Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3 (33). С. 64–68

А. В. Никитин

К ВОПРОСУ О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ТРУБЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Чебоксарский институт (филиал) Московского политехнического университета, г. Чебоксары

Аннотация. Рассматривается предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Материал предполагается неоднородным и обладающим свойствами анизотропии в пластической области. Неоднородность материала заключается в том, что предел текучести зависит от координат, причем он постоянен вдоль концентрических окружностей. Определено предельное состояние трубы в первом приближении.

Ключевые слова: пластичность, неоднородность, труба, анизотропия.

УДК: 539.3+624.073

Рассмотрим толстостенную трубу радиусов a, b; $a < b$, которая находится под действием внутреннего давления p (рис. 1). Условие пластичности примем в виде [2]:

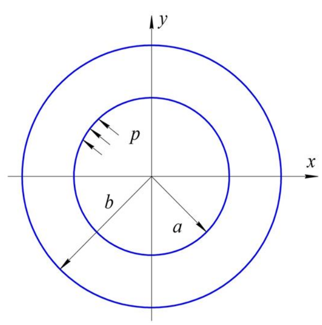

Рис. 1. Толстостенная труба радиусов a, b; $a < b$

Никитин Андрей Витальевич
`e-mail:` ligalas5@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры управления в технических системах и программирования Чебоксарского института (филиала) Московского политехнического университета, г. Чебоксары, Россия

Поступила 10.08.2017

$$A\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}-\frac{k_1-k_2}{2}\right)^2+B\left(\tau_{xy}-k_3\right)^2=k_{xy}^2, \quad k_1,k_2,k_3--const, \tag{1}$$

где $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}--$ компоненты напряжения в декартовой системе координат.

Положим

$$k_{xy}=k_0+\delta c(x^2+y^2), \quad k_0,c--const, \tag{2}$$

где δ – малый безразмерный параметр.

Связь между напряжениями в декартовой системе координат x,y и напряжениями в полярной системе координат ρ,θ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\sigma_x=\tfrac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}+\tfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\cos 2\theta+\tau_{\rho\theta}\sin 2\theta,\\ \sigma_y=\tfrac{\sigma_\rho+\sigma_\theta}{2}-\tfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\cos 2\theta-\tau_{\rho\theta}\sin 2\theta,\\ \tau_{xy}=-\tfrac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{2}\sin 2\theta+\tau_{\rho\theta}\cos 2\theta.\end{gathered} \tag{3}$$

Перейдем к полярным координатам:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta. \tag{4}$$

Из (1) – (4) получим пластичности в полярных координатах:

$$\begin{gathered}\left(\sigma_\rho-\sigma_\theta\right)^2\left[A\cos^2(2\theta)+B\sin^2(2\theta)\right]+4\tau_{\rho\theta}^2\left[A\sin^2(2\theta)+B\cos^2(2\theta)\right]\\ +\left[A\left(k_1-k_2\right)^2+4Bk_3^2\right]+2\left(\sigma_\rho-\sigma_\theta\right)\tau_{\rho\theta}\left(A-B\right)\sin(4\theta)-\\ -4\tau_{\rho\theta}\left[\sin(2\theta)\left(k_1-k_2\right)+2\cos(2\theta)k_3\right]-\\ -2\left(\sigma_\rho-\sigma_\theta\right)\left[\cos(2\theta)\left(k_1-k_2\right)-2k_3\sin(2\theta)\right]=\\ =4\left(1+c\delta\rho^2\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right)\right)^2.\end{gathered} \tag{5}$$

Положим, что

$$\frac{a}{\rho_s^{(0)}}=\alpha, \ \frac{b}{\rho_s^{(0)}}=\beta,$$

$$k_1=\delta_1 k_1', \quad k_2=\delta_1 k_2', \quad k_3=\delta_1 k_3'.$$

Уравнения равновесия в полярной системе координат имеют следующий вид:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0,\\ \frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\tau_{\rho\theta}}{\rho}=0.\end{array}\right. \tag{6}$$

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ, будем искать решение в виде:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}^{(I)}\delta+\sigma_{ij}^{(II)}\delta^2+\ldots \quad , \tag{7}$$

Согласно (2) предел текучести k сохраняет постоянное значение вдоль концентрических окружностей

$$c\left(x^2+y^2\right)=d, \quad d-const \tag{8}$$

и изменяется в зависимости от изменения величины d.

Будем считать, что на внутренней поверхности трубы действует постоянное давление p, а внешняя поверхность свободна от усилий.

