

А. Н. Спорыхин

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СМЕСЕЙ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Вопросам устойчивости пластически деформирующихся сред посвящены многие работы. Состояние этих исследований, проведенных на основании трехмерных линейаризованных уравнений устойчивости, отражено в обзорных статьях и монографиях [1] – [4] и др. При этом значительная часть конкретных результатов получена в основном для задач устойчивости в геомеханике [5 – 7 и др.]. Для описания поведения и исследования устойчивости в строгой линейаризованной трехмерной постановке целого ряда реальных структур, состоящих из n – компонент, необходимо для лучшего приближения к действительности привлекать более общие модели тел. Очевидно, что в рамках простейших структурных моделей тел [8] – [9], в том числе и модели [10], невозможно адекватно описать поведение многокомпонентных смесей. Ниже для предложенной модели многокомпонентного тела рассматривается один из возможных приближенных подходов к исследованию устойчивости многокомпонентных упруговязкопластических (EVP) смесей. Устанавливается, что исследование устойчивости основного (докритического) состояния смеси может быть сведено к изучению устойчивости континуума с комплексными физико-механическими параметрами.

Ключевые слова: смеси, устойчивость, напряжение, деформация, пластичность, вязкость.

УДК: 539.375

1. Рассмотрим EVP многокомпонентное тело, механическая модель которого изображена на рисунке 1. Индексы e, e_1, p, v обозначают соответственно упругий, пластический и вязкий механизмы. Модель представляет собой последовательное соединение α ($\alpha = 1, 2, 3...$) моделей тела $S_p^1 = H \sim StV \sim K$)¹, состоящего из последовательно соединенных тел: H – тела Гука, StV – тела Сен-Венана и K – тела Кельвина–Фойхта. При этом у каждой из этих моделей S_p^α свои собственные константы. Число α определяет порядок обобщенной модели тела S_p^α .

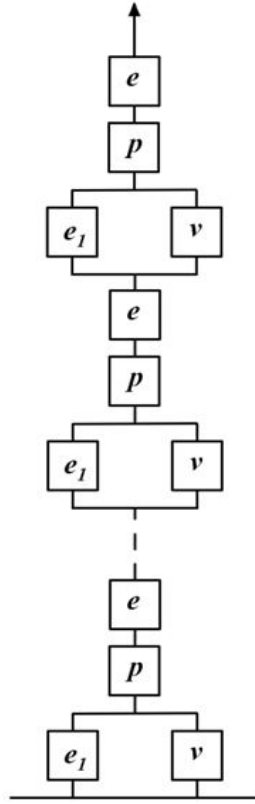
© Спорыхин А. Н., 2017

Спорыхин Анатолий Николаевич

e-mail: anspror@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры механики и компьютерного моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 10.08.2017

¹Модель этого тела была предложена А. Н. Спорыхиным [10].

Рис. 1. Обобщенная модель тела S_p^α

1.1. На основе теоретических соображений, следуя [8] – [10], запишем соотношения, которые полностью определяют свойства обобщенной модели S_p^α , состоящей из двух элементов.

Тело остается упругим пока

$$S_{ij}S^{ij} < k_1^2; S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}; k_1 \geq k_2, \quad (1)$$

где S_{ij} – компоненты девиатора тензора напряжений. При этом для последовательно соединенных моделей

$$\sigma_{ij}^\alpha = \lambda_\alpha \varepsilon_{nn}^\alpha \delta_{ij} + 2\mu_\alpha \varepsilon_{ij}^\alpha, \Sigma \alpha = 1, 2, \quad (2)$$

где $\lambda_\alpha, \mu_\alpha$ – параметры Ламе.

Если $S_{ij}S^{ij} \geq k_1^2$, то полная деформация складывается из упругой и пластической

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2 = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p. \quad (3)$$

Здесь $\varepsilon_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^2$ – деформации первой и второй модели соответственно. Пластическая составляющая объемной деформации моделей удовлетворяет условию несжимаемости

$$\varepsilon_{nn}^{\alpha p} = 0, \alpha = 1, 2. \quad (4)$$

Следовательно, компоненты девиатора тензора деформации $e_{ij}^{\alpha p}$ тождественно равны компонентам тензора деформаций $\varepsilon_{ij}^{\alpha p}$.

