

А. Н. Максимов, Н.Н. Пушкаренко, Е. А. Деревянных, Н. В. Храмова

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛОСТЯМИ

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В работе определены нулевые значения компонент напряжений в упругой и пластической областях, а также первые приближения компонент напряжений в пластической области для случая, удовлетворяющего условию полной пластичности.

Ключевые слова: механика, напряжения, деформации, пластичность, упругость.

УДК: 539.3+624.073

В работе исследуется напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного полостью. Для определения напряженного состояния в пластической области используются соотношения теории предельного равновесия, берущие начало от работ Кулона.

Впервые задача о трехосном растяжении несжимаемого упругопластического пространства со сферической полостью рассмотрена Т. Д. Семькиной [1]. В [2] и [3] рассмотрено пространство со сферической и эллипсоидальной полостями в случае несжимаемого упругопластического материала.

В настоящей работе в линеаризированной постановке рассматривается упругопластическое состояние пространства с полостью из сжимаемого идеальнопластического материала при трехосном сдавливании на бесконечности. Рассмотрен один из

© Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н., Деревянных Е. А., Храмова Н. В., 2017

Максимов Алексей Николаевич

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики, физики и информационных технологий, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Пушкаренко Николай Николаевич

e-mail: stl_mstu@mail.ru, кандидат технических наук, декан инженерного факультета, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Деревянных Евгения Анатольевна

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики, физики и информационных технологий, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Храмова Наталья Владимировна

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, старший преподаватель кафедры математики, физики и информационных технологий, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.08.2017

случаев, при котором могут быть удовлетворены условия полной пластичности. Случай, соответствующий сферической полости рассмотрен в [4], в [5], [6] – задача, соответствующая одному из случаев, удовлетворяющих условию полной пластичности, развернутое решение которой приведено в [7].

Задача решена методом малого параметра в сферической системе координат, в безразмерных единицах длины. Все величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу сферической полости ρ_0 .

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды определено в виде [8]:

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \quad (1)$$

где σ'_{ij} – компоненты девиатора напряжения, k_0 – коэффициент сцепления, $a = tg\alpha$ – коэффициент внутреннего трения, α – угол внутреннего трения.

Для решения задачи в сферической системе координат используем уравнения равновесия [9]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} (2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\phi + \tau_{\rho\theta} ctg\theta) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} ((\sigma_\theta - \sigma_\phi) ctg\theta + 3\tau_{\rho\theta}) &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\phi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} (3\tau_{\rho\phi} + 2\tau_{\theta\phi} ctg\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Условия пластичности Треска–Сен-Венана [10] с учетом (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\rho\theta}^2 &= 0, \\ \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\theta\phi}^2 &= 0, \\ \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) - \tau_{\rho\phi}^2 &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также

$$\begin{aligned} \left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\theta\phi} &= \tau_{\rho\theta} \cdot \tau_{\rho\phi}, \\ \left(\sigma_\phi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\phi} \cdot \tau_{\theta\phi}, \\ \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma) \right) \cdot \tau_{\rho\phi} &= \tau_{\rho\theta} \cdot \tau_{\theta\phi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_\rho l + \tau_{\rho\theta} m + \tau_{\rho\phi} n &= P_\rho, \\ \tau_{\rho\theta} l + \sigma_\theta m + \tau_{\theta\phi} n &= P_\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tau_{\rho\phi}l + \tau_{\theta\phi}m + \sigma_{\phi}n = P_{\phi},$$

где $\sigma_{\rho}, \tau_{\rho\theta}, \dots$ – компоненты девиатора напряжения, l, m, n – направляющие косинусы нормали, $P_{\rho}, P_{\theta}, P_{\phi}$ – проекции усилий на оси ρ, θ, ϕ , $\sigma = (\sigma_{\rho} + \sigma_{\theta} + \sigma_{\phi})/3$ – среднее давление.

Компоненты напряжения представим в виде рядов по малому параметру $\delta (\delta \ll 1)$:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho} &= \sigma_{\rho}^0 + \delta \sigma'_{\rho}, \sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}^0 + \delta \sigma'_{\theta}, \sigma_{\phi} = \sigma_{\phi}^0 + \delta \sigma'_{\phi}, \\ \tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\theta}^0 + \delta \tau'_{\rho\theta}, \tau_{\rho\phi} = \tau_{\rho\phi}^0 + \delta \tau'_{\rho\phi}, \tau_{\theta\phi} = \tau_{\theta\phi}^0 + \delta \tau'_{\theta\phi}. \end{aligned} \quad (6)$$

Условия пластичности (3) и (4) могут быть удовлетворены в трех случаях. Случай, соответствующий сферической полости, был рассмотрен в [4] и [6].

