

О. В. Дудко, В. Е. Рагозина

О ПЛОСКИХ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЯХ УПРУГОЙ СЛАБОПОРИСТОЙ СРЕДЫ

*Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения РАН,
г. Владивосток, Россия*

Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия

Аннотация. В работе исследуются особенности нелинейной динамики деформирования слабопористого материала в рамках упругой кусочно-линейной модели с одной ненулевой сингулярной точкой в области сжатия. На примере решения нестационарной краевой задачи о возникновении плоского одномерного сильного разрыва деформаций и его движении с постоянной скоростью в пористом полупространстве показаны некоторые сходства и отличия в нелинейной динамике пористых и разномодульных материалов.

Ключевые слова: слабопористая среда, упругость, кусочно-линейная модель, нестационарное нагружение, сильный разрыв.

УДК: 539.3

Введение. Твердые среды, которые механика деформирования относит к классу пористых, равным образом можно найти как в естественной природной форме (например, вулканические и осадочные породы), так и среди современных искусственных материалов. К последним относятся пенометаллы — различные вспененные (газонаполненные) сплавы алюминия, никеля, магния, меди и др. Пенометаллы обладают широким спектром полезных свойств [1, 2], среди которых наиболее привлекательными для современной промышленности являются их малая плотность по сравнению с основным материалом и способность поглощать ударную энергию. В зависимости от степени пористости и уровня прилагаемой нагрузки такие материалы могут вести

© Дудко О. В., Рагозина В. Е., 2017

Дудко Ольга Владимировна

e-mail: dudko@iasp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук; доцент, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Рагозина Виктория Евгеньевна

e-mail: ragoza@vls.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматизации и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия

Поступила 10.07.2017

себя и как упругопластические, и как упругие среды с переменными модулями упругости в свободном и компактированном состояниях [3]–[5]. В работе рассматриваются особенности нестационарного процесса ударного деформирования слабопористого материала, который с учетом предположений о малости деформаций и обратимости закрытия и раскрытия пор можно считать упругой кусочно-линейной разнопрочной средой с сингулярностью в области сжатия [5]. Применяемые здесь подходы к анализу динамики деформирования пористой среды во многом основаны на результатах [6]–[8], полученных для изотропноупругой среды с различным сопротивлением растяжению и сжатию. На примере решения нестационарной краевой задачи о возникновении плоской одномерной поверхности сильного разрыва и ее движении с постоянной скоростью покажем некоторые сходства и отличия в нелинейной динамике деформирования пористых и разномодульных сред.

1. Модельные соотношения динамики упругого деформирования слабопористой среды. Слабопористыми средами принято считать материалы с пористостью 0.1–5.0% [3, 4]. Диаграмма одноосного деформирования упругой слабопористой среды [5] в случае малости деформации e имеет вид кусочно-линейной функции $\sigma(e)$ с одной сингулярной точкой $\sigma^* = \sigma(e^*)$ в области сжатия ($e^* < 0$, $\sigma^* < 0$) (рис. 1). При динамическом изменении напряжения $\sigma(e)$ в момент его перехода через значение

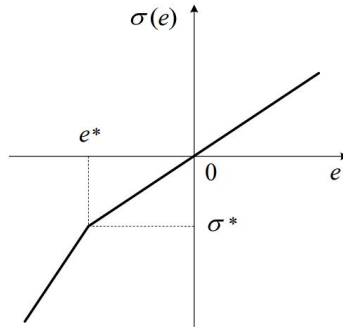


Рис. 1. Диаграмма одноосного деформирования упругой слабопористой среды

σ^* (критический уровень, при котором происходит упругое закрытие или раскрытие пор) скачком изменяются значения механических параметров материала — плотности ρ и упругих модулей λ , μ (параметров Ламе):

$$\sigma(e) = \begin{cases} (\lambda_0 + 2\mu_0)e, & e^* \leq e < +\infty, \\ (\lambda_1 + 2\mu_1)e + \Delta\sigma, & -\infty < e \leq e^*, \end{cases} \quad (1)$$

$$\Delta\sigma = (\lambda_0 - \lambda_1 + 2(\mu_0 - \mu_1))e^* > 0, \quad e^* < 0.$$

В зависимости (1) параметры с индексом 0 соответствуют состоянию среды с раскрытыми порами, с индексом 1 — компактированному состоянию с закрытыми порами. В случае плоских одномерных движений точек такой среды ее уравнение движения в прямоугольной декартовой системе координат при малых деформациях принимает

простую форму:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad C = \begin{cases} a = \sqrt{\frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}}, & e \leq e^*, \\ b = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho_0}}, & e > e^*, \end{cases} \quad (2)$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \rho_1 = \frac{\rho_0}{1 - \theta}, \quad a > b,$$