Напряжения, приложенные к моделям, одинаковы, тогда

$$S_{ij}^1 = S_{ij}^2 = S_{ij} \left(\sigma_{ij}^1 = \sigma_{ij}^2 = \sigma_{ij} \right). \quad (5)$$

Тензоры скоростей пластической деформации $e_{ij}^{\alpha p}$ связаны с тензором напряжений соотношениями ассоциированного закона течения

$$e_{ij}^{\alpha p} = \psi_{\alpha} \left(S_{ij} - c_{\alpha} \varepsilon_{ij}^{\alpha p} - \eta_{\alpha} e_{ij}^{\alpha p} \right), \quad \alpha = 1, 2, \quad (6)$$

если выполняется условие пластичности

$$\left(S_{ij} - c_{\alpha} \varepsilon_{ij}^{\alpha p} - \eta_{\alpha} e_{ij}^{\alpha p} \right) \left(S_{ij} - c_{\alpha} \varepsilon_{ij}^{\alpha p} - \eta_{\alpha} e_{ij}^{\alpha p} \right) = k_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь η_{α} – коэффициент вязкости, c_{α} – коэффициент упрочнения, k_{α} – предел текучести, ψ_{α} – скалярные положительные множители, соответственно, первой ($\alpha = 1$) и второй ($\alpha = 2$) модели.

Полные деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i. \quad (8)$$

Уравнения (1)–(8) с уравнениями равновесия

$$\nabla_i \sigma_j^i + X_j = 0 \quad (9)$$

представляют собой систему уравнений, описывающих деформированное состояние *EVP* среды второго порядка.

2. Системы S_p^{α} , испытывающие *EVP* деформации, обладают свойством внутренней неконсервативности вследствие необратимости вязких и пластических деформаций. Поэтому согласно [3, 4] исследование устойчивости состояния такой системы должно основываться на анализе движения такой системы вблизи основного состояния равновесия при сообщении системе некоторых малых возмущений, то есть на основе динамического подхода.

При исследовании устойчивости систем S_p^{α} , для которых наблюдается явление разгрузки, для упрощения задач ввиду их сложности применяем обобщенную концепцию продолжающегося нагружения [2, 3] и будем исследовать соответствующую линеаризованную задачу с известными зонами разгрузки, возникшими в докритическом состоянии.

Рассмотрим сплошную среду объема V . Предположим, что на части поверхности Σ_P *EVP* тела заданы поверхностные усилия p_i , а на части поверхности Σ_U – перемещения u_i , причем величины p_i и u_i с ростом времени t стремятся или принимают значения p_i^0 и u_i^0 , не зависящие от времени.

Пусть решение системы уравнений (1) – (8) при этих граничных условиях есть

$$\overset{0}{\sigma}_{ij}(x_k, t), \overset{0}{\varepsilon}_{ij}(x_k, t), \overset{0}{e}_{ij}^{\varepsilon\alpha}(x_k, t), \overset{0}{e}_{ij}^{p\alpha}(x_k, t), \overset{0}{u}_i(x_k, t). \quad (10)$$

Будем предполагать, что с ростом времени эти решения стремятся к

$$\overset{0}{\sigma}_{ij}(x_k), \overset{0}{\varepsilon}_{ij}(x_k), \overset{0}{e}_{ij}^{\varepsilon\alpha}(x_k), \overset{0}{e}_{ij}^{p\alpha}(x_k), \overset{0}{u}_i(x_k). \quad (11)$$

В дальнейшем исследуется устойчивость этого состояния по отношению к малым возмущениям, при предположении, что об устойчивости движения можно судить по линеаризованной системе уравнений (1) – (9).

