интенсивности

средах, пребывающих в свободном состоянии до момента начала нагружения возможно распространение лишь одной поперечной волны нагрузки [9], [17]. За счёт использования в конечно-разностной схеме расчётов прифронтных разложений решения за поверхностями сильных разрывов (ударных волн) удалось на каждом временном шаге расчётов указать положение как ударной волны нагрузки, так и ударной волны круговой поляризации и вычислить величины возможных разрывов (интенсивностей ударных волн). Это позволило получить решение задачи для времён существенно больших по сравнению с тем временем, когда справедливо приближённое решение при непосредственном вычислении коэффициентов лучевого ряда согласно задаваемым граничным условиям на нагружаемой поверхности. Модель больших упругопластических деформаций послужила хорошим подспорьем при учёте диссипативных явлений. За счёт уравнения переноса пластических деформаций, где скорости таких деформаций выступают в роли источника удалось построить решение для областей за ударными волнами. Результаты расчётов показывают зависимость напряжённого состояния от необратимых деформаций, которые обязательно сказываются на всём процессе при активном нагружении. Ввиду зависимости скорости пластических деформаций от напряжённого состояния, влияние одних явлений на другие здесь чрезвычайно сильно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алалыкин Г. Б., Годунов С. К., Киреева И. Л., Плинер Л. А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. М.: Наука, 1976. 112 с.
- [2] Афанасьев С. Б., Баженов В. Г. О численном решении одномерных нестационарных задач упругопластического деформирования сплошных сред методом Годунова // Прикл. проблемы прочн. и пласт. Горький: Из-во ГГУ, 1986. Вып. 33. С. 21–29.
- [3] Бабичева Л. А., Быковцев Г. И., Вервейко Н. Д. Лучевой метод решения задач в упруго-вязкопластических средах // Прикладная математика и механика, 1973. Т. 37, № 1. С. 145–155.
- [4] Безгласный П. А., Вервейко Н. Д. О распространении ударных волн в упруговязко-пластической среде // Механика твёрдого тела, 1971. № 5, С. 71–76.
- [5] Буренин А. А. Об ударном деформировании несжимаемого упругого полупространства // Прикладная механика, 1985. № 25 (5). С. 3–8.
- [6] Буренин А. А., Дудко О. В., Лаптева А. А. К закономерностям распространения деформаций изменения формы // Сибирский журнал индустриальной математики, 2011. Т. 14, № 4. С. 14–23.

- [7] Буренин А. А., Зиновьев П. В. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А. Ю. Ишплинского. М. : Физматлит, 2003. С. 146–155.
- [8] Буренин А. А., Ковтанюк Л. В. Большие необратимые деформации и упругое последствие. Владивосток: Дальнаука, 2013. 312 с. ISBN 978-5-8044-1423-9.
- [9] Буренин А. А., Рагозина В. Е. К построению приближенных решений краевых задач ударного деформирования // Механика твёрдого тела, 2008. № 2. С. 106–113.
- [10] Буренин А. А., Россихин Ю. А. О влиянии вязкости на характер распространения плоской продольной волны // ПМТФ, 1990. № 6. С. 13–17.
- [11] Буренин А. А., Устинова А. С. Развитие и торможение винтового вязкопластического течения с расчётом упругого отклика после остановки течения и разгрузки // В сб. Успехи механики сплошных сред. К 70-летию В. А. Левина. Владивосток: Дальнаука, 2009. С. 91–102.
- [12] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [13] Герасименко Е. А., Завертан А. В. Расчёты динамики несжимаемой упругой среды при антиплоском и скручивающем ударе // Вычислительная механика сплошных сред, 2008. Т. 1, № 3. С. 46–56.
- [14] Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [15] Зволинский Н. В., Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Динамика деформируемых твёрдых тел // В кн. : Механика в СССР за 50 лет. Т. 3. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1972. С. 291–323.
- [16] Иванов Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твёрдых тел. Новосибирск: Сибирское универс. Из-во, 2002. 352 с.
- [17] Иванова Ю. Е. Эволюционные уравнения в описании ударных движений несжимаемой упругой среды // Вестник ДВО РАН, 2006. № 4. С. 118–122.
- [18] Локшин А. А., Сагомоян Е. А. Нелинейные волны в механике твёрдого тела: Метод факторизации. М.: Московский Университет, 1989. 144 с. ISBN 5-211-00326-8.
- [19] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
- [20] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: Физматлит, 2013. 319 с. ISBN 978-5-9221-1409-7.
- [21] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 224 с.
- [22] Севастьянов Г. М., Штука В. И., Буренин А. А. Лучевой метод в приближённом решении задачи об ударном нагружении несжимаемого цилиндрического слоя // Вестник Чувашияского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика пре-дельного состояния, 2015. № 4 (26). С. 50–62.
- [23] Шрамм Г. Основы практической реологии и реометрии / Пер. с англ. И. А. Лавыгина. М.: КолосС, 2003. 321 с.
- [24] Энгельбрехт Ю. К. О нелинейных волнах деформации в релаксирующей и неоднородной средах // Материалы симпозиума "Нелинейные волны деформации". Таллин, 31 января – 3 февраля 1978 г. Часть 1. С. 169–184.
- [25] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus., 1967. Vol. 18, № 1. P. 141–144.
- [26] Boa-The Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids. J. Mech. Phys. Solids, 1967. Vol. 15. P. 1–14.

