Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3 (33). С. 16–27

В. Е. Рагозина[1], *Ю. Е. Иванова*[1,2]

О РАЗЛИЧНЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ ОПИСАНИЯ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В УПРУГОЙ СРЕДЕ В ТЕРМИНАХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЯДОВ

[1]*Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН, г. Владивосток, Россия*

[2]*Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия*

Аннотация. На примере задачи об ударном нагружении сферической полости в нелинейно-упругой среде рассматривается применение метода сращиваемых асимптотических разложений к описанию распространения одномерных ударных волн ненулевой кривизны. Показано, что в прифронтовой области сингулярная задача метода возмущений определяется решением эволюционного уравнения, отличного от уравнения плоской продольной волны. Рассмотрены различные варианты уравнений, возникающих во внешней краевой задаче, и их приближенные решения.

Ключевые слова: нелинейно-упругая среда, ударная деформация, метод возмущений, эволюционное уравнение, сферическая ударная волна.

УДК: 539.3

Введение. Изучению особенностей формирования и распространения ударных волн в твердых телах посвящено большое число научных исследований [1]—[3]. При этом здесь нет полной аналогии с гидродинамикой, так как возникающие продольные и поперечные волны в общем случае взаимосвязаны. Помимо этого, положение и геометрия ударных волн зависят от предварительных деформаций и строящегося решения за ударными волнами. Все эти факторы приводят к тому, что построение точных решений динамических задач в твердых телах практически невозможно. Приходится обращаться к приближенным аналитическим или численым методам. Среди аналитических методов высокую эффективность при решении задач с ударными волнами

Рагозина Виктория Евгеньевна
`e-mail:` ragozina@vlc.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток, Россия.
Иванова Юлия Евгеньевна
`e-mail:` ivanova@iacp.dvo.ru, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения Российской академии наук, г. Владивосток; доцент, Дальневосточный федеральный университет, г. Владивосток, Россия.

Поступила 10.07.2017

показали метод возмущений [4] и лучевой метод [5]. Ранее в [6, 7] было продемонстрировано, что применение метода сращиваемых асимптотических разложений в задачах динамики в упругих средах приводит к анализу одиночного эволюционного уравнения или системы эволюционных уравнений. Для продольных одномерных плоских волн — это уравнение Хопфа [8], поперечные одномерные плоские волны описываются уравнением Хопфа для квадрата интенсивности волнового процесса [6]. Ударные волны с ненулевой кривизной волнового фронта сводятся к эволюционным уравнениям, отличным от уравнений плоских волн [9]. В перечисленных работах основное внимание уделялось внутренней краевой задаче с получением эволюционного уравнения, его решению, сращиванию разложений. При этом внешнее разложение строилось последовательным решением ряда по сути квазистатических задач. В предлагаемой статье на примере задачи об ударном нагружении на границе сферической полости в среде рассматривается волновой процесс с ненулевой кривизной волнового фронта. Предлагаются два варианта внешней краевой задачи, приводящие на каждом шаге метода к ряду квазистатических или динамических задач. Проводится подробный анализ варианта решения, включающего динамическую внешнюю задачу, показано, что при его построении возникает необходимость решения дополнительной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, вытекающей из процедуры сращивания разложений и выполнения граничных условий.

1. Общие модельные соотношения и постановка краевой задачи. Система уравнений, задающая движение нелинейноупругой изотропной среды в пространственной криволинейной системе координат Эйлера x^i $(i = 1, 2, 3)$ имеет вид:

$$
\begin{gathered}
v^j = \dot{u}^i \left(\delta^i_j - u^i_{,j}\right)^{-1}, \quad 2\alpha_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i}u^k_{,j}, \quad \rho = \rho_0 det\left(\delta^i_j - u^i_{,j}\right), \\
\sigma^{ij}_{,j} = \rho(\dot{v}^i + v^i_{,j}v^j), \quad \sigma^i_j = \frac{\rho}{\rho_0}\left(\delta^i_k - 2\alpha^i_k\right)\frac{\partial W}{\partial \alpha^j_k}, \\
W(I_1, I_2, I_3) = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + lI_1I_2 + mI_1^3 + nI_3 + \ldots, \qquad (1.1) \\
I_1 = \alpha^i_i, \quad I_2 = \alpha^i_j\alpha^j_i, \quad I_3 = \alpha^i_j\alpha^j_k\alpha^k_i, \\
u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk}u^k, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij}u_k, \quad \dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \quad \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},
\end{gathered}
$$