В случае второго варианта теории малых докритических деформаций [5] трехмерные линеаризованные уравнения равновесия имеют вид

$$\nabla_s \left(\overset{+}{\sigma}_j^s + \overset{0}{\sigma}_k^s \nabla^k \overset{+}{u}_j \right) + \overset{+}{X}_j - \rho \frac{\partial^2 \overset{+}{u}_j}{\partial t^2} = 0. \quad (12)$$

Здесь и далее верхние индексы «+» «и «0» приписаны соответственно компонентам невозмущенного состояния и возмущениям.

Граничные условия на внешней поверхности Σ_P обобщенного EVP тела следующие:

$$N_s \left(\overset{+}{\sigma}_j^s + \overset{0}{\sigma}_k^s \nabla^k \overset{+}{u}_j \right) = \overset{+}{P}_j, \quad (13)$$

при этом в случае «следающей» нагрузки

$$\overset{+}{P}_j = \overset{0}{P}_k \nabla^k \overset{+}{u}_j, \overset{+}{X}_j = \overset{0}{X}_k \nabla^k \overset{+}{u}_j, \quad (14)$$

а в случае «мертвой» нагрузки

$$\overset{+}{P}_j = \overset{+}{X}_j = 0. \quad (15)$$

Если на части поверхности тела Σ_U заданы перемещения, то граничные условия принимают вид:

$$\overset{+}{u}_j = 0. \quad (16)$$

Для компонент тензора деформаций имеют место формулы Коши

$$2\overset{+}{\varepsilon}_{jk} = \nabla_k \overset{+}{u}_j + \nabla_j \overset{+}{u}_k, 2\overset{0}{\varepsilon}_{jk} = \nabla_k \overset{0}{u}_j + \nabla_j \overset{0}{u}_k. \quad (17)$$

Соотношение (2) в этом случае запишется

$$\overset{+}{\sigma}_{ij}^{\alpha} = \lambda_{\alpha} \overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon\alpha} + 2\mu_{\alpha} \overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (18)$$

Для полных деформаций из (3) следует:

$$\overset{+}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^2 \overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^2 \left(\overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{\varepsilon\alpha} + \overset{+}{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha} \right). \quad (19)$$

Условие пластической несжимаемости таково:

$$\overset{+}{\varepsilon}_{nn}^{p\alpha} = 0, (\alpha = 1, 2). \quad (20)$$

Для несжимаемого упрочняющегося, EVP обобщенного S_p^α тела линеаризированные условия пластичности (7) и ассоциированный закон течения (6) принимают соответственно, вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ S_j^k - c_\alpha \varepsilon_j^{p\alpha k} - \eta_\alpha e_j^{p\alpha k} \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} + \\ S_j^k - c_\alpha \varepsilon_j^+ - \eta_\alpha e_j^{p\alpha k} \end{smallmatrix} \right) = 0 \\ e_j^{p\alpha k} = \psi_\alpha^0 \left(\begin{smallmatrix} + \\ S_j^k - c_\alpha \varepsilon_j^{p\alpha k} - \eta_\alpha e_j^{p\alpha k} \end{smallmatrix} \right) + \psi_\alpha^+ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ S_j^k - c_\alpha \varepsilon_j^{p\alpha k} - \eta_\alpha e_j^{p\alpha k} \end{smallmatrix} \right), \quad \alpha = 1, 2 \end{array} \right. \quad (21)$$

Исключая из соотношений (19) вариации упругих ε_k^{e+} , а также пластических ε_k^{p+} деформаций и величины ψ_α^+ получим

$$\left[2\mu_\alpha \sigma^{ij} - \frac{2}{3}\mu_\alpha (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \varepsilon_k^{+} g^{ij} - c_\alpha \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^{+} g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{+} - \sigma^{ij} \right) - \right. \quad (22)$$