[27] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // *Appl. Mech. Rev.*, 1995. Vol. 48. № 1. P. 1–39.

[28] Tomas T. Y. *Plastic Flow and fracture in solids*. New York, London: Academic Press, 1961. 271 p.

L. V. Kovtaniuk, V. I. Shtuka

**INVESTIGATION OF CYLINDRICAL SHOCK WAVES IN
ELASTOVISCOPLASTIC INCOMPRESSIBLE BODIES USING THE METHOD
OF RAY SERIES**

Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia

Abstract. The one-dimensional problem of loading elastoviscoplastic cylindrical layer with preliminary deformations of a twisting type demonstrates the application of the method of ray series to obtain an approximate solution with two closely spaced discontinuity surfaces for example. This solution proves to be applicable in numerical calculations, which are conducted for the purpose of verification of the method relations and for the extension of the scope of its definition at times that are substantially longer than the use of only the ray method. Assumptions of smallness of reversible or irreversible deformation are not done, therefore the theory of large elastoplastic deformations is used, due to which the questions of the choice of the objective derivative and the separation of finite deformations into components.

Keywords: solid dynamics, elastoviscoplasticity, shock waves, incompressibility, numerical methods, ray series

REFERENCES

- [1] Alalykin G. B., Godunov S. K., Kireeva I. L., Pliner L. A. Solution of one-dimensional problems of gas dynamics in moving grids. Moscow : Nauka. 1976. – 112 p. (in Russian).
- [2] Afanasiev S. B., Bazhenov V. G. About the numerical solution of one-dimensional nonstationary problems of elastoplastic deformation of continuous media by the Godunov method // Applied problems of strength and plasticity. Gorkii: GSU Publishing House, 1986. – Issue 33. P. 21–29. (in Russian).
- [3] Babicheva L. A., Bykovtsev G. I., Verveiko N. D. The ray method for solving problems in visco-elastic-plastic media // Applied Mathematics and Mechanics, 1973. – Vol. 37, № 1. P. 145–155. (in Russian).
- [4] Bezglasnyi B. N., Varveiko N. D. On shock deformation of an incompressible elastic half-space // Applied Mechanics, 1971. – № 5. P. 71–76. (in Russian).
- [5] Burenin A. A. About the shock deformation of an incompressible elastic half-space // Applied Mechanics, 1985. – № 25 (5). P. 3–8. (in Russian).
- [6] Burenin A. A., Dudko O. V., Lapteva A. A. By the patterns of distribution change of shape deformations // Siberian Journal of Industrial Mathematics, 2011. – Vol. 14, № 4. P. 14–23. (in Russian).
- [7] Burenin A. A., Zinoviev P. V. On the problem of the separation of discontinuity surfaces in numerical methods for the dynamics of deformable media // Problems of

Kovtaniuk Larisa Valentinovna

e-mail: lk@iacp.dvo.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Head of the Laboratory of Irreversible Deformation, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Shtuka Victor Igorevich

e-mail: onslice@mail.ru, Post-Graduate Student, Mathematician Engineer, Institute of Automation and Control Processes FEB RAS, Vladivostok, Russia.