где u — единственная ненулевая компонента вектора перемещений точек среды ($u_1(x_1, t) = u(x, t)$, $u_2 = u_3 = 0$), зависящая от пространственной координаты x и времени t ; плотность среды ρ_1 при закрытых порах вычисляется через плотность некомпактированного материала ρ_0 и его заданную пористость θ [3]. Очевидно, что $\rho_1 = \rho_0$ при $\theta = 0$ для сплошного материала без пор, поэтому для рассматриваемой здесь слабопористой среды будем считать, что $\theta \ll 1$ и плотность при раскрытых и закрытых порах неизменна ($\rho_1 = \rho_0 = \rho$). Такое предположение не оказывает существенного влияния на результаты, но позволяет несколько упростить дальнейший анализ. Характеристическая скорость C в уравнении (2) принимает различные значения в зависимости от уровня деформации e (а точнее, от состояния пор — закрытого или раскрытого). В [6]–[8] для нестационарных краевых задач динамики разномодульных кусочно-линейных упругих сред показано, что подобное свойство модельных соотношений может приводить к появлению в обобщенных решениях различных нелинейных эффектов — ударных волн, волн ускорений, движущихся слоев недеформированной среды и др. Модель (1)–(2) отличается от используемых в [6]–[8] соотношений расположением особой точки диаграммы $\sigma(e)$. Если у разномодульной упругой среды особенность находится в точке $\sigma(0) = 0$ и изменение значения C происходит при переходе от растяжения к сжатию (или наоборот), то в пористой среде подобные нелинейные эффекты динамики деформирования можно получить без смены типа напряженно-деформированного состояния, не выходя на протяжении всего динамического процесса из области $e \leq 0$, $\sigma(e) \leq 0$. Покажем это на примере решения простой краевой задачи о нестационарном одномерном сжатии пористой среды.

2. Нестационарное одномерное сжатие пористого полупространства. Возникновение плоского одномерного сильного разрыва с постоянной скоростью. Считаем, что до момента времени $t = 0$ полупространство $x \geq 0$, заполненное упругой слабопористой средой (1), находилось в недеформированном состоянии. Положим, что с момента $t = 0$ полупространство подвергается нестационарному сжатию под действием граничной нагрузки $\sigma^0(e) = \sigma(e)|_{x=0} < 0$, монотонно убывающей с ростом t от начального значения $\sigma_0 = \sigma^0(e)|_{t=0} \in (\sigma^*; 0)$ и в некоторый момент времени $t = t^* > 0$ переходящей через особую точку σ^* . Разобьем решение краевой задачи на две последовательные временные стадии: $0 \leq t < t^*$ и $t \geq t^*$.

1) $0 \leq t < t^*$. Пусть с момента $t = 0$ приложение сжимающей нагрузки $\sigma^0(e)$ на границе полупространства приводит к одномерному движению точек граничной плоскости $x = 0$ по известному закону $u(0, t) = \varphi(t) \geq 0$, где $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая на интервале $t \in [0; t^*)$ нелинейная функция такая, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$, $\varphi''(t) > 0$ (рис. 2, а).

Дополнительное ограничение, наложенное в условии задачи на начальное значение граничного напряжения σ_0 , обеспечивает отсутствие эффекта мгновенного закрытия пор при $t = 0$. Вследствие такого воздействия от границы $x = 0$ в момент времени $t = 0$ отделяется плоский одномерный фронт сжатия $\Sigma_0(t)$ (рис. 2, б) — первичный

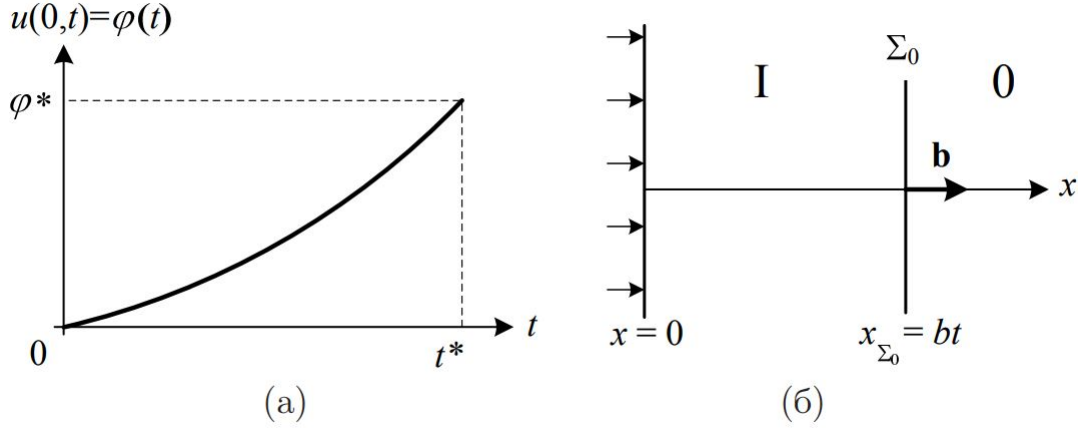


Рис. 2. Постановка задачи при $0 \leq t < t^*$: (а) функция граничного перемещения $u(0,t) = \varphi(t)$; (б) волновая картина с первичным фронтом сжатия $\Sigma_0(t)$ ($|\mathbf{b}| = b$)