$$\left. - \eta_\alpha \left(\lambda_\alpha \dot{\varepsilon}_k^{+} g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{+} - \dot{\sigma}^{ij} \right) \right] \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{ij}^{p\alpha} \end{smallmatrix} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + 2\eta_\alpha \psi_\alpha^0 \right) \left(\lambda_\alpha \dot{\varepsilon}_k^{+} g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \dot{\varepsilon}_{kl}^{+} - \dot{\sigma}^{ij} \right) + \\ & + 2c_\alpha \psi_\alpha^0 \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^{+} g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{+} - \sigma^{ij} \right) = \\ & = k_\alpha^{-2} \left(\lambda_\alpha \varepsilon_n^{+} + g^{kl} + 2\mu_\alpha g^{nk} g^{ml} \dot{\varepsilon}_{nm}^{+} - \dot{\sigma}^{kl} \right) \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ S_{kl} - c_\alpha \varepsilon_{kl}^{p\alpha} - \eta_\alpha e_{kl}^{p\alpha} \end{smallmatrix} \right) \cdot \\ & \cdot \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ S^{ij} - c_\alpha \varepsilon^{p\alpha ij} - \eta_\alpha e_{kl}^{p\alpha} \end{smallmatrix} \right) + 2\psi_\alpha^0 \left[2\mu_\alpha \sigma^{ij} - \frac{2}{3}\mu_\alpha (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \varepsilon_k^{+} g^{ij} \right], \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, линеаризированные уравнения состояния (22), (23) для обобщенного S_p^α тела совместно с соотношениями (17)–(19) и линеаризированными уравнениями второго варианта трехмерной теории устойчивости при малых деформациях (12) с краевыми условиями (13), (16) представляют собой замкнутую связную краевую задачу. Уравнения (12), (17), (19), (22), (23), описывающие возмущенное состояние обобщенной модели S_p^α второго порядка, представляют собой сложную систему дифференциальных уравнений в частных производных с нестационарными коэффициентами. Поэтому практическое значение в решении проблем устойчивости неупругих сред получил приближенный подход [4], позволяющий исследование устойчивости основного состояния производить по предельной системе уравнений.

Устремляя время t к бесконечности и учитывая, что при этом $\dot{\varepsilon}_{ij}^{p\alpha} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \psi_\alpha^0 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, (\alpha = 1, 2)$, получаем предельную систему уравнений.

Уравнения равновесия таковы:

$$\nabla_s \left(\sigma_j^s + \sigma_k^s \nabla^k u_j^+ \right) + X_j^+ - \rho \ddot{u}_j^+ = 0. \quad (24)$$

Уравнения состояния принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (2\mu_\alpha \sigma^{ij} - \frac{2}{3}\mu_\alpha (3\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha) \varepsilon_k^{\alpha k} g^{ij} - c_\alpha \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^{\alpha k} g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{\alpha} - \sigma^{ij} \right) - \\ - \eta_\alpha \left(\lambda_\alpha \varepsilon_k^{\alpha k} g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{\alpha} - \sigma^{ij} \right) \left(S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha} \right) = 0 \\ \lambda_\alpha \varepsilon_k^{\alpha k} + g^{ij} + 2\mu_\alpha g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{\alpha} - \sigma^{ij} = k^{-2} \left(\lambda_\alpha \varepsilon_n^{\alpha n} + g^{kl} + \right. \\ \left. + 2\mu_\alpha g^{nk} g^{ml} \varepsilon_{nm}^{\alpha} - \sigma^{kl} \right) \left(S^{ij} - c_\alpha \varepsilon^{p\alpha ij} \right) \left(S_{kl} - c_\alpha \varepsilon_{kl}^{p\alpha} \right) \\ \varepsilon_{ij}^{\alpha} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2, \quad \sum \alpha = 1, 2 \end{array} \right. \quad (25)$$

При этом вариации компонент тензора деформации связаны с вариациями компонент вектора перемещений формулами Коши (17).

