

М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, В. С. Чиков

ВАРИАНТ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Проанализирована структура тензора упругости цилиндрически-ортотропного материала. Для такого материала записаны нелинейные определяющие соотношения, удовлетворяющие обобщению частного постулата изотропии и учитывающие конечные деформации. Указана программа экспериментов, позволяющая идентифицировать предложенные определяющие соотношения.

Ключевые слова: определяющие соотношения, анизотропные материалы, конечные деформации, эксперимент.

УДК: 539.3

Тензорно-линейная связь между напряжениями и конечными деформациями в цилиндрически-ортотропном материале. Представим тензорно-линейные определяющие соотношения как обобщение закона Гука на случай конечных деформаций, используя энергетически сопряженную пару тензоров напряжений и деформаций: энергетический тензор напряжений \mathbf{T} и тензор деформаций Коши-Грина $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1)$$

где \mathbf{N} — постоянный тензор четвертого ранга, называемый тензором упругости.

Структура тензора \mathbf{N} для анизотропных материалов с различными типами симметрии свойств хорошо известна из работ [1, 2, 3 и др.].

Рассматриваемый в данной работе цилиндрически-ортотропный материал обладает криволинейной анизотропией и в каждой точке среды имеет в качестве главных осей

© Соколова М. Ю., Христич Д. В., Чиков В. С., 2017

Соколова Марина Юрьевна

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhrstich@rambler.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Чиков Валерий Сергеевич

e-mail: avreliukvochi@mail.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-01875_а).

Поступила 05.08.2017

анизотропии оси цилиндрической системы координат. Известно, что в главных осях анизотропии ортотропный материал имеет структуру, определяемую матрицей

$$(\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} N_{rrrr} & N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{\varphi\varphi rr} & N_{\varphi\varphi\varphi\varphi} & N_{\varphi\varphi zz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{zzrr} & N_{zz\varphi\varphi} & N_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{r\varphi r\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\varphi z\varphi z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zrzr} \end{pmatrix},$$

причем в силу симметричности тензора \mathbf{N} имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} N_{rr\varphi\varphi} &= N_{\varphi\varphi rr}, & N_{rrzz} &= N_{zzrr}, & N_{\varphi\varphi zz} &= N_{zz\varphi\varphi}, \\ N_{r\varphi r\varphi} &= N_{\varphi r\varphi r}, & N_{\varphi z\varphi z} &= N_{z\varphi z\varphi}, & N_{zrzr} &= N_{rzzr}. \end{aligned}$$

Как отмечается в работе [1], если главная ось анизотропии проходит внутри тела, то на этой оси неразличимы радиальное и тангенциальное направления. В связи с этим между ненулевыми константами упругости цилиндрически-ортотропного материала должна быть установлена связь:

$$N_{rrrr} = N_{\varphi\varphi\varphi\varphi}, \quad N_{rrzz} = N_{\varphi\varphi zz}, \quad N_{rzzr} = N_{\varphi z\varphi z}.$$

Таким образом, цилиндрически-ортотропный материал имеет тензор упругости, который в главных осях анизотропии имеет не девять независимых компонентов, а только шесть. Окончательно, тензор линейной упругости цилиндрически-ортотропного материала в главных осях анизотропии имеет вид

$$(\mathbf{N}) = \begin{pmatrix} N_{rrrr} & N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrrr} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{rrzz} & N_{rrzz} & N_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{r\varphi r\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zrzr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zrzr} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Сравнивая (2) с представлениями тензоров упругости для различных типов анизотропных материалов [2], можно сделать вывод о том, что цилиндрически-ортотропный материал имеет структуру тензора упругости такую же, как и тетрагональный материал.

Представление процессов деформирования анизотропных материалов в шестимерном пространстве. Различными авторами для представления тензоров напряжений и деформаций вводится рассмотрение шестимерный тензорный базис. В частности, в работе [2] введен канонический тензорный базис, образованный тензорами

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_3), & \mathbf{I}^1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\mathbf{a}_2), & \mathbf{I}^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1\mathbf{a}_1), \\ \mathbf{I}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1), & \mathbf{I}^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3\mathbf{a}_2), & \mathbf{I}^5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3). \end{aligned} \quad (3)$$

Тензоры (3) нормируются соотношениями $\mathbf{I}^\alpha \cdot \mathbf{I}^\beta = \delta^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, 5$. Базисные векторы \mathbf{a}_i полагаются направленными вдоль главных осей анизотропии материала: вектор \mathbf{a}_3 направлен вдоль главной поворотной оси, вектор \mathbf{a}_2 — вдоль побочной оси, вектор \mathbf{a}_1 перпендикулярен им. Полагаем, что в начальный момент векторы \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 совпадают с векторами неподвижного базиса \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 .