Рассматривается один из случаев, удовлетворяющих условию полной пластичности (3) и (4)

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &= 0, \\ \sigma_{\phi}^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &= 0, \\ \sigma_{\theta}^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решая совместно (7) и (3), получим

$$\sigma_{\rho}^0 = \sigma_{\phi}^0, \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\phi}^0 = \tau_{\theta\phi}^0. \quad (8)$$

Тогда (6) с учетом (8) примет вид:

$$\sigma^0 = (2\sigma_{\rho}^0 + \sigma_{\theta}^0)/3. \quad (9)$$

Решая совместно (7) и (9), получим

$$\sigma_{\rho}^0 = \sigma_{\theta}^0/A + D, \quad (10)$$

где A и D – определенные константы [4].

Уравнения равновесия (2) с учетом (8) примут вид:

$$\frac{\partial \sigma_{\rho}^0}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}(\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0) = 0, \frac{\partial \sigma_{\rho}^0}{\partial \phi} = 0, \frac{\partial \sigma_{\theta}^0}{\partial \theta} + (\sigma_{\rho}^0 - \sigma_{\theta}^0) \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (11)$$

Решая совместно (10) и (11), получим для компонент нормального напряжения в нулевом приближении в пластической области

$$\sigma_{\rho}^0 = \sigma_{\phi}^0 = \frac{c}{a} \frac{\rho^{\frac{6a}{3-2a}}}{(\sin \theta)^{\frac{6a}{3+4a}}} - \frac{k_0}{a}, \quad (12)$$

$$\sigma_{\theta}^0 = \left[\frac{c}{a} \frac{\rho^{\frac{6a}{3-2a}}}{(\sin \theta)^{\frac{6a}{3+4a}}} - \frac{k_0}{a} \right] A - DA.$$

Решая совместно (7), (8) и линеаризированные условия пластичности (3), получим

$$\sigma'_\rho - \sigma' \left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0, \sigma'_\phi - \sigma' \left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0. \quad (13)$$

Тогда

$$\sigma'_\rho = \sigma'_\phi, \quad (14)$$

$$\sigma' = (2\sigma'_\rho + \sigma'_\theta)/3. \quad (15)$$

Решая совместно (13) и (15), получим

$$\sigma'_\theta = A\tilde{\sigma}', \quad (16)$$

где $\tilde{\sigma}' = \sigma'_\rho = \sigma'_\phi$.

Решая совместно (7), (8) и линеаризированные условия пластичности (4), получим

$$\tau'_{\rho\phi} = 0. \quad (17)$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (12), (17) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \left((1-A)\tilde{\sigma}' + \tau'_{\rho\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{A}{\rho} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial \tau'_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{\rho} \left((A-1) \operatorname{ctg} \theta \tilde{\sigma}' + 3\tau'_{\rho\theta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \tau'_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \phi} + 2\tau'_{\theta\phi} \operatorname{ctg} \theta &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для решения (13) водится функция $U(\rho, \theta, \phi)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\tilde{\sigma}' = \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \tau'_{\theta\phi} = -\frac{1}{\rho \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \phi}, \tau'_{\rho\theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \rho} + \frac{A}{\rho \sin \theta} U. \quad (19)$$

Тогда первое и третье уравнения (15) тождественно удовлетворяются, а второе уравнение примет вид:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} - (A-3)\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} - A \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} - 2AU = 0. \quad (20)$$

Решение (17) найдено методом разделения переменных

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) (a_{mn} \cos m\phi + b_{mn} \sin m\phi) (\sin \theta)^{\frac{A+1}{2A} + \alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta), \quad (21)$$

где первый множитель (18) представляет решение уравнения Эйлера, в котором

$$\chi_{1,2} = \frac{A}{2} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2} + 1\right)^2 - A(2\alpha + 1)(n + 0,5) + An^2 - m^2 + 1/2}, \quad (22)$$

C_1, C_2 – константы, которые могут быть определены из граничных условий и условий сопряжения,

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{A+1}{2A}\right)^2 - \frac{m^2}{A}}, \quad (23)$$

второй сомножитель представляет решение уравнения Фурье, в котором a_{mn}, b_{mn} – коэффициенты Фурье [4], $P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta)$ – полином Якоби.