где u^i и v^i — контравариантные компоненты векторов перемещений и скорости точек среды, α_{ij} — ковариантные компоненты тензора деформаций Альманси, σ^{ij} — контравариантные компоненты тензора напряжений Эйлера—Коши, ρ и ρ_0 — плотность среды в текущем и свободном состоянии , W — упругий потенциал, λ, μ, l, m, n — упругие модули среды, Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля второго рода, δ^i_j — дельта Кронекера. Формула для W в (1.1) записана при адиабатическом приближении описания движения среды. В (1.1) и далее принято соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу, многоточием обозначены невыписанные слагаемые с более высоким порядком малости.

Пусть в пространстве, занятом нелинейно-упругой средой, есть сферическая полость радиуса r_0. Решение задачи удобно строить в сферической системе координат: $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$. До момента времени $t = 0$ деформации в среде отсутствуют. С момента $t = 0$ к внутренней границе полости приложено ударное нагружение, вызывающее известные перемещения на границе:

$$
\begin{gathered}
u_r\big|_{r=r_0+f(t),\, t\geq 0} = f(t), \quad f'(0)>0, \\
u_\theta\big|_{r=r_0+f(t),\, t\geq 0} = 0, \quad u_\varphi\big|_{r=r_0+f(t),\, t\geq 0} = 0,
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

где $f(t)$ — заданная функция времени. Полагаем, что результатом удара будет поле перемещений $u = u_r(r,t)$, $u_\theta = u_\varphi = 0$. В соответствии с условием $f'(0) > 0$ мгновенно образуется расходящаяся сферическая ударная волна. Следствием выполнения геометрических, кинематических [10] и динамических [11] условий совместности на этой поверхности разрывов будут краевые условия:

$$
\begin{gathered}
u\Big|_{r=r_0+\int\limits_0^t G(\xi)d\xi} = 0, \quad \tau = [u_{,r}]\Big|_{r=r_0+\int\limits_0^t G(\xi)d\xi} = -u^-_{,r}\Big|_{r=r_0+\int\limits_0^t G(\xi)d\xi}, \\
G = C\left(1+\theta_1\tau+\theta_2\tau^2+\ldots\right), \\
\theta_1 = \frac{9}{4}-\frac{3}{2}\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}, \quad \theta_2 = \frac{7}{4}-\frac{3}{2}\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}-\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}\right)^2, \\
C = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}},
\end{gathered}
\tag{1.3}
$$

где квадратными скобками обозначен скачок величины заключенной в них, G — скорость движения ударной волны в направлении единичной внешней нормали, τ — интенсивность ударной волны.

Переписывая систему уравнений (1.1) в сферических координатах для поставленной краевой задачи, приходим к единственному уравнению движения:

$$
\begin{gathered}
u_{,rr}\left(1+\alpha_1 u_{,r}+\alpha_2\frac{u}{r}\right)+2\frac{u_{,r}}{r}-2\frac{u}{r^2}+\alpha_3\frac{u^2}{r^3}+\frac{u_{,r}^2}{r}+ \\
+\alpha_5\frac{uu_{,r}}{r^2} = \frac{1}{C^2}\left\{\ddot u\left(1-u_{,r}-2\frac{u}{r}\right)+2\dot u\dot u_{,r}\right\}+\ldots, \\
\alpha_1 = -9+6\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{-8\lambda-4\mu+4l+12m}{\lambda+2\mu}, \\
\alpha_3 = \frac{18(\lambda+\mu)-6(2l+4m+n)}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_4 = \frac{-16\lambda-26\mu+8l+12m+6n}{\lambda+2\mu}, \\
\alpha_5 = \frac{-2\lambda+8\mu+4l+12m}{\lambda+2\mu}.
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Получить точное решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (1.4) представляется невозможным. Поэтому далее будем искать решение краевой задачи (1.2)—(1.4), используя метод сращиваемых асимптотических разложений.