скачок деформаций с координатой $x_{\Sigma_0}(t) = bt$, который распространяется в недеформированное полупространство со скоростью $b = \text{const}$, соответствующей некомпактированному состоянию среды. Движение точек среды за фронтом $\Sigma_0(t)$ подчиняется уравнению (2), решение которого для области $x \in [0; bt]$ при $t \in [0; t^*)$ (область I на рис. 2, б) можно записать в форме Д'Аламбера:

$$u^I(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{b}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{b}\right), \quad (3)$$

где f_1, g_1 — неизвестные функции. Вычисляем их из уравнения (2) с учетом условия непрерывности перемещений $u^I|_{x=bt} = 0$ на поверхности $\Sigma_0(t)$ и краевого условия $u^I(0,t) = \varphi(t)$:

$$f_1\left(t - \frac{x}{b}\right) = \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right), \quad g_1(x,t) = 0,$$

откуда согласно (3) получаем решение задачи на интервале времени $t \in [0; t^*)$:

$$u^I(x,t) = \varphi\left(t - \frac{x}{b}\right). \quad (4)$$

Из (1), (2) записываем функцию для динамического поля напряжения в области I, соответствующего перемещению (4):

$$\sigma^I(x,t) = -\rho b \varphi'\left(t - \frac{x}{b}\right). \quad (5)$$

2) $t \geq t^*$. В момент времени $t = t^*$ перемещение на границе полупространства достигает значения

$$u^I(0,t^*) = \varphi(t^*) = \varphi^* = \text{const}, \quad (6)$$

при котором соответствующее ему граничное напряжение $\sigma^0(e) = \sigma^I(e)|_{x=0} = -\varphi'(t)/b$, вычисляемое из (1), (2) и (4), становится равным σ^* . Это приводит к закрытию пор в малой окрестности границы полупространства и соответственно к изменению в этой области механических параметров материала с множества $\{\lambda_0, \mu_0\}$ на множество $\{\lambda_1, \mu_1\}$. Первичный фронт сжатия $\Sigma_0(t)$ достигает в этот момент положения

$x = bt^*$, а мгновенное распределение поля перемещения в области $x \in [0; bt^*]$ согласно решению (4) становится равным

$$u^I(x, t^*) = \varphi\left(t^* - \frac{x}{b}\right).$$

Дальнейшее нарастание модуля сжимающей граничной нагрузки $\sigma^0(e)$ после ее перехода через сингулярную точку σ^* приводит к тому, что слой материала с закрытыми порами с течением времени расширяется от границы полупространства в направлении увеличения координаты x (область II на рис. 3, а). На переднем фронте этого слоя — поверхности $\Sigma_1(\tau)$ ($\tau = t - t^*$) — вследствие смены механических параметров среды в уравнении движения (2) скачком происходит изменение характеристической скорости C со значения b на значение $a > b$. В упругой разномодульной среде такое разрывное увеличение характеристической скорости возможно только на ударной волне [7]–[9], движущейся со скоростью $G(\tau)$ ($b < G(\tau) < a$) в область предварительно растянутой среды и скачком изменяющей тип деформированного состояния с растяжения на сжатие. Однако в упругом пористом материале, в отличие от разномодульной среды, сильный разрыв деформаций может возникнуть в области, предварительно сжатой до некоторого уровня $e^0 > e^*$ (т. е. предварительно растягивать среду не требуется, что и демонстрирует приведенное далее решение).