Любой симметричный тензор второго ранга в пространстве E_3 можно разложить по базисным тензорам (3), например тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ и энергетический тензор напряжений можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = e_\alpha \mathbf{I}^\alpha, \quad \mathbf{T} = t_\alpha \mathbf{I}^\alpha, \quad (4)$$

где греческий индекс α принимает значения от 0 до 5. Коэффициенты разложений e_α , t_α связаны с компонентами тензоров $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$, $\mathbf{T} = t_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ в неподвижном базисе соотношениями

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}), \quad e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32}), \quad e_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13}). \end{aligned} \quad (5)$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{\sqrt{3}} e_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}} e_0 - \frac{1}{\sqrt{6}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, \quad \varepsilon_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}} e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}} e_1, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{e_3}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{23} = \frac{e_4}{\sqrt{2}}, \quad \varepsilon_{31} = \frac{e_5}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для тензора \mathbf{T} соотношения аналогичны.

Соотношения (5), (6) могут иметь место только в том случае, когда предполагается, что при деформации положение главных осей анизотропии не изменяется, то есть векторы \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 совпадают с векторами неподвижного базиса \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 не только в начальный момент, но и в процессе деформирования.

В теории процессов А. А. Ильюшина [4] процесс деформирования рассматривают в шестимерном пространстве и характеризуют образом процесса, под которым понимают траекторию деформирования (годограф вектора деформаций) с приписанными каждой ее точке вектором напряжений и другими термомеханическими параметрами, например, температурой. Будем рассматривать далее образы процессов, построенные в пространстве тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$. В этом пространстве рассматриваются шестимерные векторы деформаций $\mathbf{e} = e_\alpha \mathbf{i}_\alpha$ и напряжений $\mathbf{t} = t_\alpha \mathbf{i}_\alpha$. Отметим, что координаты шестимерных векторов \mathbf{e} , \mathbf{t} совпадают с коэффициентами разложений соответствующих тензоров (4).

По тензорам канонического базиса (3) в работах [2, 3] построены тензоры четвертого ранга, которые используют в качестве базиса для представления тензоров, характеризующих упругие свойства материала. Базисные тензоры четвертого ранга представляются в виде:

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha) \quad (7)$$

и нормируются соотношением [3]

$$\mathbf{I}^{ij} \dots \mathbf{I}^{kl} = \frac{1}{2} \left(\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{jk} \delta^{il} \right), \quad i, j, k, l = 0, 1, \dots, 5.$$

Тензоры (7) симметричны по парам индексов, их компоненты приведены в монографии [2].

Любой полусимметричный тензор четвертого ранга \mathbf{N} , имеющий диадное представление в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ в виде

$$\mathbf{N} = N_{ijkl} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}, \quad (8)$$

может быть разложен по базисным тензорам (7):

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha, \beta=0}^5 n_{\alpha\beta} \mathbf{I}^{\alpha\beta}, \quad n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha}. \quad (9)$$

Связь между компонентами $n_{\alpha\beta}$ и N_{ijkl} установлена в монографии [2] и имеет вид:

$$n_{\alpha\beta} = \beta_{\alpha}^{ij} N_{ijkl} \beta_{kl}^{\beta}, \quad N_{ijkl} = \beta_{ij}^{\alpha} n_{\alpha\beta} \beta_{kl}^{\beta}, \quad (10)$$

где матрицы β_{α}^{ij} и β_{kl}^{β} определяются одной и той же таблицей

$$(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица (β) может быть использована и для записи соотношений (5), (6):

$$\varepsilon_{ij} = \beta_{ij}^{\alpha} e_{\alpha}, \quad e_{\alpha} = \beta_{\alpha}^{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (12)$$

В шестимерном пространстве с базисными векторами \mathbf{i}_{α} тензору \mathbf{N} ставится в соответствие симметричный тензор второго ранга $\mathbf{n} = n_{\alpha\beta} \mathbf{i}_{\alpha\beta}$, где $\mathbf{i}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\mathbf{i}_{\alpha} \mathbf{i}_{\beta} + \mathbf{i}_{\beta} \mathbf{i}_{\alpha})$ — базисные тензоры второго ранга шестимерного пространства, которые являются образами тензоров (7).