Mechanics. Collection of articles for the 90th anniversary of A. Yu. Ishlinskii. Moscow : Fizmatlit, 2003. P. 146–155. (in Russian).

[8] Burenin A. A., Kovtaniuk L. V. Finite irreversible deformations and elastic aftereffects. Vladivostok : Dalnauka, 2013. – 312 p. ISBN 978-5-8044-1423-9. (in Russian).

[9] Burenin A. A., Ragozina V. E. To the construction of approximate solutions of boundary value problems of shock deformation // *Solid Mechanics*, 2008. – № 2. P. 106–113. (in Russian).

[10] Burenin A. A., Rossikhin Yu. A. Ray method for solving one-dimensional problems of nonlinear dynamic theory of elasticity with flat surfaces breaks Applied problems of mechanics of deformable media. Vladivostok : FEB AS USSR. 1990. P. 129–137. (in Russian).

[11] Burenin A. A., Ustinova A. S. Development and braking of a viscoelastic screw flow with the calculation of the elastic response after stopping the flow and unloading // *Successes in Continuum Mechanics. Collection of articles for the 70th anniversary V. A. Levin*. Vladivostok : Dalnauka, 2009. P. 91–102. (in Russian).

[12] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok : Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[13] Gerasimenko E. A., Zavertan A. V. The calculations of the dynamics of an incompressible elastic medium and twisting at impact antiplane // *Computational Continuum Mechanics*. 2008. – Vol. 1, № 3. P. 46–56. (in Russian).

[14] Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Prokopov G. P. Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics. Moscow : Nauka, 1976. – 400 p. (in Russian).

[15] Zvolinskii N. V., Reightman M. I., Shapiro G. S. Solid dynamics // In the Book : *Mechanics in the USSR for 50 years*. – Vol. 3. *Solid Mechanics*. Moscow : Nauka, 1972. P. 291–323. (in Russian).

[16] Ivanov G. V., Volchkov Yu. M., Bogulskii I. O., Anisimov S. A., Kurguzov V. D. Numerical solution of dynamic problems of elastoplastic deformation of solids. Novosibirsk: SSU Publishing House. 2002. – 352 p. (in Russian).

[17] Ivanova Yu. E. Evolution equations in the description of shock motions of an incompressible elastic medium // *Vestnik FEB RAS*, 2006. – № 4. P. 118–122. (in Russian).

[18] Lokshin A. A., Sagomonian E. A. Nonlinear waves in the mechanics of solids: The method of factorization. Moscow : MSU Publishing House, 1989. – 144 p. ISBN 5-211-00326-8. (in Russian).

[19] Lurie A. I. Nonlinear theory of elasticity. Moscow : Nauka, 1980. 512 p. (in Russian).

[20] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Thermomechanics of elastoplastic deformation. Moscow : Fizmatlit, 2013. – 319 p. ISBN 978-5-9221-1409-7. (in Russian).

[21] Reiner M. Rheology. Moscow : Nauka, 1965. – 224 p. (in Russian).

[22] Sevastyanov G. M., Shtuka V. I., Burenin A. A. The ray method in approximate solve of shock loading of noncompressible cylindrical layer problem // *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2015. № 4 (26). P. 50–62. (in Russian).

[23] Shramm G. Basics of practical rheology and rheometry / Translation from English by I. A. Lavygin. Moscow : KolosS, 2003. – 321 p. (in Russian).

[24] Engelbreight Yu. K. About the nonlinear deformation waves in a relaxing and inhomogeneous medium // *Symposium materials "Nonlinear deformation waves Tallin*, January 31 – February 3, 1978. Part 1. – P. 169–184. (in Russian).

[25] Achenbach J. D., Reddy D. R. Note on wave propagation in lineary viscoelastic media // Zeitschr. fur angew. Match. und Phus., 1967. – Vol. 18, № 1. P. 141–144.

[26] Boa-The Chu. Transverse shock waves in incompressible elastic solids. J. Mech. Phys. Solids, 1967. – Vol. 15. P. 1–14.

[27] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Rev., 1995. – Vol. 48, № 1. P. 1–39.

[28] Tomas T. Y. Plastic Flow and fracture in solids. New York, London : Academic Press, 1961. – 271 p.