Подставляя (18) в (15) и принимая во внимание (12), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области:

$$\begin{aligned} \sigma'_\rho &= \sigma'_\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1-1} + C_2 \rho^{\chi_2-1}) (a_{mn} \cos m\phi - b_{mn} \sin m\phi) \cdot (\sin \theta)^{\frac{A+1}{2A} + \alpha} \times \\ &\times \left[\left(\frac{A+1}{2A} + \alpha \right) \cos \theta \cdot P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) + \sin \theta \frac{\partial P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta)}{\partial \theta} \right], \\ \sigma'_\theta &= A\sigma'_\rho, \tau'_{\rho\phi} = 0, \\ \tau'_{\theta\phi} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1-1} + C_2 \rho^{\chi_2-1}) (b_{mn} \cos m\phi - a_{mn} \sin m\phi) (\sin \theta)^{\frac{1-3A}{2A} + \alpha} \times \\ &\times m \cdot P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta), \\ \tau'_{\theta\rho} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_1 \rho^{\chi_1-1} (A - \chi_1) + C_2 \rho^{\chi_2-1} (A - \chi_2)) (a_{mn} \cos m\phi + b_{mn} \sin m\phi) \times \\ &\times (\sin \theta)^{\frac{1-A}{2A} + \alpha} P_n^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta). \end{aligned} \quad (24)$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Семькина Т. Д. О трехосном растяжении упругопластического пространства, ослабленного сферической полостью // Известия АН СССР. Серия: Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 174–177.
- [2] Ефремов В. Г. Идеальнопластическое напряженное состояние тел вблизи сферической полости // Известия РАН. Механика твердого тела. 1999. № 3. С. 70–75.
- [3] Максимов А. Н., Ефремов В. Г. Об определении предельного напряженного состояния в массиве, ослабленном эллипсоидальной полостью. / А.Н. Максимов, В.Г. Ефремов // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2001. №2. С.128–134.
- [4] Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н. К вопросу определения возмущенного состояния идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного сферической полостью // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2016. №3. С. 112–115.
- [5] Максимов А. Н. Об определении возмущенного состояния массива при условии полной пластичности // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2016. № 4. С. 95–99.
- [6] Максимов А. Н. Напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого пространства, ослабленного сферической полостью // Современное состояние в области механики и энергетики: сборник статей ВНКП. – Чебоксары: «ФГБОУ ВО Чувашская ГСХА», 2016. - С. 592–599.
- [7] Максимов А. Н. К вопросу определения напряженного состояния массива из сыпучей среды // Вестник Чувашской государственной сельскохозяйственной академии. 2017. №1 (1). С. 75–81.
- [8] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: ГИТТЛ, 1954.

[9] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

[10] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.

A. N. Maksimov, N. N. Pushkarenko, E. A. Dereviannih, N. V. Khramova

TO THE QUESTION OF IDENTIFICATION OF THE PERTURBED STATE OF A MASSIVE WEARED BY POLES

Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Abstract. In this paper, the zero values of the stress components in the elastic and plastic regions are determined, as well as the first approximations of the stress components in the plastic region for the case that satisfies the condition of complete plasticity.

Keywords: mechanics, stress, strain, flexibility, elasticity.

REFERENCES

[1] Semykina T. D. On triaxial stretching of an elastoplastic space weakened by a spherical cavity. T.D. Semykina // *Izvestiya Academy of Sciences of the USSR. Series Mechanics and engineering*. 1963. No. 1. P.174–177. (in Russian)

[2] Efremov V. G. Ideal-plastic stress state of bodies near a spherical cavity // *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. MTT*. 1999. №3. P.70-75. (in Russian)

[3] Maksimov A. N., Efremov V. G. On the determination of the limiting stress state in an array weakened by an ellipsoidal cavity // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named I. Y. Yakovlev*. 2001. №2. P.128–134. (in Russian)

[4] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. On the problem of determining the perturbed state of an idelnoplastic compressible mass, weakened by a spherical cavity // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limiting state*. 2016. №3. P. 112–115. (in Russian)

[5] Maksimov A. N. On the definition of the disturbed state of the array under the condition of complete plasticity. // *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named I. Y. Yakovlev. Series: Mechanics of the limiting state*. 2016. № 4. P. 95–99. (in Russian)

[6] Maksimov A. N. Stress state of an ideally plastic compressible space weakened by a spherical cavity // *Current state in the field of mechanics and energy: a collection of*

Maksimov Aleksey Nikolaevich

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, Ph.D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Pushkarenko Nikolay Nikolaevich

e-mail: stl_mstu@mail.ru, Ph.D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Dereviannih Evgeniya Anatolyevna

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, Ph.D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

Khramova Natalia Vladimirovna

e-mail: alexei.maksimow@yandex.ru, Senior Lecturer, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia

articles of VNPk. Cheboksary: «FGBOU VO Chuvash State Agricultural Academy», 2016. P. 592–599. (in Russian)

[7] Maksimov A. N. To the problem of determining the stress state of an array from a granular medium // Bulletin of the Chuvash State Agricultural Academy. 2017. No. 1. P. 75–81. (in Russian)

[8] Sokolovsky V. V. Static of the granular medium. M.: GITTL, 1954. (in Russian)

[9] Ivlev D. D., Ershov L. V. Perturbation method in the theory of an elastoplastic body. M.: Nauka, 1978. 208 p. (in Russian)

[10] Ivlev D. D. Theory of ideal plasticity. M.: Nauka, 1966. 231 p. (in Russian)