Запишем представление тензора упругости цилиндрически-ортотропного материала (2) в шестимерном пространстве. Воспользовавшись соотношениями (10), (11), получим ненулевые компоненты тензора \mathbf{n} :

$$\begin{aligned} n_{00} &= \frac{1}{3} (2N_{rrrr} + 2N_{rr\varphi\varphi} + 4N_{rrzz} + N_{zzzz}), \\ n_{11} &= \frac{1}{3} (N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - 4N_{rrzz} + 2N_{zzzz}), \end{aligned} \quad (13)$$

$$n_{10} = n_{01} = -\frac{\sqrt{2}}{3} (N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz}),$$

$$n_{22} = N_{rrrr} - N_{rr\varphi\varphi}, \quad n_{33} = N_{r\varphi r\varphi}, \quad n_{44} = n_{55} = N_{zrzr}.$$

Отметим, что структура тензора \mathbf{n} для цилиндрически-ортотропного материала совпадает со структурой этого тензора для тетрагонального материала [2].

Если рассматривать тензор \mathbf{n} как образ тензора упругости материала в шестимерном пространстве, то тензорно-линейные соотношения между напряжениями и деформациями (1) можно записать в пространстве тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (14)$$

причем тензор \mathbf{n} в формуле (14) имеет компоненты, связанные с компонентами тензора упругости соотношениями (13).

Нелинейные соотношения для цилиндрически-ортотропного материала. При рассмотрении нелинейных определяющих соотношений для цилиндрически-ортотропного материала будем использовать в качестве основной гипотезы сформулированный А. А. Ильюшиным [4] частный постулат изотропии, который в работах [2, 5, 6] был обобщен на случай анизотропных материалов.

Первоначально частный постулат изотропии был сформулирован А. А. Ильюшиным для случая малых деформаций начально изотропного материала. Согласно частному постулату образ процесса деформирования начально-изотропного тела инвариантен относительно не только ортогональных преобразований, связанных с выбором начальной системы координат, но и произвольных преобразований вращения и отражения в пятимерном девиаторном подпространстве. Так как при таких преобразованиях изменяются третьи инварианты тензоров напряжений и деформаций, то частный постулат требует, чтобы инварианты такого типа явно не входили в функционалы, определяющие свойства материала. В соответствии с частным постулатом вектор напряжений в каждой точке траектории деформирования определяется только параметрами, характеризующими внутреннюю геометрию проекции траектории в пятимерное девиаторное подпространство. В работе [7] предложено обобщение частного постулата на случай конечных деформаций, частично обоснованное в опытах с тонкостенными трубками [8].

Для того чтобы сформулировать обобщение частного постулата на случай анизотропных материалов, рассмотрим понятие собственных упругих состояний материала. По определению Я. Рыхлевского [9] собственным тензором оператора \mathbf{N} (собственным упругим состоянием) называется тензор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha$, для которого

$$\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha = (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha.$$

В шестимерном пространстве это определение принимает вид:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad (15)$$

причем вектор $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ является шестимерным образом тензора $\boldsymbol{\omega}_\alpha$.

Если для некоторого материала все шесть собственных значений λ_α различны, то разложение тензора \mathbf{n} по собственному базису имеет вид:

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^6 \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha.$$

При наличии корня характеристического уравнения λ_α кратности k соответствующая ему часть разложения тензора \mathbf{n} имеет вид:

$$\mathbf{n}_{(\alpha)} = \lambda_\alpha (\boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} + \dots + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1}).$$

В общем случае разложение тензора \mathbf{n} по собственному базису представляется в виде:

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \boldsymbol{\Omega}_\alpha, \quad (16)$$

где n — число различных корней характеристического уравнения, базисные тензоры $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$, соответствующие однократному корню λ_α , имеют вид $\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha$, а соответствующие корню кратности k — $\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} + \dots + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1}$.

Для изотропного и анизотропных материалов различных типов собственные значения и собственные векторы определены в работе [2]. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами других авторов [9, 10].

В работе [2] показано, что триклинные, моноклинные и ромбические материалы имеют по шесть различных собственных значений и по шесть собственных подпространств, причем все они одномерные. Тетрагональные материалы имеют четыре однократных собственных значения и одно двукратное, которым соответствуют четыре одномерных собственных подпространства и одно двумерное. У гексагональных и тригональных материалов по два однократных и по два двукратных собственных значения. У этих материалов по два одномерных и по два двумерных собственных подпространства. Кубические материалы имеют три различных собственных значения: однократное, двукратное и трехкратное — и три собственных подпространства: одномерное, двумерное и трехмерное. Изотропный материал имеет два различных собственных значения: однократное и пятикратное — и два собственных подпространства: одномерное и пятимерное (девиаторное).