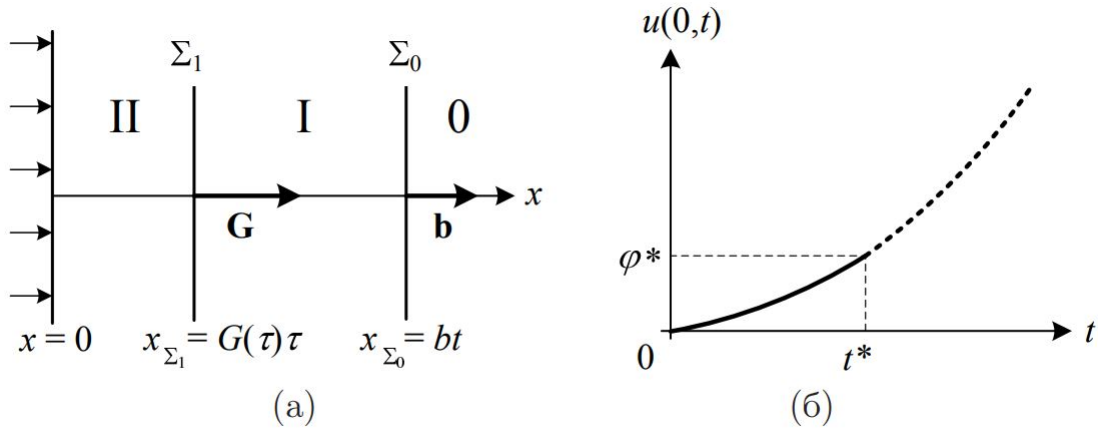


Рис. 3. Постановка задачи при $t \geq t^*$: (а) волновая картина с сильным разрывом $\Sigma_1(\tau)$ ($|\mathbf{G}| = G(\tau)$); (б) функция граничного перемещения $u(0, t)$ (сплошная линия — заданная на интервале $t \in [0; t^*]$) функция $\varphi(t)$, пунктирная линия — неизвестная при $t \geq t^*$ часть функции $u(0, t)$)

Решение задачи в области II за фронтом $\Sigma_1(\tau)$ (рис. 3, а), как и на предыдущей стадии, можно представить в форме Д'Аламбера

$$u^{II}(x, \tau) = f_2\left(\tau - \frac{x}{a}\right) + g_2\left(\tau + \frac{x}{a}\right), \quad \tau = t - t^* \quad (7)$$

с неизвестными функциями f_2, g_2 . Для их вычисления на границе области II — движущейся поверхности сильных разрывов $\Sigma_1(\tau)$ — необходимо поставить дополнительные краевые условия, связывающие скачкообразные изменения параметров напряженно-деформированного состояния и кинематики среды. Такими дополнительными соотношениями на $\Sigma_1(\tau)$ являются следствия законов сохранения для сплошной среды

(условия совместности разрывов первого порядка [10], [11]) и условие непрерывности перемещений, записанные для плоского одномерного движения точек среды в предположении малости деформаций:

$$\sigma^+ - \sigma^- = -\rho G(v^+ - v^-), \quad v^+ - v^- = -G \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^- \right\}, \quad u^+ = u^-. \quad (8)$$

В (8) $G = G(\tau)$ — скорость распространения поверхности $\Sigma_1(\tau)$ с координатой $x_{\Sigma_1}(\tau) = \int_0^\tau G(\xi) d\xi$; верхние индексы "+" и "-" обозначают значения величины в малой окрестности перед $\Sigma_1(\tau)$ и сразу за ней соответственно. В общем случае $G(\tau)$ — еще одна неизвестная функция, в аргументы которой помимо времени и параметров предварительного деформированного состояния входят неизвестные характеристики динамического процесса за фронтом $\Sigma_1(\tau)$.

В отношении краевых условий на границе $x = 0$ предположим, что функция перемещения граничных точек $\varphi(t)$ при $t \geq t^*$ имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi(\tau + t^*) = \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*, \quad \tilde{\varphi}(0) = 0, \quad \tau \geq 0, \quad (9)$$

где φ^* — постоянное значение (6), достигнутое первоначальной функцией $\varphi(t)$ к моменту $t = t^*$, а $\tilde{\varphi}(\tau)$ — функция, описывающая изменение граничного перемещения с момента $t = t^*$ (рис. 3, б).

Вычисление скорости $G(\tau)$ — достаточно трудоемкая процедура даже в простейших случаях одноосного или центральносимметричного деформирования. Поэтому воспользуемся подходом, предложенным в [8] для сходящихся сферических волн в разномодульной упругой среде: положим, что скорость фронта $\Sigma_1(\tau)$ известна, а функцию граничного перемещения $\tilde{\varphi}(\tau)$, приводящего с момента $\tau = 0$ к возникновению такой поверхности разрывов, наоборот, сочтем неизвестной и требующей определения. Таким образом, решение задачи на этапе $t \geq t^*$ связано, во-первых, с построением поля перемещения $u^{II}(x, \tau)$ в динамической области $x \in [0; x_{\Sigma_1}(\tau)]$ и, во-вторых, с изменением первоначально заданной функции граничных перемещений $\varphi(t)$ согласно полученному u^{II} при $x = 0$. Записывая соотношения (8) с учетом представлений (7), (9) и вычисленных для области I решений (4), (5), получаем систему для определения неизвестных функций f_2 , g_2 и $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} f_2(\tau) + g_2(\tau) &= \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*, \\ f_2\left(\tau - \frac{x_{\Sigma_1}}{a}\right) + g_2\left(\tau + \frac{x_{\Sigma_1}}{a}\right) &= \tilde{\varphi}\left(\tau - \frac{x_{\Sigma_1}}{b}\right) + \varphi^*, \\ \left\{1 - \left(\frac{x'_{\Sigma_1}}{a}\right)^2\right\} \left\{f_2\left(\tau - \frac{x_{\Sigma_1}}{a}\right) - g_2\left(\tau + \frac{x_{\Sigma_1}}{a}\right)\right\} &= \frac{b}{a} \left\{1 - \left(\frac{x'_{\Sigma_1}}{b}\right)^2\right\} \tilde{\varphi}\left(\tau - \frac{x_{\Sigma_1}}{b}\right) + \frac{\Delta\sigma}{a}. \end{aligned} \quad (10)$$