2. Внешнее разложение решения задачи об одномерной сферической продольной ударной волне. Рассмотрим два варианта выбора безразмерных переменных, приводящих к различным уравнениям внешней краевой задачи метода возмущений и их решение. Сначала зададим безразмерные переменные в виде:

$$
s = \frac{r-r_0}{r_0}\varepsilon^{-3}, \quad m = \frac{r-r_0-Ct}{r_0}\varepsilon^{-2}, \quad w(s,m) = \frac{u(r,t)}{r_0}\varepsilon^{-4}, \quad \varepsilon \ll 1,
\tag{2.1}
$$

где ε — малый параметр задачи, вид которого определяется выбором функции нагружения на границе $r = r_0$. В новых переменных внешняя краевая задача запишется как:

$$\begin{gathered}
\left(w_{,ss} + 2\varepsilon w_{,sm} + \varepsilon^2 w_{,mm}\right)\left\{1 + \alpha_1\varepsilon\left(w_{,s} + \varepsilon w_{,m}\right) + \alpha_2\frac{w\varepsilon^4}{1+\varepsilon^3 s}\right\} + \\
+2\frac{\varepsilon^3\left(w_{,s} + \varepsilon w_{,m}\right)}{1+\varepsilon^3 s} - 2\frac{w\varepsilon^6}{\left(1+\varepsilon^3 s\right)^2} + \alpha_3\frac{w^2\varepsilon^{10}}{\left(1+\varepsilon^3 s\right)^3} + \alpha_4\frac{\varepsilon^4\left(w_{,s} + \varepsilon w_{,m}\right)^2}{1+\varepsilon^3 s} + \\
+\alpha_5\frac{w\varepsilon^7\left(w_{,s} + \varepsilon w_{,m}\right)}{\left(1+\varepsilon^3 s\right)^2} = \varepsilon^2 w_{,mm}\left\{1 - 2\varepsilon\left(w_{,s} + \varepsilon w_{,m}\right)\right\} - \\
-2\frac{\varepsilon^6 w w_{,mm}}{1+\varepsilon^3 s} + 2\varepsilon^3 w_{,m}\left(w_{,ms} + \varepsilon w_{,mm}\right) + \ldots, \\
w\big|_{s=\varepsilon g(s\varepsilon - m),\; s\varepsilon - m \geq 0} = g\left(s\varepsilon - m\right), \quad w\big|_{s\varepsilon - m \leq 0} = 0,
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где функция $g\left(s\varepsilon - m\right)$ соответствует функции нагружения на границе $f(t)$. Представляя искомую функцию безразмерных перемещений асимптотическим рядом по степеням малого параметра

$$w(s,m) = w_0(s,m) + \varepsilon w_1(s,m) + \varepsilon^2 w_2(s,m) + \ldots \tag{2.3}$$

и подставляя в систему уравнений (2.2), на i-ом шаге метода получим уравнение:

$$w_{i,ss} = B_i(s,m), \quad B_0(s,m) = 0,$$

где функции $B_i(s,m)$ определяются предыдущими приближениями. В итоге методом последовательных приближений найдем внешнее разложение решения до требуемого порядка точности:

$$\begin{gathered}
w(s,m) = f_0(m)s + g(-m) + \varepsilon\left\{-f_0'(m)s^2 + f_1(m)s - f_0(m)g(-m)\right\} + \\
+\varepsilon^2\left\{\frac{2}{3}f_0''(m)s^3 - f_1'(m)s^2 + f_2(m)s - f_1(m)g(-m) + \right. \\
\left. +g(-m)g'(-m)\right\} + \ldots,
\end{gathered} \tag{2.4}$$

где $f_i(m)$ — неизвестные функции, которые определяются сопоставлением с дополнительным внутренним разложением, построенным в области, где полученное разложение (2.4) становится неравномерно пригодным. Выбранный вариант безразмерных переменных (2.1) на каждом шаге метода приводит к решению квазистатической задачи, хотя исходная внешняя краевая задача является нестационарной. Ранее подобное внешнее решение было получено для антиплоской деформации в [9], где подробно описана процедура дальнейшего решения. Перечислим его основные этапы, не останавливаясь детально на их описании. Заметим, что неравномерность ряда (2.4) по пространственной координате наиболее полно проявляется при переходе к масштабам $s \sim \varepsilon^{-3}$, при этом внутренняя задача метода на нулевом шаге построения асимптотики основана на интегрировании нелинейного эволюционного уравнения для продольных сферических волн [12]. Сопоставление внешнего и внутреннего решений проводится стандартным образом с определением неизвестных констант решения эволюционного уравнения и неизвестных функций $f_i(m)$ в (2.4).