В работах [2],[11] сформулированы две формы обобщения частного постулата для начально анизотропных материалов: общая и предельная. В соответствии с общей формой обобщения частного постулата на случай анизотропных материалов *образ процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве материала, инвариантен относительно группы собственных ортогональных преобразований.*

Из этого обобщения следует, что в каждом неодномерном собственном подпространстве процесс определяется только внутренней геометрией траектории и не зависит от ориентации относительно базисных векторов этого подпространства. Если траектория деформирования материала полностью расположена в собственном подпространстве, то приведенная формулировка обобщения частного постулата допускает наличие составляющей вектора напряжений $\Delta \mathbf{t}$, ортогональной собственному подпространству. Отметим, что отклонение $\Delta \mathbf{t}$ является величиной второго порядка малости и не зависит от ориентации траектории деформирования относительно базисных векторов собственного подпространства.

В соответствии с предельной формой обобщения частного постулата *образ процесса с траекторией деформирования, расположенной в собственном подпространстве, также расположен в этом подпространстве.* В этом случае связь между напряжениями и деформациями может быть представлена в виде:

$$\mathbf{t}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^m A_{(\alpha)}^i \mathbf{r}_i^{(\alpha)}, \quad (17)$$

где $A_{(\alpha)}^i [s_{(\alpha)}(t), \kappa_{(\alpha)}^1, \kappa_{(\alpha)}^2, \dots, \kappa_{(\alpha)}^{m-1}]$ — функционал процесса деформирования $\mathbf{e}_{(\alpha)}(t)$, m и $\mathbf{r}_i^{(\alpha)}$ — размерность и базис собственного подпространства.

В соответствии с ограничениями, накладываемыми на определяющие соотношения предельной формой частного постулата изотропии в виде (17), связь между напряжениями и деформациями должна содержать только линейные и квадратичные инварианты, характеризующие материалы различных типов [2], [11].

Конкретизируем соотношения (17) для цилиндрически-ортотропного материала. Для этого определим его собственные упругие состояния. Как указано выше, тензор упругости для цилиндрически-ортотропного материала в трехмерном пространстве имеет вид (2). В соответствии с соотношениями (13) в шестимерном пространстве с базисными векторами \mathbf{i}_α матрица компонент этого тензора имеет представление:

$$(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{01} & n_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Составим характеристическое уравнение для тензора \mathbf{n} :

$$\begin{vmatrix} n_{00} - \lambda & n_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{01} & n_{11} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{22} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{33} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные значения тензора \mathbf{n} в этом случае равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(n_{00} + n_{11} \pm \sqrt{(n_{00} - n_{11})^2 + 4n_{01}^2} \right), \quad (19)$$

$$\lambda_3 = n_{22}, \quad \lambda_4 = n_{33}, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = n_{44},$$

а собственные векторы определяются соотношениями

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{i}_0 \cos \varphi + \mathbf{i}_1 \sin \varphi, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = -\mathbf{i}_0 \sin \varphi + \mathbf{i}_1 \cos \varphi, \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{i}_2, \quad \boldsymbol{\omega}_4 = \mathbf{i}_3, \quad \boldsymbol{\omega}_5 = \mathbf{i}_4, \quad \boldsymbol{\omega}_6 = \mathbf{i}_5,$$

где угол φ выражается через компоненты $n_{\alpha\beta}$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2n_{01}}{n_{00} - n_{11} + \sqrt{(n_{00} - n_{11})^2 + 4n_{01}^2}}. \quad (21)$$

С учетом (13) выражения для собственных значений тензора упругости через константы упругости цилиндрически-ортотропного материала имеют вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(N_{rrrr} + N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi} \pm \sqrt{(N_{rrrr} - N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi})^2 + 8N_{rrzz}^2} \right),$$

$$\lambda_3 = N_{rrrr} - N_{rr\varphi\varphi}, \quad \lambda_4 = N_{r\varphi r\varphi}, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = N_{zrzr}. \quad (22)$$

Соответственно соотношение (21) преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2\sqrt{2}(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz})}{(N_{rrrr} - N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi} + 8N_{rrzz}) + \sqrt{D}}, \quad (23)$$

где $D = (N_{rrrr} - N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi} + 8N_{rrzz})^2 + 8(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz})^2$.