Выделяя из второго и третьего уравнений $f_2(\xi)$, $g_2(\eta)$, систему (10) можно переписать в форме

$$\begin{aligned} f_2(\tau) + g_2(\tau) &= \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*, \\ f_2(\xi) &= \frac{a+b}{2a} \tilde{\varphi}\left(\xi + x_{\Sigma_1}(\psi(\xi)) \frac{b-a}{ab}\right) + \frac{\Delta\sigma}{2a\rho} \psi(\xi) + f_0, \\ g_2(\eta) &= \frac{a-b}{2a} \tilde{\varphi}\left(\eta - x_{\Sigma_1}(\omega(\eta)) \frac{b+a}{ab}\right) - \frac{\Delta\sigma}{2a\rho} \omega(\eta) + g_0, \end{aligned} \quad (11)$$

где f_0, g_0 — константы интегрирования, для которых выполняется соотношение $f_0 + g_0 = \varphi^*$; $\psi(\xi), \omega(\eta)$ — известные функции своих аргументов ($\psi(\xi) = \omega(\eta) = \tau$), если задано $x_{\Sigma_1}(\tau)$.

Согласно (7) и (11), решение в области $x \in [0; x_{\Sigma_1}(\tau)]$ при $\tau \geq 0$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} u^{II}(x, \tau) = & \frac{a+b}{2a} \tilde{\varphi} \left(\tau - \frac{x}{a} + x_{\Sigma_1} \left(\psi \left(\tau - \frac{x}{a} \right) \right) \cdot \frac{b-a}{ab} \right) + \\ & + \frac{a-b}{2a} \tilde{\varphi} \left(\tau + \frac{x}{a} - x_{\Sigma_1} \left(\omega \left(\tau + \frac{x}{a} \right) \right) \cdot \frac{b+a}{ab} \right) + \\ & + \frac{\Delta\sigma}{2a\rho} \left\{ \psi \left(\tau - \frac{x}{a} \right) - \omega \left(\tau + \frac{x}{a} \right) \right\} + \varphi^*. \end{aligned} \quad (12)$$

Теперь, постулируя динамику поверхности Σ_1 (т. е. задавая $G(\tau)$), из (11), (12) вычисляем соответствующую такой динамике функцию $\tilde{\varphi}(\tau)$. Положим, что $G(\tau) = G = \text{const}$ и $x_{\Sigma_1}(\tau) = G\tau$ ($b < G < a$, $\tau \geq 0$). В этом случае введенные в (11) функции $\psi(\xi), \omega(\eta)$ примут вид:

$$\psi(\xi) = \frac{a}{a-G}\xi, \quad \omega(\eta) = \frac{a}{a+G}\eta,$$

а решение (12) запишется в более компактной форме

$$\begin{aligned} u^{II}(x, \tau) = & \frac{a+b}{2a} \tilde{\varphi} \left(\alpha \left(\tau - \frac{x}{a} \right) \right) + \frac{a-b}{2a} \tilde{\varphi} \left(\beta \left(\tau + \frac{x}{a} \right) \right) + \frac{\Delta\sigma(G\tau-x)}{\rho(a^2-G^2)} + \varphi^*, \\ \alpha = & 1 - \frac{G}{b} \cdot \frac{a-b}{b-G}, \quad \beta = 1 - \frac{G}{b} \cdot \frac{a+b}{a+G}. \end{aligned} \quad (13)$$

Возвращаясь к представлению (9), откуда $\tilde{\varphi}(\xi) = \varphi(\xi+t^*) - \varphi^*$, из (13) окончательно получаем решение в области II за фронтом волны $\Sigma_1(\tau)$:

$$u^{II}(x, \tau) = \frac{a+b}{2a} \varphi \left(\alpha \left(\tau - \frac{x}{a} \right) + t^* \right) + \frac{a-b}{2a} \varphi \left(\beta \left(\tau + \frac{x}{a} \right) + t^* \right) + \frac{\Delta\sigma(G\tau-x)}{\rho(a^2-G^2)}. \quad (14)$$

Напряжение при $x \in [0; x_{\Sigma_1}(\tau)]$ ($\tau \geq 0$), соответствующее такому перемещению, с учетом (1), (2) примет вид:

$$\sigma^{II}(x, \tau) = -\rho\alpha \frac{a+b}{2} \varphi' \left(\alpha \left(\tau - \frac{x}{a} \right) + t^* \right) + \rho\beta \frac{a-b}{2} \varphi' \left(\beta \left(\tau + \frac{x}{a} \right) + t^* \right) - \frac{G^2}{a^2-G^2} \Delta\sigma. \quad (15)$$

Теперь из первого уравнения системы (11) и записанного при $x = 0$ решения (14) получаем выражение для функции $\tilde{\varphi}(\tau)$:

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \frac{a+b}{2a} \varphi(\alpha\tau + t^*) + \frac{a-b}{2a} \varphi(\beta\tau + t^*) + \frac{\Delta\sigma}{\rho(a^2-G^2)} G\tau, \quad \tau \geq 0. \quad (16)$$

Таким образом, (16) определяет функцию $u^{II}(0, \tau) = \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*$ — перемещение точек граничной плоскости, при котором возникший в момент времени $t = t^*$ вторичный сильный разрыв $\Sigma_1(\tau)$ будет двигаться с заданной постоянной скоростью G .

Вопрос о моменте времени t^* , когда напряжение $\sigma^I(e)$ достигает на границе $x = 0$ значения σ^* , решается заданием конкретной функции $\varphi(t)$. Учитывая, что из (1), (4) можно записать:

$$\sigma^I(e^*) = (\lambda_0 + 2\mu_0) \left. \frac{\partial u^I}{\partial x} \right|_{x=0, t=t^*} = \sigma^*, \quad \left. \frac{\partial u^I}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{1}{b} \varphi'(t),$$

уравнение для вычисления t^* будет иметь вид:

$$\varphi'(t)|_{t=t^*} = -\frac{b}{\lambda_0 + 2\mu_0} \sigma^*. \quad (17)$$

Если перемещение точек границы полупространства при $t \in [0; t^*)$ задано в виде квадратичной функции $\varphi(t) = v_0 t + At^2/2$ ($v_0 = \text{const} > 0$, $A = \text{const} > 0$), то согласно (17) получаем $t^* = -A^{-1}(b\sigma^*/(\lambda_0 + 2\mu_0) + v_0)$.

Далее графически представлено решение описанной задачи, полученное для пористого материала с механическими параметрами $\rho = 2697 \text{ кг/м}^3$, $\lambda_0 = 57.793 \text{ ГПа}$, $\mu_0 = 25.690 \text{ ГПа}$, $\lambda_1 = 58.501 \text{ ГПа}$, $\mu_1 = 26.004 \text{ ГПа}$, соответствующими пеноалюминию с пористостью $\theta = 0.1\%$ [3]. Характеристическая скорость C в уравнении движения (2) для такого материала принимает значения $a = 6401.16 \text{ м/с}$, $b = 6362.35 \text{ м/с}$. В качестве постоянного значения скорости поверхности сильного разрыва $\Sigma_1(\tau)$ выбрано $G = (a + b)/2 = 6381.75 \text{ м/с}$. Деформация закрытия пор e^* принята равной $-\theta = -0.001$ [3], а соответствующее ей напряжение $\sigma^* = -0.1092 \text{ ГПа}$ вычислено из (1). Для параметров начальной квадратичной функции граничного перемещения $\varphi(t)$ заданы значения $v_0 = 0.1 \text{ м/с}$, $A = 10000 \text{ м/с}^2$, согласно которым $\sigma_0 = -1.7159 \text{ МПа} > \sigma^*$, $t^* = 0.626 * 10^{-3} \text{ с}$.

На рисунке 4 показана функция перемещения граничных точек полупространства $u(0, t)$ за весь временной период деформирования. Из графика следует, что для возникновения сильного разрыва деформаций $\Sigma_1(\tau)$ с заданной постоянной скоростью G ($b < G < a$) требуется увеличить интенсивность сжимающего воздействия на границу полупространства (а именно увеличить скорость перемещения граничных точек) по сравнению с первоначально заданным.

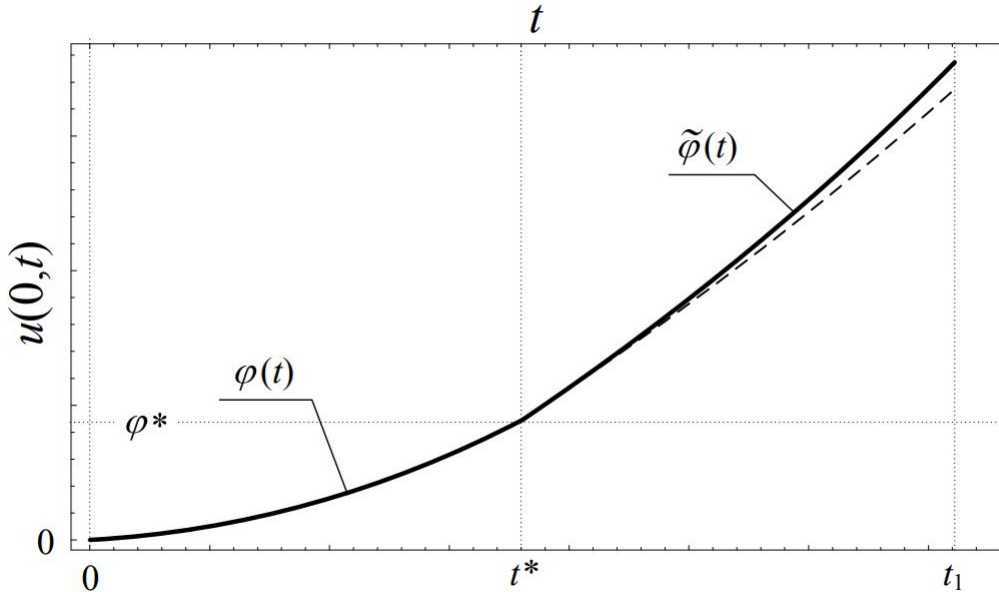


Рис. 4. Перемещение граничных точек полупространства: $u(0, t) = \varphi(t)$ при $t \in [0; t^*)$; $u(0, t) = \tilde{\varphi}(\tau) + \varphi^*$ при $t \geq t^*$ (пунктирная линия — продолжение функции $\varphi(t)$ на интервал $t \in [t^*; +\infty)$)

Мгновенное распределение поля перемещения $u(x, t)$ во всей области деформирования в момент времени $t_1 = 2t^*$ представлено на рисунке 5 (а). График $u(x, t_1)$ имеет изломы в точках $x = bt_1$ и $x = G(t_1 - t^*)$ — мгновенных координатах фронтов сильных разрывов деформаций $\Sigma_0(t)$ и $\Sigma_1(t - t^*)$ (первичной и вторичной волн сжатия). На рисунке 5 (б) показана соответствующая такому полю перемещения диаграмма напряжения $\sigma(x, t_1)$, из которой следует, что волна $\Sigma_1(\tau)$ скачком увеличивает уровень предварительных ненулевых деформаций сжатия. В [9] такая поверхность, не изменяющая тип деформированного состояния ($(\partial u / \partial x)^+ < 0$, $(\partial u / \partial x)^- < 0$), названа простой ударной волной. Наклон графика $\sigma^{II}(x, t_1 - t^*)$ в области $x \in [0; x_{\Sigma_1}]$ превосходит наклон $\sigma^I(x, t_1)$ в области $x \in [x_{\Sigma_1}; x_{\Sigma_0}]$. Выбирая различные моменты времени $t \geq t^*$, можно показать, что интенсивность разрыва $[\sigma(x, \tau)]|_{\Sigma_1(\tau)} = \sigma^I(x_{\Sigma_1(\tau)}, \tau + t^*) - \sigma^{II}(x_{\Sigma_1(\tau)}, \tau)$ на поверхности $\Sigma_1(\tau)$, нулевая при $\tau = 0$, возрастает с течением времени.

Заключение. В работе для упругой слабопористой среды показана возможность описания ее нелинейной динамики деформирования в рамках кусочно-линейной модели с ненулевой сингулярной точкой в области сжатия. Так же, как и в разномодульной среде [6]–[8], характеристическая скорость уравнения движения пористой среды может при определенных условиях изменять свое значение, что приводит к возникновению различных нелинейных эффектов — сильных и слабых разрывов деформаций. Такое свойство модели пористой среды позволяет при решении нестационарных краевых задач использовать подходы, аналогичные разработанным для кусочно-линейных разномодульных материалов [8]. Однако условия возникновения нелинейных волн деформаций в пористой среде отличны от условий для разномодульной модели [6]–[8]. Так показано, что в предварительно сжатом до некоторого уровня слабопористом упругом полупространстве вторичный сильный разрыв деформаций — простая ударная волна [9] — может возникнуть вследствие продолжающегося сжатия на границе, в отличие от разномодульной среды, где для появления ударной волны требуется воздействие в режиме предварительное растяжение с последующим сжатием. Следует заметить, что приведенные в работе результаты демонстрируют качественные особенности динамического деформирования упругой слабопористой среды без рассмотрения эффектов взаимодействия первичного и вторичного волновых фронтов. Дальнейшее решение требует привлечения подходов приближенного анализа, основанных на различных модификациях метода возмущений [12].