В настоящей статье авторы описывают еще одно решение краевой задачи (1.2)—(1.4), включающее внешнее решение асимптотической схемы, учитывающее в полном объеме динамические свойства исходной краевой задачи. С этой целью определим следующие безразмерные переменные:

$$y = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad z = \frac{Ct}{r_0}, \quad v(y, z) = \frac{u(r, t)}{r_0}\phi^{-1}, \tag{2.5}$$

где ϕ — малый параметр задачи. В этом случае уравнение движения (1.4) запишется в виде:

$$\begin{gathered} v_{,yy}\left(1 + \alpha_1\phi v_{,y} + \alpha_2\frac{\phi v}{1+y}\right) + 2\frac{v_{,y}}{1+y} - 2\frac{v}{(1+y)^2} + \alpha_3\frac{\phi v^2}{(1+y)^3} + \\ +\alpha_4\frac{\phi v_{,y}^2}{1+y} + \alpha_5\frac{\phi v v_{,y}}{(1+y)^2} = v_{,zz}\left\{1 - 2\phi v_{,y} - 2\frac{\phi v}{1+y}\right\} + 2\phi v_{,z}v_{,yz} + \dots\ . \end{gathered} \tag{2.6}$$

В качестве примера, одновременно позволяющего продемонстрировать особенности построения решения внешней краевой задачи и получить обозримые результаты вычислений, выберем частный случай квадратичной функции вида

$$v\big|_{y=-\phi(2az+az^2)} = -2az - az^2, \quad a = const. \tag{2.7}$$

Как и ранее в (2.3), представим неизвестную функцию $v(y, z)$ рядом по степеням малого параметра ϕ. Последовательная подстановка ряда (2.3) в уравнение движения (2.6) приводит на i-ом шаге метода к решению уравнения гиперболического типа:

$$\Phi_{i,\xi\eta} = H_i(\xi, \eta), \quad v_i = \left(\frac{\Phi_i}{1+y}\right)_{,y}, \quad \xi = z - y, \quad \eta = z + y, \tag{2.8}$$

где функции $H_i(\xi, \eta)$ определяются предыдущими шагами метода, причем $H_0 = 0$. В результате получим внешнее решение в виде:

$$\begin{gathered} v(y,z) = -a\left(\frac{2\xi}{1+y} + \frac{\xi^2}{(1+y)^2}\right) + \phi\left[\frac{N'(\eta) - X'(\xi)}{1+y} - \frac{N(\eta) + X(\xi)}{(1+y)^2} - \right. \\ -a^2\left\{2\left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4}\right)\frac{1}{1+y} + \left(2\alpha_2 - 4\alpha_1 - \frac{3}{2}\varphi\right)\frac{\xi}{(1+y)^2} - 2\left(3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \right.\right. \\ \left. -\frac{\alpha_3}{4} + \frac{5}{4}\varphi + 1\right)\frac{\xi^2}{(1+y)^3} + \frac{1}{3}\left(-\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{\varphi}{2} - 1\right)\left(\frac{8\xi^3}{(1+y)^4} + \right. \\ \left.\left.\left. + \frac{2\xi^4}{(1+y)^5}\right)\right\}\right] + \dots, \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_4 - 2, \end{gathered} \tag{2.9}$$

где $X(\xi)$, $N(\eta)$ – пока неизвестные функции. Подстановка (2.9) в граничное условие (2.7), позволяет получить одно из двух уравнений, связывающих эти неизвестные функции:

$$\begin{gathered} X(z) + X'(z) = N'(z) - N(z) - a^2\left\{2\left(\alpha_1 + \frac{\varphi}{4}\right) + \left(2\alpha_2 - 4\alpha_1 - \right.\right. \\ \left. -\frac{3}{2}\varphi + 4\right)z - 2\left(3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{4} + \frac{5}{4}\varphi - 4\right)z^2 + \\ \left. + \left(-\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{\varphi}{2} + 2\right)\left(\frac{8}{3}z^3 + \frac{2}{3}z^4\right)\right\}. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Внешнее решение (2.9) не может быть применено для описания деформаций и перемещений в окрестности переднего фронта ударной волны (1.3). Одновременно оно остается неопределенным до конца, поскольку неизвестные функции $X(\xi)$ и $N(\eta)$ связаны только (2.10). Дополнительным краевым условием для них следует считать соотношение, следующее из сопоставления внешнего решения (2.9) с внутренним, которое необходимо построить в окрестности ударной волны. Решение (2.9) теряет равномерный характер, если $\xi \sim \phi$ или же $y \sim \phi^{-1}$. Рассмотрим возникающую при этом внутреннюю задачу асимптотической процедуры.

3. Асимптотическое представление решения в прифронтовой области ударной волны. Пусть для начала равномерность ряда (2.9) нарушается при малых значениях переменной $\xi \sim \phi$. Тогда для перехода в область, удаленную от нагружаемой границы, изменим масштабы полухарактеристической переменной и неизвестной функции:

$$p = \phi^{-1}\xi, \quad n = y, \quad f(p,n) = v(y,z)\phi^{-1}, \tag{3.1}$$

где функция $f(p,n)$ – новая неизвестная функция. В новых переменных уравнение движения (2.6) запишется в виде:

$$\begin{gathered}
(\phi f_{,nn} - 2f_{,pn})\left\{1 + \alpha_1\phi(\phi f_{,n} - f_{,p}) + \alpha_2\phi^2\frac{f}{1+n}\right\} + \\
+ f_{,pp}\left\{\alpha_1(\phi f_{,n} - f_{,p}) + (\alpha_2+2)\phi\frac{f}{1+n} + 2\phi f_{,n}\right\} + \\
+2\frac{(\phi f_{,n} - f_{,p})}{1+n} - 2\phi\frac{f}{(1+n)^2} + \alpha_3\phi^3\frac{f^2}{(1+n)^3} + \alpha_4\phi\frac{(\phi f_{,n} - f_{,p})^2}{1+n} + \\
+\alpha_5\phi^2\frac{f(\phi f_{,n} - f_{,p})}{(1+n)^2} - 2f_{,p}(\phi f_{,pn} - f_{,pp}) + \ldots = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Подстановка искомых перемещений в виде ряда по степеням малого параметра ϕ

$$f(p,n) = f_0(p,n) + \phi f_1(p,n) + \ldots$$

в уравнение движения (3.2) дает в нулевом приближении эволюционное уравнение вида:

$$v_{0,n} + \frac{\alpha_1}{2}v_0 v_{0,p} + \frac{v_0}{1+n} = 0, \quad v_0 = f_{0,p}. \tag{3.3}$$

Уравнение (3.3) описывает поведение решения в прифронтовой области ударной волны. Последнее слагаемое уравнения (3.3) отличает его от известного уравнения Хопфа для плоских продольных ударных волн. Оно отвечает за сферический характер затухания ударной волны. Общее решение (3.3) вдоль характеристик можно записать в виде:

$$v_0(1+n) = F\left(p - \frac{\alpha_1}{2}v_0(1+n)\ln(1+n)\right), \tag{3.4}$$

где F — произвольная функция своего аргумента, ее конкретный вид определяется краевыми условиями задачи и внешним решением (2.9). Из (3.4) следует, что характеристики в плоскости (p,n) будут логарифмическими кривыми, вдоль которых будет сохранять постоянное значение функция $v_0(1+n)$, а интенсивность $v_0(p,n)$ с увеличением радиуса n будет затухать. Внешнее решение (2.9) позволяет выбрать вид частного решения внутренней области:

$$v_0(p,n) = \frac{A}{1+n},$$

где A — неизвестная константа, и получить для перемещений

$$f_0(p,n)=\frac{Ap}{1+n}+\varphi_0(n),$$

где $\varphi_0(n)$ — неизвестная функция. Вид функции $\varphi_0(n)$ определяется из условия (1.3), записанного в безразмерных переменных внутренней области:

$$f_0(p,n)\big|_{p=p_0(n)}=0,$$

где функция $p=p_0(n)+\phi p_1(n)+\phi^2 p_2(n)+\ldots$ задает связь переменных p, n на фронте ударной волны. Для ее определения получим уравнение

$$\frac{dp_0}{dn}=\theta_1 f_{0,p}(n,p_0(n)),\quad p_0\big|_{n=0}=0,\quad \theta_1=-\frac{\alpha_1}{4},$$

из которого следует, что $p_0(n)=A\theta_1\ln(1+n)$, $\varphi_0(n)=-\dfrac{A^2\theta_1\ln(1+n)}{1+n}$. В результате находим внутреннее решение в виде:

$$f_0(p,n)=\frac{Ap}{1+n}-\frac{A^2\theta_1\ln(1+n)}{1+n}. \tag{3.5}$$

Неизвестную константу A определяем при сращивании внешнего и внутреннего разложений. Сопоставляя два шага внешнего и один внутреннего разложений:

$$v_0(y,\xi)+\phi v_1(y,\xi)\big|_{y=n,\ \xi=\phi p}=\phi f_0(p,n), \tag{3.6}$$

получаем, что $A=-2a$. Помимо этого, условие (3.6) позволяет определить недостающее уравнение для нахождения неизвестных функций внешнего решения:

$$N'(2n)-X'(0)-\frac{X(0)+N(2n)}{1+n}-2a^2\left(\alpha_1+\frac{\varphi}{4}\right)+4a^2\theta_1\ln(1+n)=0, \tag{3.7}$$

в которое входят неизвестные константы $X'(0)$, $X(0)$. Система уравнений (3.7), (2.10) решается последовательно, т. к. уравнение (3.7) не содержит неизвестной функции $X(z)$. Проинтегрировав систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, получим:

$$\begin{gathered}
N(\eta)=8a^2\theta_1\left(1+\frac{\eta}{2}\right)\left(\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)+1\right)+N_0\left(1+\frac{\eta}{2}\right)^2-\\
-2\left\{X'(0)+2a^2(\alpha_1+\frac{\varphi}{4})\right\}\left(1+\frac{\eta}{2}\right)-X(0),\\
X(\xi)=(-12+6\alpha_1-6\alpha_2-\alpha_3+3\varphi)a^2+(12+6\alpha_2-8\alpha_1+\\
+\alpha_3-\frac{7}{2}\varphi\right)a^2\xi-\left(8+4\alpha_2-6\alpha_1+\frac{\alpha_3}{2}-\frac{5}{2}\varphi\right)a^2\xi^2-\frac{2}{3}\left(2+\alpha_2-\alpha_1+\right.\\
\left.+\frac{\alpha_3}{4}-\frac{1}{4}\varphi\right)a^2\xi^4+X_0\exp(-\xi)-4a^2\theta_1\exp(-\xi)\int\limits_0^{\xi}\frac{\exp(t)}{1+t/2}dt-\\
-8a^2\theta_1\frac{\xi}{2}\ln\left(1+\frac{\xi}{2}\right)-N_0\left(1+\frac{\xi}{2}\right)^2-\left\{8a^2\theta_1-2N_0-2X'(0)-\right.\\
\left.-4a^2\left(\alpha_1+\frac{\varphi}{4}\right)\right\}\left(1+\frac{\xi}{2}\right)+16a^2\theta_1-N_0-2X'(0)+\\
+X(0)-4a^2\left(\alpha_1+\frac{\varphi}{4}\right),\quad \xi=z-y,\quad \eta=z+y,
\end{gathered} \tag{3.8}$$

где N_0, X_0 — неизвестные постоянные интегрирования. Константу X_0 определим из соотношения $X(z)\big|_{z=0} = X_0$. Оставшиеся неизвестные константы $X(0)$, $X'(0)$, N_0 связаны с внешним решением (2.9) так, что все слагаемые в (2.9), содержащие эти константы, вне зависимости от значения самих констант обращаются в нуль. Поэтому далее считаем $X(0) = X'(0) = N_0 = 0$, тогда из (3.7) получим $N'(0) = 2a^2\left(\alpha_1 + \dfrac{\varphi}{4}\right)$. Таким образом были определены все неизвестные константы и функции внешнего и внутреннего разложений. В результате внешнее разложение запишется в виде:

$$\begin{gathered}
v(y,\xi) = -\frac{2a\xi}{1+y} - \frac{a\xi^2}{(1+y)^2} + \phi a^2 \{(6\alpha_1 - 8\theta_1 - 12 - 6\alpha_2 - \alpha_3 + \\
+ \frac{13}{4}\varphi\right)\frac{1}{1+y} - 4\theta_1\left(1 + \frac{\xi}{(1+y)^2}\right)\ln\left(1 + y + \frac{\xi}{2}\right) + (8\theta_1 - 12 + \\
+ 6\alpha_1 - 6\alpha_2 - \alpha_3 + 3\varphi)\left(\frac{1}{(1+y)^2} - \frac{1}{1+y}\right)\exp(-\xi) + \\
+ (-8\theta_1 + 12 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3 - 3\varphi)\frac{1}{(1+y)^2} + \\
+ (-12 + 12\alpha_1 - 8\alpha_2 - \alpha_3 - 5\varphi)\frac{\xi}{(1+y)^2} + \\
+ 2\left(1 + 3\alpha_1 - 2\alpha_2 - \frac{\alpha_3}{4} - \frac{5\varphi}{4}\right)\frac{\xi^2}{(1+y)^3} - \\
- \frac{1}{3}\left(-1 - \alpha_1 + \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{8\xi^3}{(1+y)^4} + \frac{2\xi^4}{(1+y)^5}\right) + \\
+ 4\theta_1\left(\frac{1}{1+y} + \frac{\xi}{(1+y)^2}\right)\ln\left(1 + \frac{\xi}{2}\right) + \\
+ \left(8 - 6\alpha_1 + 4\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{2} - \frac{5\varphi}{2}\right)\left(\frac{2\xi}{1+y} + \frac{\xi^2}{(1+y)^2}\right) + \frac{2}{3}(2 - \alpha_1 + \\
+ \alpha_2 + \frac{\alpha_3}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{4\xi^3}{1+y} + \frac{\xi^4}{(1+y)^2}\right) + 4\theta_1\frac{\exp(-\xi)}{(1+y)^2}\int\limits_0^{\xi}\frac{\exp(t)}{1+t/2}dt\right\} + \ldots\,.
\end{gathered} \tag{3.9}$$

Выше был рассмотрен случай, когда равномерность внешнего решения (2.9) нарушалась в области, где $\xi \sim \phi$. Но возможен и случай, когда нарушение равномерности происходит за счет пространственной переменной, а именно при $y \sim \phi^{-1}$. Тогда новые безразмерные переменные внутренней задачи

$$p = z - y, \quad n = \phi y, \quad f(p,n) = v(y,z)\phi^{-1}$$

приводят в нулевом приближении к уравнению:

$$v_{0,n} + \frac{v_0}{n} = 0, \quad f_{0,p} = v_0, \quad f(p,n) = f_0(p,n) + \phi f_1(p,n) + \ldots\,, \tag{3.10}$$

общее решение которого вдоль характеристик $v_0(n,p)n = F(p)$, где $F(p)$ — произвольная функция, дает частное внутреннее решение, согласованное с внешним разложением, вида

$$f_0(p,n) = \frac{Bp}{n}, \tag{3.11}$$

где B — неизвестная константа. Для ее определения при сращивании был выбран промежуточный масштаб пространственной переменной $l = \phi^{1/2}y = \phi^{-1/2}n$. При этом выполнялось

$$v_0(y,\xi)\big|_{\xi=p,\ y=l\phi^{-1/2}} = \phi f_0(p,n)\big|_{y=l\phi^{1/2}}, \tag{3.12}$$

позволило получить $A = -2a$ и завершить решение для нулевого приближения. Полученное решение определяет поле перемещений при переходе к большим расстояниям, где перемещения и деформации вследствие затухания исходного импульса асимптотически стремятся к нулю.

4. Заключение. В работе на основе метода сращиваемых асимптотических разложений изучается распространение одномерных расходящихся одиночных сферических волн в нелинейно-упругих средах. Особое внимание уделяется описанию взаимовлияния внешнего и внутреннего решений. Показаны два варианта выбора безразмерных переменных, приводящих во внешней краевой задаче к решению ряда последовательных квазистатических или динамических задач. В последнем случае для определения неизвестных констант и функций при сращивании разложений, помимо сопоставления, что использовалось ранее [6, 7, 9], возникает необходимость решения дополнительной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что в отличие от поведения решения за фронтом плоской ударной волны [6, 7], в сферически симметричной задаче, начиная с первого порядка малости, асимптотика внешнего решения содержит отраженные от переднего фронта волны.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Куликовский А. Г., Свешникова Е. И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский Лицей, 1998. 412 с.

[2] Бленд Д. Р. Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1972. 183 с.

[3] Буренин А. А., Чернышов А. Д. Ударные волны в изотропном упругом пространстве // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 711–717.

[4] Найфе А. Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.

[5] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Reviews. 1995. Vol. 48. № 1. P. 1–39.

[6] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об эволюционных уравнениях задач ударного деформирования с плоскими поверхностями разрывов // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 3. С. 82–95.

[7] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Об ударной деформации несжимаемого полупространства под действием сдвигающей нагрузки переменного направления // Сибирский журнал индустриальной математики. 2014. Т. 17. № 2(58). С. 87–96.

[8] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.

[9] Рагозина В. Е., Иванова Ю. Е. Математическая модель движения сдвиговых ударных волн ненулевой кривизны на основе их эволюционного уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. 15. № 1(49). С. 77–85.

[10] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. – Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[11] Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах. – М.: Мир, 1964. 308 с.

[12] Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. – М.: Мир, 1967. 239 с.

V. E. Ragozina[1], *Yu. E. Ivanova*[2]

THE VARIOUS POSSIBILITIES FOR DESCRIBING OF SPHERICALLY SYMMETRIC SHOCK WAVES IN AN ELASTIC MEDIUM IN TERMS OF ASYMPTOTIC SERIES

[1]*Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia*

[2]*Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia*

Abstract. On the example of the problem of shock loading of a spherical cavity in a nonlinearly elastic medium, the application of the matched asymptotic expansions method to the description of the propagation of one-dimensional shock waves of nonzero curvature is considered. It is shown that the singular problem of the perturbation method in the front region is determined by the solution of the evolution equation, which differs from the equation of a plane longitudinal wave. Various versions of the equations arising in the exterior boundary value problem and their approximate solutions are considered.

Keywords: nonlinear elastic medium, impact deformation, perturbation method, evolution equation, spherical shock wave.

Ragozina Victoria Evgenevna

`e-mail:` ragozina@vlc.ru, Ph.D., Senior Research Worker, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok, Russia.

Ivanova Yulia Evgenevna

`e-mail:` ivanova@iacp.dvo.ru, Ph.D., Research Worker, Institute of Automation and Control Processes of Far-Eastern Branch of RAS, Vladivostok; Docent, Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia.

REFERENCES

[1] Kulikovskii A. G., Sveshnikova E. I. Nonlinear waves in elastic mediums. M.: Moscow Lyceum, 1998. 412 p. (in Russian).

[2] Bland D. R. Nonlinear Dynamic Elasticity. M: MIR, 1972. 183 p. (in Russian).

[3] Burenin A. A., Chernyshov A. D. Shock waves in an isotropic elastic space // PMM.1978. Vol. 42. № 4. P. 711–717. (in Russian).

[4] Nayfeh A. H. Introduction to Perturbation Techniques. M.: MIR, 1984. 535 p.(in Russian).

[5] Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Ray method for solving dynamic problems connected with the propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities // Appl. Mech. Reviews.1995. Vol. 48. № 1. P. 1–39.

[6] Ragozina V. E., Ivanova Yu. E. About the evolutionary equations of flat problems of a shock straining of solids // Computational Continuum Mechanics. 2009. Vol. 2. № 3. P. 82–95. (in Russian).

[7] Ragozina V. E., Ivanova Yu. E. On the impact deformation of an incompressible half-space under the action of a shear load of variable direction // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2014. Vol. 8. Is. 4 (58). P. 87-96.(in Russian).

[8] Whitham G. Linear and Nonlinear Waves. M : MIR, 1977. 622 p.(in Russian).

[9] Ragozina V. E., Ivanova Yu. E. Mathematical model of movement of shear shock waves of nonzero curvature on the basis of their evolution equation // Siberian Journal of Industrial Mathematics. 2012. Vol. 15.№ 1 (49). P. 77–85. (in Russian).

[10] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. Theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[11] Thomas T. Plastic flow and fracture in solids. M.: MIR, 1964. 308 p.

[12] Van Dyke M. Perturbation methods in fluid mechanics. M.: MIR, 1967. 239 p.