Закон Гука (14), в соответствии с полученными результатами может быть записан в виде:

$$\mathbf{t} = \lambda_1 (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_1) \boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2 (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_2) \boldsymbol{\omega}_2 + \lambda_3 e_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_4 e_3 \mathbf{i}_3 + \lambda_5 \mathbf{e} \cdot (\mathbf{i}_4 \mathbf{i}_4 + \mathbf{i}_5 \mathbf{i}_5).$$

Таким образом, цилиндрически-ортотропные материалы так же, как и тетрагональные, имеют пять собственных подпространств: четыре одномерных с базисами $\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \boldsymbol{\omega}_2$, $\boldsymbol{\Omega}_3 = \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2$, $\boldsymbol{\Omega}_4 = \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3$ и единственное двумерное собственное подпространство с базисом $\boldsymbol{\Omega}_5 = \mathbf{i}_4 \mathbf{i}_4 + \mathbf{i}_5 \mathbf{i}_5$. В соответствии с этим могут быть определены два линейных и три квадратичных инварианта деформаций.

Линейные инварианты относительно группы симметрии материала тензоров деформаций и напряжений определяются [2, 11] как скалярные произведения их шестимерных образов \mathbf{e} и \mathbf{t} и единичного собственного вектора $\boldsymbol{\omega}_\alpha$:

$$e_\alpha = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad t_\alpha = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (24)$$

где m — количество инвариантных базисных векторов для рассматриваемого типа материала, определяющее размерность линейного инвариантного пространства, — или как скалярные произведения векторов \mathbf{e} и \mathbf{t} и базисных векторов линейного инвариантного подпространства:

$$e_\alpha = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_\alpha, \quad t_\alpha = \mathbf{t} \cdot \mathbf{i}_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1.$$

Для цилиндрически-ортотропного материала $m = 2$ поэтому существуют два линейных инварианта:

$$e_0 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_0 \quad \text{и} \quad e_1 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_1 \quad (25)$$

или

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \quad \text{и} \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}). \quad (26)$$

Из выражений для e_0 и e_1 следует, что линейными инвариантами являются также величины $\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ и ε_{33} .

Квадратичные инварианты тензоров деформаций и напряжений определяются через базисные тензоры квадратичных инвариантных подпространств $\boldsymbol{\Omega}$ выражениями [2]

$$s_{(\gamma)}^2 = \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{e}, \quad t_{(\gamma)}^2 = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{t}.$$

Квадратичными инвариантами деформаций для цилиндрически-ортотропного материала являются длины векторов — проекций вектора деформаций в квадратичные

инвариантные подпространства с базисными тензорами $\mathbf{\Omega}$: $\mathbf{e}_{(\gamma)} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{\Omega}$, $\gamma = 3, 4, 5$, которые определяются по формулам

$$s_{(3)}^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{e} = e_2^2, \quad s_{(4)}^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{e} = e_3^2, \quad s_{(5)}^2 = \mathbf{e} \cdot (\mathbf{i}_4 \mathbf{i}_4 + \mathbf{i}_5 \mathbf{i}_5) \cdot \mathbf{e} = e_4^2 + e_5^2 \quad (27)$$

или

$$s_{(3)}^2 = (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2, \quad s_{(4)}^2 = \varepsilon_{12}^2, \quad s_{(5)}^2 = \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2. \quad (28)$$

В работах [11], [12] предложен вариант нелинейных определяющих соотношений, связывающих напряжения и деформации в анизотропных материалах и удовлетворяющих предельной форме обобщения частного постулата А. А. Ильюшина. Для цилиндрически-ортотропного материала, в соответствии с найденными линейными (25) и квадратичными (27), инвариантами нелинейные определяющие соотношения могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{t} = \sum_{\alpha, \beta=0}^{\alpha, \beta=1} \left(n^{\alpha\beta} + \frac{\partial n^{\alpha\beta}}{\partial e_\alpha} e_\alpha \right) e_\beta \mathbf{i}_\alpha + \sum_{\gamma=3}^{\gamma=5} 2 \left(G^\gamma + \frac{\partial G^\gamma}{\partial s_{(\gamma)}^2} s_{(\gamma)}^2 \right) \mathbf{e}_{(\gamma)}. \quad (29)$$

Если в соотношениях (29) $n^{\alpha\beta}$, $2G^\gamma$ — постоянные, то при бесконечно малых деформациях эти соотношения совпадают с законом Гука. Будем считать, что функции $n^{\alpha\beta}(e_\alpha, e_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$ зависят только от линейных инвариантов тензора деформаций, а функции $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$ — только от квадратичных инвариантов в соответствующих подпространствах, то есть процессы в различных инвариантных подпространствах протекают независимо. С учетом этого предположения соотношения (29) удовлетворяют предельной форме обобщения частного постулата А. А. Ильюшина.

Конкретизируем вид функций $n^{\alpha\beta}(e_\alpha, e_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$. Наименьшее число констант эти функции содержат, если они зависят от своих аргументов линейным образом:

$$n^{\alpha\beta}(e_\alpha, e_\beta) = n_0^{\alpha\beta} + \bar{n}^{\alpha\beta}(e_\alpha + e_\beta), \quad \alpha, \beta = 0, 1, \\ G^\gamma(s_{(\gamma)}) = G_0^\gamma + \bar{G}^\gamma s_{(\gamma)}, \quad \gamma = 3, 4, 5. \quad (30)$$

В соотношениях (30) $n_0^{\alpha\beta}$, $\bar{n}^{\alpha\beta}$, G_0^γ , \bar{G}^γ — постоянные.

Подставляя (30) в (29), получим выражения для компонент вектора напряжений в шестимерном пространстве в виде:

$$t_0 = (n_0^{00} + 3\bar{n}^{00}e_0 + \bar{n}^{01}e_1) e_0 + (n_0^{01} + \bar{n}^{01}(e_0 + e_1)) e_1, \\ t_1 = (n_0^{01} + \bar{n}^{01}(e_0 + e_1)) e_0 + (n_0^{11} + \bar{n}^{01}e_0 + 3\bar{n}^{11}e_1) e_1, \\ t_2 = (2G_0^3 + 3\bar{G}^3 |e_2|) e_2, \quad t_3 = (2G_0^4 + 3\bar{G}^4 |e_3|) e_3, \\ t_4 = \left(2G_0^5 + 3\bar{G}^5 \sqrt{e_4^2 + e_5^2} \right) e_4, \quad t_5 = \left(2G_0^5 + 3\bar{G}^5 \sqrt{e_4^2 + e_5^2} \right) e_5. \quad (31)$$

Соотношения (31) записаны в пространстве меры деформаций Коши–Грина, причем векторы \mathbf{e} и \mathbf{t} являются шестимерными образами тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$ и \mathbf{T} (4).

Задача об идентификации предложенного варианта определяющих соотношений (31) состоит в экспериментальном определении пяти функций $n^{\alpha\beta}(e_\alpha, e_\beta)$, $\alpha, \beta = 0, 1$, $2G^\gamma(s_{(\gamma)})$, $\gamma = 3, 4, 5$, которые с учетом принятых представлений (30) содержат 12 констант. Шесть из этих констант связаны с константами упругости, входящими в закон

Гука для цилиндрически-ортотропного материала соотношениями (13). Предлагается для определения констант, входящих в нелинейные соотношения (31), провести четыре эксперимента с цилиндрическими образцами, ось которых совпадает с осью цилиндрической анизотропии. К этим экспериментам отнесем растяжение сплошного цилиндра, раздачу полого цилиндра внутренним давлением, цилиндрический и продольный сдвиг.

Свойства материалов обычно определяют из одноосных экспериментов со стержневыми образцами или из двухосных экспериментов с тонкостенными трубками, которые позволяют реализовывать сложное нагружение: растяжение с действием внутреннего (внешнего) давления, растяжение с кручением. Основным преимуществом таких экспериментальных образцов является однородность напряженно-деформированного состояния, реализуемого в них. Главным недостатком таких экспериментов является невозможность достижения больших деформаций из-за потери устойчивости тонкостенных трубок. Альтернативным подходом к проведению экспериментов по конечному деформированию является использование образцов, в которых создается неоднородное напряженно-деформированное состояние. В частности, можно использовать сплошные и полые цилиндрические образцы. Обработка экспериментов с такими образцами связана с необходимостью разработки математических моделей конечного деформирования цилиндрических образцов с целью определения связи между функциями, описывающими распределение напряжений и деформаций во внутренних точках образцов, и измеряемыми в опытах силовыми и геометрическими параметрами.

Функции (30) могут быть идентифицированы в четырех опытах с цилиндрическими образцами: 1) опыте на растяжение сплошного цилиндрического образца (измеряемые величины: осевая сила, удлинение и изменение наружного радиуса цилиндра); 2) опыте на раздачу полого толстостенного цилиндра внутренним давлением при зажатых торцах (измеряемые величины: внутреннее давление, изменение наружного и внутреннего радиусов цилиндра); 3) опыте на цилиндрический сдвиг (измеряемые величины: момент на подвижной наружной обойме, угол закручивания наружной поверхности цилиндра); 4) опыте на продольный сдвиг (измеряемые величины: усилие на подвижной наружной обойме, величина сдвига наружной поверхности цилиндра). Вторым опытом можно заменить экспериментом на кручение цилиндра с зажатými торцами (измеряемые величины: крутящий момент, угол закручивания на наружной поверхности и изменение наружного радиуса цилиндра) либо провести такой эксперимент для верификации определенных материальных функций. Схемы используемых экспериментов приведены на рисунках 1–5.

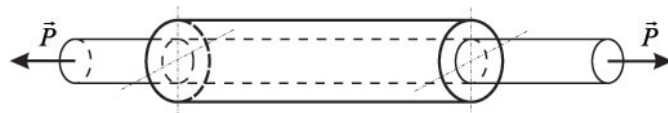


Рис. 1. Схема эксперимента на одноосное растяжение цилиндра

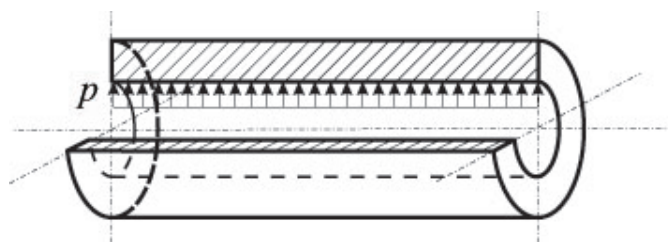


Рис. 2. Схема эксперимента по нагружению цилиндра внутренним давлением



Рис. 3. Схема эксперимента по кручению цилиндра

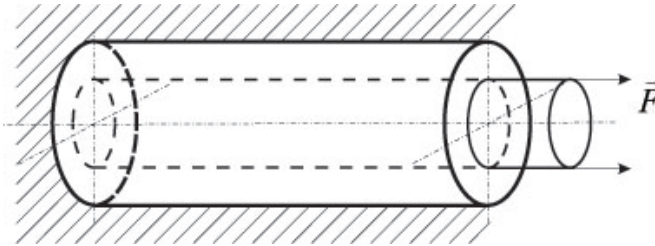


Рис. 4. Схема эксперимента по продольному сдвигу цилиндра

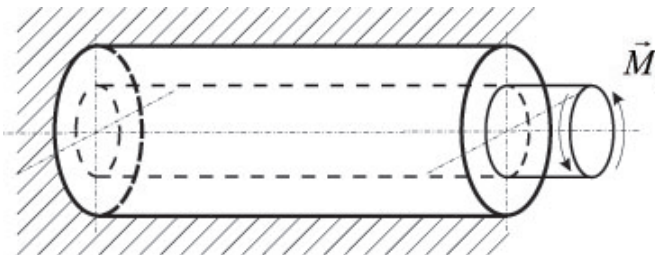


Рис. 5. Схема эксперимента по цилиндрическому сдвигу цилиндра

Отметим, что экспериментальные методики, которые предлагается использовать для идентификации определяющих соотношений, известны и подробно рассмотрены в работах [13]–[16] и др.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
- [2] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.
- [3] Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988. 192 с.
- [4] Ильюшин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 272 с.
- [5] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Нелинейные соотношения анизотропной упругости и частный постулат изотропии // Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. Вып. 4. С. 587–594.
- [6] Маркин А. А., Соколова М. Ю., Христич Д. В. Постулат А.А.Ильюшина для анизотропных материалов и вариант определяющих соотношений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. № 1. С. 38–45.
- [7] Маркин А. А., Толоконников Л. А. Меры процессов конечного деформирования // Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки. 1987. № 2. С. 49–53.

- [8] Толоконников О. Л. Установка для испытаний трубчатых образцов материалов в среде высокого давления // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1985. № 3. С. 185–187.
- [9] Рыхлевский Я. О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 420–435.
- [10] Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // Прикладная механика и техническая физика. 1986. № 4. С. 127–135.
- [11] Христич Д. В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипопругих тел: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Тула, 2014. 252 с.
- [12] Христич Д. В. Варианты нелинейной связи между напряжениями и деформациями в анизотропных материалах // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2014. Вып. 1. Ч. 1. С. 216–224.
- [13] Панов А. Д., Шумаев В. В. Применение логарифмической меры деформации для решения задач кручения // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 1. С. 92–100.
- [14] Соколова М. Ю., Чиков В. С. Описание конечных деформаций сплошных цилиндров при кручении // Известия ТулГУ. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 1. С. 109–118.
- [15] Астапов В. Ф., Маркин А. А., Соколова М. Ю. Определение упругих свойств материалов из опытов на сплошных цилиндрах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 1. С. 104–111.
- [16] Иксарь А. В. Элементы теории эксперимента для термовязкопластических тел при конечных деформациях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2006. 110 с.

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, V. S. Chikov

A VARIANT OF NONLINEAR CONSTITUTIVE RELATIONS FOR A CYLINDRICALLY ORTHOTROPIC MATERIAL

Tula State University, Tula, Russian

Abstract. The structure of the elasticity tensor for cylindrically orthotropic material is analyzed. For such material nonlinear constitutive relations, which satisfy a generalization of the partial postulate of isotropy and take into account finite deformations, are written. An experimental program allowing to identify the proposed constitutive relations is specified.

Keywords: constitutive relations, anisotropic materials, finite deformations, experiment.

REFERENCES

- [1] Lekhnitsky S. G. Theory of elasticity of an anisotropic body. M.: Nauka, 1977. 416 p. (in Russian).
- [2] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. M., FIZMATLIT, 2013. 320 p.
- [3] Chernykh K. F. Introduction into anisotropic elasticity. M.: Nauka, 1988. 192 p. (in Russian).
- [4] Il'yushin A. A. Plasticity. Foundations of the general mathematical theory. M: Izd-vo AN SSSR, 1963. 272 p. (in Russian).
- [5] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Nonlinear relations of anisotropic elasticity and the partial postulate of isotropy // Applied mathematics and mechanics. 2007. V. 71. No. 4. P. 587–594. (in Russian).
- [6] Markin A. A., Sokolova M. Yu., Khristich D.V. A.A. Il'yushin's postulate for anisotropic materials and a version of constitutive relations // Izvestiya of RAN. Mechanics of Solids. 2011. No. 1. P. 38–45. (in Russian).
- [7] Markin A. A., Tolokonnikov L. A. Measures of processes of finite deforming // Izvestiya of Northern Caucasia scientific center of the higher school. Natural sciences. 1987. No 2. P. 49–53. (in Russian).
- [8] Tolokonnikov O. L. Device for testing of tubular specimens of material in a medium of high pressure // Izvestiya AN SSSR. Mechanics of solids. 1985. N 3. P. 185–187. (in Russian).
- [9] Rychlewski J. On Hooke's law // Applied mathematics and mechanics. 1984. V. 48. No 3. P. 420–435. (in Russian).

Sokolova Marina Yur'evna

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russian.

Khristich Dmitrii Viktorovich

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Tula State University, Tula, Russian.

Chikov Valerii Sergeevich

e-mail: avrelykvochi@mail.ru, Postgraduate Student, Tula State University, Tula, Russian.

- [10] Ostrosablin N. I. On the structure of tensors of elastic modules and classification of anisotropic materials // Applied mechanics and technical physics. 1986. No. 4. P. 127–135. (in Russian).
- [11] Khristich D. V. Identification of anisotropic materials and modelling of processes of finite deforming of hypoelastic bodies: dis. ... doct. fiz.-mat. nauk. Tula, 2014. 252 p. (in Russian).
- [12] Khristich D. V. Variants of nonlinear relation between stresses and strains in anisotropic materials // Izvestiya TulGU. Estestvennye nauki. 2014. No. 1. P. 1. P. 216–224. (in Russian).
- [13] Panov A. D., Shumaev V. V. Application of the logarithmic measure of strain for solution of problems of torsion // Izvestiya of RAN. Mechanics of solids. 2012. No. 1. P. 92-100. (in Russian).
- [14] Sokolova M. Yu., Chkirov V. S. A description of solid cylinders finite strains at torsion // Izvestiya TulGU. Estestvennye nauki. 2013. No. 2. P. 1. P. 109–118. (in Russian).
- [15] Astapov V. F., Markin A. A., Sokolova M. Yu. Identification of elastic properties of materials from experiments on solid cylinders // Izvestiya of RAN. Mechanics of solids. 2002. No. 1. P. 104–111. (in Russian).
- [16] Iksar' A. V. Elements of the theory of experiments for thermo-visco-plastic bodies at finite deformations: dis. ... cand. fiz.-mat. nauk. M. 2006. 110 p. (in Russian).