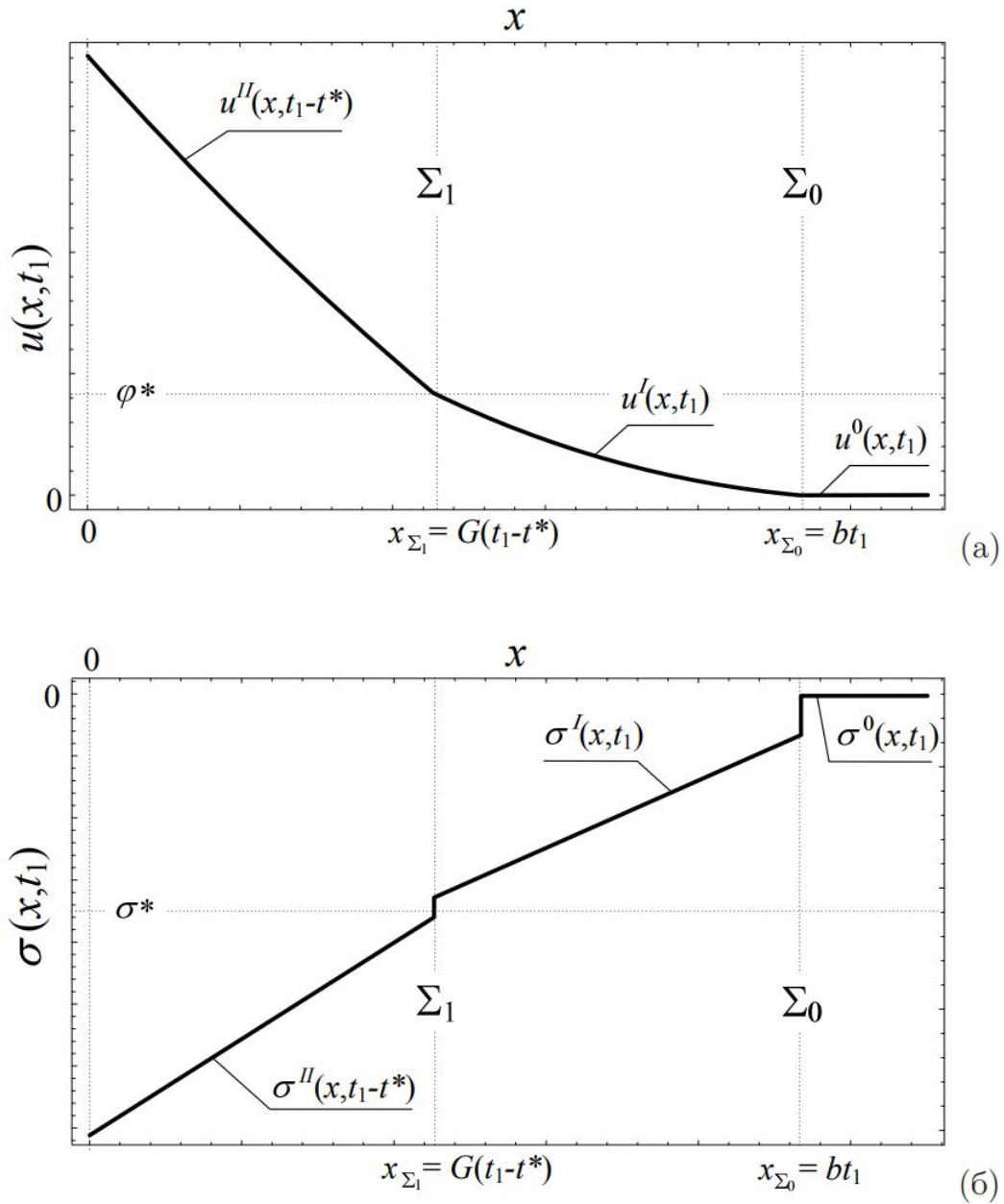


Рис. 5. Мгновенные распределения полей во всей области деформирования в момент времени $t_1 = 1.5t^*$: (а) перемещение точек среды $u(x, t_1)$; (б) напряжение $\sigma(x, t_1)$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Schaedler T. A., Jacobsen A. J., Torrents A., Sorensen A. E., Lian J., Greer J. R., Valdevit L., Carter W. B. Ultralight Metallic Microlattices // Science. 2011. Vol. 334. P. 962-965. doi: 10.1126/science.1211649.