Положим, что искомое решение зависит от некоторого параметра δ, будем искать решение в виде (7).

В исходном нулевом приближении имеет место осесимметричное состояние трубы:

$$\tau_{\rho\theta}^{(0)} = 0. \tag{9}$$

Из (1), (7), (9) имеет место

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} - \sigma_{\theta}^{(0)p} = -2. \tag{10}$$

Решая совместно (6), (9), (10), получим

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = 2\ln\rho + C, \sigma_{\theta}^{(0)p} = 2 + 2\ln\rho + C, \tag{11}$$

где C – *const.*

Предположим, что на внутренней границе действует постоянное давление p, внешняя граница трубы свободна от усилий:

$$\left.\sigma_{\rho}^{(0)p}\right|_{\rho=\alpha} = -p. \tag{12}$$

Из (11), (12) имеют место

$$\sigma_{\rho}^{(0)p} = -p + 2\ln\frac{\rho}{\alpha}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)p} = -p + 2 + 2\ln\frac{\rho}{\alpha}. \tag{13}$$

Из (5), (7), (10) получим:

$$\begin{gathered}\sigma_{\theta n}^{(I)} - \sigma_{\rho n}^{(I)} = 2c\rho^2 + \left[\tfrac{a+b}{2} + \tfrac{a-b}{2}\cos(4\theta)\right] - k_1\cos(2\theta) + \\ +k_2\cos(2\theta) + 2k_3\sin(2\theta).\end{gathered} \tag{14}$$

Уравнения равновесия (6) удовлетворим, полагая, что

$$\sigma_{\rho}^{\prime\, p} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{\prime\, p} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{\prime\, p} = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right). \tag{15}$$

Из (14, (15) получим:

$$\begin{gathered}\rho^2\tfrac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} - \rho\tfrac{\partial\Phi}{\partial\rho} - \tfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} = 2c\rho^4 + \rho^2\left(G + H\cos(4\theta)\right) + \\ +\rho^2\cos(2\theta)\left(k_2 - k_1\right) + 2k_3\rho^2\sin(2\theta),\end{gathered} \tag{16}$$

где

$$G = \left(\frac{a+b}{2}\right), \; H = \left(\frac{a-b}{2}\right).$$

В первом приближении граничные условия согласно [1] имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\sigma_{\rho}^{\prime\, p}|_{\rho=\alpha} = 0, \\ \tau_{\rho\theta}^{\prime\, p}|_{\rho=\alpha} = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Решение в пластической зоне будет определяться из (16, (17):

$$
\begin{gathered}
\sigma_p'^{\,p} = \tfrac{\sin(2\theta)}{8\rho}\left[8k_3\alpha\left(\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)+\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-\right.\\
-\left(8k_3\alpha\left(\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)-\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)\right)-8k_3\rho\big]+\\
+\tfrac{\cos(2\theta)}{8\rho}\left[\left(-4\left(k_1-k_2\right)\alpha\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)+\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)+\right.\\
+\left(4\left(k_1-k_2\right)\alpha\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)-\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)+4\left(k_1-k_2\right)\rho\big]+\\
+\tfrac{\cos(4\theta)}{8\rho}\left[\left(H\alpha\left(\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)+7\cos\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{15}\ln\alpha\right)-\right.\\
-\left(H\alpha\left(\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)-7\sin\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)\right)\sin\left(\sqrt{15}\ln\alpha\right)-7H\rho\big]+\\
+\mathrm{c}\tfrac{\rho^2}{\alpha^2}+G\ln\left(\tfrac{\rho}{\alpha}\right),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma_\theta'^{\,p} = \tfrac{\sin(2\theta)}{8\rho}\left[8k_3\alpha\left(\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)+\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-\right.\\
-\left(8k_3\alpha\left(\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)-\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)\right)+8k_3\rho\big]+\\
+\tfrac{\cos(2\theta)}{8\rho}\left[\left(-4\left(k_1-k_2\right)\alpha\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)+\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)+\right.\\
+\left(4\left(k_1-k_2\right)\alpha\sqrt{3}\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)-\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-4\left(k_1-k_2\right)\rho\big]+\\
+\tfrac{\cos(4\theta)}{8\rho}\left[\left(H\alpha\left(\sqrt{15}\right)\sin\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)+7\cos\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{15}\ln\alpha\right)-\right.\\
-\left(H\alpha\left(\sqrt{15}\right)\cos\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)-7\sin\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)\right)\sin\left(\sqrt{15}\ln\alpha\right)+H\rho\big]+\\
+\mathrm{c}\tfrac{3\rho^2}{\alpha^2}+G\ln\left(\rho+1\right),
\end{gathered}
\tag{18}
$$

$$
\begin{gathered}
\tau_{\rho\theta}'^{\,p} = \tfrac{\sin(2\theta)}{240\rho}\left[-240\alpha\left(\tfrac{k_2-k_1}{2}\right)\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)-\tfrac{1}{2}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-\right.\\
-240\alpha\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)\left(\tfrac{k_2-k_1}{2}\right)\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)+\right.\\
\left.+\ \tfrac{1}{6}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)+60\rho\left(2k_2-2k_1\right)\big]+\\
+\tfrac{\cos(2\theta)}{240\rho}\left[-240\alpha k_3\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)-\tfrac{1}{2}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-\right.\\
-240\alpha k_3\sin\left(\cos\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)+\tfrac{1}{6}\sin\left(\sqrt{3}\ln\rho\right)\right)\sin\left(\sqrt{3}\ln\alpha\right)-240\rho k_3\big]+\\
+\tfrac{\sin(4\theta)}{240\rho}\left[-60\alpha H\left(\cos\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)-\tfrac{1}{4}\sin\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)\right)\cos\left(\sqrt{15}\ln\alpha\right)-\right.\\
-60H\alpha\sqrt{15}\sin\left(\sqrt{15}\ln\alpha\right)\left[\cos\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)+\tfrac{1}{60}\alpha\sin\left(\sqrt{15}\ln\rho\right)\right]+60\rho H\big].
\end{gathered}
$$

Таким образом (18) полностью описывают напряженное состояние неоднородно-анизотропной трубы в первом приближении.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ивлев Д. Д., Ершов Л.В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

[2] Ивлев Д. А. Об анизотропии пластических тел // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2010. № 2 (66). С. 64–68.

[3] Никитин А. В. Предельное состояние неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 60–70.

[4] Никитин А. В., Тихонов С. В. Упругопластическое состояние трансляционно-анизотропной линейно-неоднородной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2013. № 4 (80). Ч. 2. С. 148–155.

[5] Никитин А. В., Миронов Б. Г. Определение перемещений в пластической и упругой областях в толстостенной неоднородной трубе при трансляционной анизотропии // Сборник статей по материалам XIV международной заочной научно-практической

конференции «Научная дискуссия: вопросы математики, физики, химии, биологии». 2014. №2 (14). С. 93–106.

A. V. Nikitin

THE QUESTION OF THE ULTIMATE STATE INHOMOGENEOUS PIPE UNDER INTERNAL PRESSURE

Cheboksary institute (branch) of the Moscow polytechnic university, Cheboksary, Russia

Abstract. Considered is limit state of the inhomogeneous pipe under internal pressure. The material is assumed heterogeneous, and possess the properties of anisotropy in the plastic region. The heterogenity of the material is that pre-turnover depends on the coordinates, and it is constant along concentric circles. Defined is limit state of the pipe in the first approximation.

Keywords: plasticity, heterogenity, pipe, anisotropy.

REFERENCES

[1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushhenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s. (in Russian)

[2] Ivlev D. A. Ob anizotropii plasticheskih tel // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. 2010. № 2 (66). S. 64–68. (in Russian)

[3] Nikitin A. V. Predel'noe sostojanie neodnorodnoj truby, nahodjashhejsja pod dejstviem vnutrennego davlenija // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2015. № 1 (23). S. 60–70. (in Russian)

[4] Nikitin A. V., Tihonov S. V. Uprugoplasticheskoe sostojanie transljacionno-anizotropnoj linejno-neodnorodnoj truby, nahodjashhejsja pod dejstviem vnutrennego davlenija // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. 2013. № 4 (80). Ch. 2. S. 148–155. (in Russian)

[5] Nikitin A. V., Mironov B. G. Opredelenie peremeshhenij v plasticheskoj i uprugoj oblastjah v tolstostennoj neodnorodnoj trube pri transljacionnoj anizotropii // Sbornik statej po materialam XIV Mezhdunarodnoj zaochnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Nauchnaja diskussija: voprosy matematiki, fiziki, himii, biologii». 2014. №2(14). S. 93-106. (in Russian)

Nikitin Andrey Vitalevich

`e-mail:` ligalas5@mail.ru, Ph.D., Assoc. Professor, Cheboksary institute (branch) of the Moscow polytechnic university, Cheboksary, Russia.