Краевые условия на нагруженной поверхности тела Σ_P таковы:

$$N_s \left(\sigma_j^s + \sigma_k^s \nabla^k u_j^+ \right) = P_j^+. \quad (26)$$

3. Рассмотрим краевую задачу (24)–(26), (17). Выкладки проведем в декартовых координатах. Решение этих уравнений будем искать в виде:

$$u_j^0(x_k, t) = u_j(x_k) e^{st}, \quad \varepsilon_{ij}^0(x_k, t) = \varepsilon_{ij}^\alpha(x_k) e^{st}, \quad \sigma_{ij}^0(x_k, t) = \sigma_{ij}(x_k) e^{st}, \quad (27)$$

то есть в компонентах векторов и тензоров, характеризующих возмущения, выделим временной множитель e^{st} ($s = i\omega$ – комплексная величина) и для амплитудных величин оставим прежние обозначения, опустив значок плюса.

Подставляя решения (27) в уравнение (24) получим

$$\left(\sigma_{ij} + \sigma_{jk}^0 u_{i,k} \right)_{,j} + X_j + \rho \omega^2 u_i = 0. \quad (28)$$

Из соотношений (23) получаем

$$\sigma_{ij} = A_1 A_2 \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + \mu_0^{-1} \varepsilon_{ij} - \mu_0^{-1} \left[\frac{B_1}{K_2^0 K_2^0} \left(f_{ij}^{01} - \frac{B_2 F}{K_2^0} f_{ij}^{02} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot (B_2 F f_{kl}^{01} - K_2^0 f_{kl}^{02}) + B_2 K_2^{-1} f_{ij}^{02} f_{kl}^{02} \right] \varepsilon_{kl}, \quad (29)$$

где обозначено

$$A_1 = \frac{\lambda_1}{2\mu_1 \mu_0 (3\lambda_1 + 2\mu_1)} + \frac{\lambda_2}{2\mu_2 \mu_0 (3\lambda_2 + 2\mu_2)}; \quad A_2 = \frac{1}{\mu_0 (1 - 3A_1)}; \\ f_{ij}^\alpha = S_{ij} - c_\alpha \varepsilon_{ij}^{p\alpha}; \quad F = f_{ij}^{01} f_{ij}^{02}; \quad B_\alpha = \frac{a^\alpha}{2\mu_\alpha \mu_0 (a^\alpha k_\alpha^2 - 2\mu_\alpha)}; \quad a^\alpha = \frac{4\mu_\alpha^2}{k_\alpha^2 (2\mu_\alpha + c_\alpha + S\eta_\alpha)}; \\ \mu_0 = \frac{1}{2} \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2}; \quad K_\alpha = 1 + k_\alpha^2 B_\alpha, \quad \sum \alpha = 1, 2. \quad (30)$$

Соотношения (29), (30) можно трактовать как зависимость между напряженным и деформируемым состоянием в упругой анизотропной среде с комплексными модулями.

Связь между амплитудными величинами деформаций и перемещений, а также граничные условия на поверхности Σ_P среды согласно уравнениям (17), (26) и (27) имеют вид:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad (31)$$

$$\left(\sigma_{ij} + \frac{0}{\sigma} u_{i,k} \right) N_j = P_i. \quad (32)$$

Таким образом, в рамках принятой механической модели *EVP* смеси (к таким средам можно отнести суспензии одной *EVP* среды в другой, полимерные растворы и многие другие) исследование устойчивости докритического состояния смеси сведено к исследованию устойчивости анизотропного континуума с комплексными физико-механическими параметрами.

Заметим, как и для случая обобщенной модели S_p^α ($\alpha = 1, 2$) второго порядка, с очевидной вероятностью в рамках предложенного подхода можно вывести соотношения вида (29) для обобщенной модели S_p^α произвольного порядка ($\alpha = 1, 2, \dots$).

Таким образом, статические задачи устойчивости в случае геометрически линейной теории сводятся к задачам на собственные значения относительно параметра ω . Для принятого критерия устойчивости основное состояние тела будет устойчивым, если для собственных значений ω_β выполняются следующие условия [1, 2]:

$$Im\omega_\beta \geq 0, (\beta = 1, 2, \dots, \infty). \quad (33)$$

Условия (33) определяют область устойчивости в пространстве параметров нагружения, характеризующих исследуемую конкретную задачу, так как собственные значения ω_β зависят не только от геометрии тела и вида соотношений (29), но также и от параметров нагружения – величин, характеризующих внешние нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Гузь А. Н., Спорыхин А. Н. Трехмерная теория неупругой устойчивости. Общие вопросы // Прикладная механика. 1982. Т. 18, № 7. С. 3–22.
- [2] Гузь А. Н., Спорыхин А. Н. Трехмерная теория неупругой устойчивости. Конкретные результаты // Прикладная механика. 1982. Т. 18, № 8. С. 3–27.
- [3] Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. Киев: Вища школа, 1986. 512 с.
- [4] Спорыхин А. Н. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1997. 361 с.
- [5] Гузь А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок. Киев: Наукова Думка, 1977. 204 с.
- [6] Спорыхин А. Н., Шашкин А. И. Устойчивость равновесия пространственных тел и задачи механики горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 232 с.
- [7] Спорыхин А. Н. Неконсервативные задачи трехмерной теории неупругой устойчивости в геомеханике. Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. 372 с.
- [8] Рейнер М. Реология. М.: Наука, 1965. 223 с.
- [9] Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971. 231 с.

[10] Спорыхин А. Н. Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел // ПМТФ. 1967. № 4. С. 52–58.

A. N. Sporykhin

TO THE RESEARCH OF STABILITY OF ELASTOVISCOUSPLASTIC MIXTURES

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. There are many researches relating to problems of stability of plastically deforming solids. Survey of articles and monographs [1]–[4] reflects the state of researches based on three-dimensional linearized equations of stability. As that, considerable part of practical results were found for stability problems in geomechanics [5]–[7]. For description of the behavior and for stability analysis in a strict three-dimensional linearized formulation for a number of real structures consisting of n – components it is necessary to involve more general models of solids for better approximation. Obviously, it is impossible to describe adequately the behavior of multi-component mixtures using simple structural models of solids [8]–[9], including [10]. In the article it is considered one of the possible approximate approaches to the research of stability of multi-component elastoviscousplastic (EVP) mixtures. It is shown, that the research of stability of the ground state of mixture can be reduced to the research of stability of continuum with complex physical and mathematical parameters.

Keywords: mixtures, stability, stress, deformation, plasticity, viscosity.

REFERENCES

- [1] Guz A. N., Sporykhin A. N. Three-dimentional theory of non-elastic stability. General questions // Prikladnaya mechanika. 1982. Vol. 18, № 7. P. 3–22. (in Russian)
- [2] Guz A. N., Sporykhin A. N. Three-dimentional theory of non-elastic stability. Specific results // Prikladnaya mechanika. 1982. Vol. 18, № 8. P. 3–27. (in Russian)
- [3] Guz A. N. Basic of three-dimentional theory of stability of deformable solids. Kiev: Visha shkola, 1986. 512 p. (in Russian)
- [4] Sporykhin A. N. Perturbation method in problems of stability of complex continuum. Voronezh: Voronezh State University, 1997. 361 p. (in Russian)
- [5] Guz A. N. Basic of theory of stability of excavations. Kiev: Naukova Dumka, 1977. 204 p. (in Russian)
- [6] Sporykhin A. N., Shashkin A. I. Stability of equilibrium of three-dimentional solids and problems of mechanics of excavations. M.: FIZMATLIT, 2004. 232 p. (in Russian)
- [7] Sporykhin A. N. Non-conservative problems of three-dimensional theory of non-elastic stability in geomechanics. Voronezh: Izdatelskiy dom VGU, 2015. 372 p. (in Russian)
- [8] Reiner M. Reology. M.: Nauka, 1965. 223 p. (in Russian)
- [9] Ivlev D. D., Bykovcev G. I. Theory of strain-hardening plastic solid. M.: Nauka, 1971. 231 p. (in Russian)
- [10] Sporykhin A. N. About stability of deforming of elastoviscousplastic solids // PMTF. 1967. № 4. P. 52–58. (in Russian)

Sporykhin Anatoliy Nicolaevich

e-mail: anspor@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia.