Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3 (33). С. 77–86

В. А. Кадымов

К ПОСТАНОВКЕ И РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе обсуждаются общие вопросы математического моделирования контактных задач пластического течения с возможным наличием объемов промежуточных «смазок», анализируются характерные особенности рассматриваемых процессов, дается их физическая интерпретация, указаны подходы для их включения в математическую модель. Во второй части рассматривается специальный класс контактных задач пластического течения в сравнительно тонком пластическом слое между двумя сближающимися поверхностями внешних тел. Развивается известная теория А. А.Ильюшина на следующие случаи: а) учета анизотропии свойств контактной поверхности; б) удержания физических объемов промежуточных «смазок» вдоль контакта в процессах объемной штамповки. Обе особенности продемонстрированы автором на решении конкретных практических задач, также представлены качественные выводы.

Ключевые слова: механика, напряжения, деформации, пластичность, упругость.

УДК: 539.3+624.073

1. Рассмотрим один из общих подходов в описании физических процессов контактного взаимодействия системы, включающей «инструмент–обрабатываемое тело–промежуточная мягкая среда». Это сложные пространственные начально-краевые задачи математической физики с неизвестными границами и неклассическими условиями на них. В зависимости от исследуемого процесса главную роль в их описании могут играть такие факторы как

– вязкое и деформационное упрочнение деформируемого объема Ω^p;
– объемная сжимаемость подвергаемого обработке объема Ω^p;
– упругие деформации инструментов Ω^e, в частности нормальные упругие перемещения W^e инструмента на поверхности контакта;
– наличие и удержание промежуточных «смазочных» объемов Ω^* на контакте;
– состояние контактной поверхности, наличие на ней рельефных конфигураций;

Кадымов Вагид Ахмедович
e-mail: vkadymov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Московского государственного гуманитарно-экономического университета, г. Москва, Россия

Поступила 10.08.2017

– интенсивность теплообмена между контактирующими телами и средами, возможность образования приконтактных зон затвердевания или размягчения;

– влияние сложности реализации процесса на распределение физических параметров в исследуемом процессе;

– эффект сверхпластичности;

– влияние электрических свойств контактирующих тел, и т. д.

Ниже мы представим физическое обоснование приведенных характерных особенностей и одновременно укажем один из возможных способов их включения в математическую модель исследуемого процесса.

1.1. Если все размеры области Ω^p являются величинами одного порядка, то допускается рассмотреть Ω^e как недеформируемый объем. Однако если размеры области Ω^p имеют разный порядок (как, например, в процессах течения в тонком пластическом слое), то нормальные упругие перемещения $\vec{w}^e$ тел инструмента могут оказаться соизмеримыми с толщиной h текущего слоя $\Omega^p \quad (\vec{w}^e \sim h)$. В связи с этим появляется необходимость в рассмотрении модели контактного взаимодействия упругих Ω^e и пластическихΩ^p тел.

1.2. Как правило, в практике расчета технологических процессов обработки материалов давлением находят применение физические уравнения для траекторий процессов с малой кривизной (типа уравнений Сен-Венана)[1]-[3]:

$$\tilde{\sigma} - \sigma\ \tilde{\mathrm{E}} = \frac{2\ \sigma_u}{3\ v_u}(\ \tilde{V} - V\ \tilde{\mathrm{E}}\ ),\ \bar{x} \in \Omega^p \tag{1}$$

$$\sigma_u = \Phi_1(e, v_u, \mathrm{T}, ...), \tag{2}$$

$$V \equiv div\ \vec{v} = 0, \tag{3}$$

т. е. предполагается, что объемные деформации малы по сравнению с деформациями сдвига так, что принимаем условие несжимаемости (3). Однако в технологической практике встречаются примеры, когда невозможно пренебречь объемными деформациями (например, в порошковой металлургии); вместо (3) в таком случае принимаем функциональную зависимость

$$\sigma = \Phi_2(\theta, e, v_u, \mathrm{T}, ...) \tag{3$'$}$$

либо условие линейной связи

$$\sigma = \mathrm{K}\theta. \tag{3$''$}$$

Здесь θ – относительное изменение объема, определяемое из следующей дифференциальной задачи:

$$\frac{d\theta}{dt} = div\vec{v},\ \theta\,|_{t=0} = 0; \tag{4}$$

e – степень деформации (характеристика деформации по А. А. Ильюшину, пропорционально изменяющаяся со временем: ${}^{de}\!/_{dt} \geq 0$), определяемая из другой дифференциальной задачи:

$$\frac{de}{dt} = v_u \equiv \sqrt{({}^2\!/_3) v_{ij} v_{ij}},\ e\,|_{t=0} = 0; \tag{5}$$

Т – температура в области $\Omega^p \cup \Omega^e$, определяемая из следующей задачи:

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = a_0^2 \Delta \mathrm{T} + k_0 \sigma_u v_u,\ \vec{x} \in \Omega^p \tag{6}$$

$$\frac{d\mathrm{T}_1}{dt} = a_1^2\ \Delta \mathrm{T}_1;\ \vec{x} \in \Omega^e \tag{7}$$

с соответствующими начальными и граничными условиями (на которых не будем останавливать внимание); $a_0^2 = {}^{\lambda_0}/_{\rho c_0}; a_1^2 = {}^{\lambda_1}/_{\rho_1 c_1}; \lambda_0, \lambda_1, c_0, c_1$ – коэффициенты теплопроводности и теплоемкости пластического тела и контактирующего инструмента соответственно.

1.3. В практике машиностроения находят применение инструменты, имеющие контактные поверхности со сложной рельефной конфигурацией. Последнее способствует образованию направленных потоков пластического течения в объеме Ω^p. В частности, благодаря рельефной конфигурации контактной поверхности инструмента происходит лучшее заполнение труднодоступных мест под штампами. Для описания свойств контактных поверхностей вводится тензор $\tilde{\phi}$ коэффициентов анизотропии [4]-[6] так, что вектор сил контактного трения и вектор относительной скорости скольжения ${}^{\Delta\vec{v}}/_{|\Delta\vec{v}|}$ перестают быть коллинеарными:

$$\vec{\mathrm{T}} = \tilde{\phi} \bullet \frac{\Delta\vec{v}}{|\Delta\vec{v}|}. \tag{8}$$

В случае классического (изотропного) трения на контактной поверхности тензор $\tilde{\phi}$ оказывается шаровым ($\phi_{ij} = f\delta_{ij}$) так, что векторы $\vec{\mathrm{T}}$ и $\Delta\vec{v}$ оказываются параллельными $\left(\vec{T}//\Delta\vec{v}\right)$. Тензор $\tilde{\phi}$ зависит от свойств двух контактирующих тел, он может быть определен экспериментальным путем.

Использование уравнения (8) в краевых условиях, на контактных поверхностях скольжения делает исходную краевую задачу более сложной. В частности, меняется тип дифференциальных уравнений исследуемой задачи.

1.4. Проблема использования и удержания промежуточных смазочных объемов вдоль поверхности контакта известна в технологической практике обработки металлов давлением как пластогидродинамический эффект. Понятно, что наличие объема смазки улучшает состояние контактной поверхности, уменьшает неоднородность деформаций в приконтактной области объема Ω^p, а значит, снижает возможность его разрушения. С другой стороны, использование объемов смазки на контакте приводит к экономии энергозатрат.

Однако сложность реализации пластогидродинамического эффекта заключается в удержании объема смазки в течение прохождения всего этапа процесса обработки. И если мы при этом не будем принимать какие-то специальные меры, то промежуточная («мягкая») среда еще до начала процесса пластической обработки может быть вытеснена из контакта. Отметим, что пластогидродинамический эффект успешно применяется в некоторых процессах обработки металлов давлением [7]. Эта проблема открыта для процессов объемной штамповки.

Таким образом, если физический процесс происходит при наличии промежуточного объема смазки Ω^*(она, как правило, ведет себя как нелинейно вязкая среда), то для этого необходимо ставить и решать контактную задачу в объеме $\Omega^p \cup \Omega^e \cup \Omega^*$.

1.5. Учет и корректное включение температуры и температурных факторов при выборе математической модели также могут оказаться затруднительными. Несмотря на то, что нам известна температурная зависимость от множества механических и физических параметров, тем не менее отсутствует общая постановка связанной контактной задачи со сложным термосиловыми воздействиями. Для горячих процессов, протекающих при высоких температурах, вязкие свойства материала в объеме Ω^p становятся более чувствительными и доминирующими. Здесь следует выделить процессы, происходящие с интенсивным теплообменом с внешними телами. В таком случае в результате резкого охлаждения в начальной стадии протекания процесса образуются приконтактные слои затвердевания. С другой стороны, нельзя исключить образование проскальзывания на контакте, которое в динамических процессах сопровождается интенсивным трением. В результате вблизи поверхности контакта могут образоваться слои размягчения (сравните с рассмотренным выше случаем).

Если внешние нагрузки отклоняются от пропорционального изменения, то появляется необходимость в рассмотрении двучленных уравнений теории пластичности.

Таким образом, для того, чтобы физический процесс был более строго описан с помощью исходной модели, можно ввести в нее дополнительные характерные особенности (в частности, те из них, что мы отметили выше). Последнее приводит к более сложной математической модели, что соответственно потребует проведения сложного анализа. Необходимо, чтобы построенная таким путем модель оказалась пригодной для расчетов.

Отметим еще одно обстоятельство. Для того, чтобы поставить краевую задачу, необходимо:

1)знать границы пластических и жестких областей;

2)определить истинную границу контакта и сформулировать на ней соответствующие условия.

Ясно, что граница контакта изменяется в течение физического процесса. С другой стороны, меняются одновременно и условия на ней. Например, контактная граница скольжения (это смешанные условия относительно скоростей и напряжений) в результате пластической деформации может переходить в границу контакта с условиями адгезии (это совершенно другие условия). Выбранные граничные условия не должны противоречить результатам эксперимента.

Проблема построения математических моделей в механике континуума хорошо описана в [8].

Как следует из вышеизложенного, не представляется возможным исследовать контактную проблему в общем виде. Потому переходят к разного рода упрощениям или же выдвигают гипотезы. Однако можно поступить иначе: выделить ограниченный класс контактных задач пластического течения.

2. Рассмотрим пластические течения в сравнительно тонком слое $\Omega^p(h << L)$, заключенном между двумя сближающимися поверхностями внешних тел Ω^e, где h, L – характерные толщина и линейный размер текущего слоя Ω^p. Такие процессы широко распространены в технологии машиностроения: штамповка и прессование тонкостенных элементов конструкций, тонколистовая прокатка и др. Указанный класс физических процессов обладает рядом характерных особенностей. Практически вдоль всей поверхности контакта наблюдается проскальзывание между Ω^p и Ω^e [1], [2]. В таких процессах контактное давление достигает значений P, превышающих величину предела текучести пластического материала $\sigma_s(\mathrm{P} \geq \sigma_s)$, так что свойства материала

в начальном приближении оказываются близкими к свойствам гидродинамической жидкости. С другой стороны, большие давления вызывают нормальные упругие перемещения $w^e = \hat{w}P$ контактных поверхностей, которые в свою очередь оказываются соизмеримыми с толщиной текущего слоя Ω^p. В горячих процессах, протекающих при интенсивном теплообмене, формируются приконтактные слои затвердевания так, что истинная граница пластического течения отличается от границы контакта.

Для описания указанных процессов А. А. Ильюшин построил математическую теорию пластического течения в тонком слое [1], которая позволяет с удовлетворительной точностью провести расчеты и получить качественные оценки физико-механических параметров. В работе [2] эта теория развивается на случай течения пластического слоя по упругодеформируемым поверхностям.

Указанная теория развита на случай течения пластического слоя между поверхностями с анизотропными свойствами относительно сил трения на контакте [4]–[6]. Кроме того, в [6] поставлена начально-краевая задача и предложен метод ее решения. Для частного случая ортотропного трения на контакте

$$\vec{\mathrm{T}} = -\begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}, \phi_i = \mu_i \tau_s \tag{9}$$

выведено нелинейное параболическое уравнение для определения контура $\Gamma_t : y = \bar{\phi}(x,t)$ свободно растекающегося пластического слоя на плоскости

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \tau} = \bar{\phi} + \nu \bar{\phi} (\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x})^2 + \frac{1}{2} \nu \bar{\phi}^2 \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2}, \tag{10}$$

где $\tau\,(t) = \ln\,(h_0/h\,(t))$ – характеристика деформации ($d\tau/dt > 0$); для определенности мы положим $\mu_1 = 1$, $\mu_2 \equiv \nu < 1$.

Уравнение (10) имеет специальный класс автомодельных решений. Так, область, ограниченная замкнутой выпуклой кривой, стремится к эллипсу, когда $\tau\,(t)$ возрастает (рис. 1):

$$\begin{gathered} \Gamma_t : y^2 \equiv \bar{\phi}^2(x,t) = \bar{\mathrm{A}}(\tau)x^2 + \bar{\mathrm{B}}(\tau), (\bar{\mathrm{A}} < 0, \bar{\mathrm{B}} > 0), \\ \bar{\mathrm{A}}\,(\tau) = \tfrac{c_1 e^{2\tau}}{1-\nu c_1 e^{2\tau}}, \bar{\mathrm{B}}\,(\tau) = \tfrac{c_2 e^{2\tau}}{\sqrt{1-\nu c_1 e^{2\tau}}}, c_2 = \tfrac{\bar{\mathrm{B}}_0}{\sqrt{1-\nu \bar{\mathrm{A}}_0}}, c_1 = \tfrac{\bar{\mathrm{A}}_0}{1+\nu \bar{\mathrm{A}}_0}, \end{gathered} \tag{11}$$

с отношением полуосей $a = \sqrt{\bar{B}/(-\bar{A})}$и $b = \sqrt{\bar{B}} : \lim\limits_{\tau\to\infty} \left| {}^{b}\!/_{a} \right| = \lim\limits_{\tau\to\infty} \sqrt{|\bar{\mathrm{A}}|} = \frac{1}{\sqrt{\nu}}, (\nu \neq 1)$, так что в известном изотропном случае кривая (11) переходит в уравнение окружности:

$$\lim_{\tau\to\infty} \left| {}^{b}\!/_{a} \right| = \lim_{\tau\to\infty} \sqrt{|\bar{\mathrm{A}}|} = 1, (\nu = 1)\,.$$

Как мы отмечали ранее, необходимо обоснование способа осуществления процесса пластической осадки, который обеспечит удержание объема промежуточной «мягкой» среды на контакте. Поясним, что такое сохранение объема смазки в процессе штамповки тонкостенных деталей может быть обеспечено с помощью правильного учета нормальных упругих перемещений контактных поверхностей тел инструмента [2].

Ниже мы приводим эпюры распределения контактного давления $\mathrm{P}(r)$и упругих перемещений $w^e\,(r) = \hat{w}P$ в двух следующих случаях, которые получены на основе теории А. А. Ильюшина (рис.2) :

А/ “чистая” пластическая осадка кругового диска;

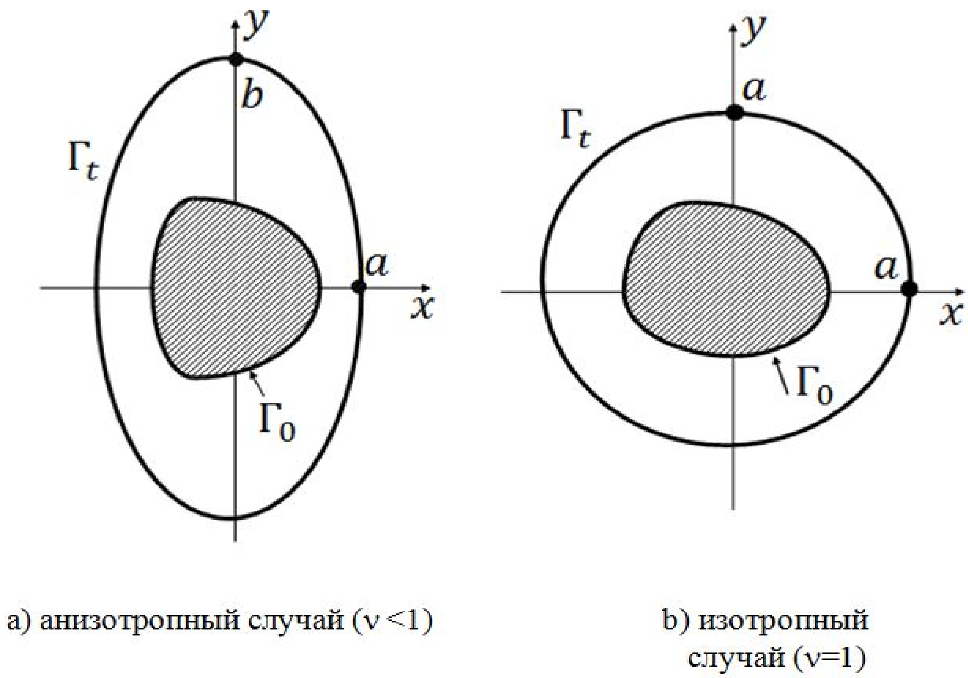

Рис. 1 (a,b). Свободное растекание пластического слоя
на плоскости между сближающимися поверхностями тел инструмент
а) с ортотропными свойствами относительно сил контактного трения;
(б) с изотропными свойствами относительно сил контактного трения

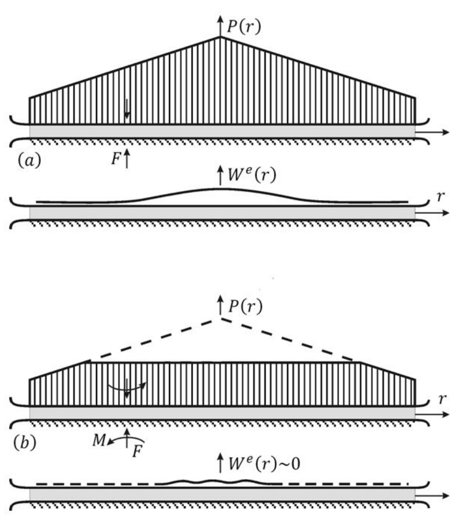

Рис. 2. Эпюра распределения контактного давления и нормальных упругих
перемещений контактных поверхностей тел инструмента в случае:
а) «чистой» осесимметричной осадки пластического слоя;
б) осадки пластического слоя вращающимися телами.

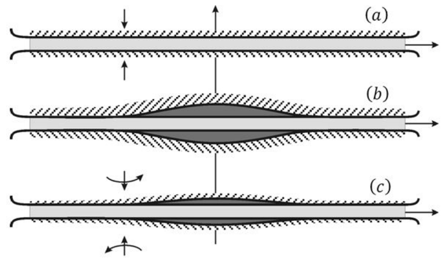

Рис. 3. Осесимметричная пластическая осадка тонкого слоя вращающимися телами с удержанием промежуточного объема смазки

В / прессование кругового диска с помощью вращающихся тел.

Как реализовать процесс прессования диска с сохранением объема смазки, начиная с вышеуказанного распределения механических параметров по двум случаям ?

Сперва мы реализуем «чистую» осадку до тех пор, пока осаживаемый диск не перешел в состояние пластического течения (нетрудно провести расчет потребного для этого общего усилия осадки). При этом промежуточная среда (смола, полимерные растворы) из-за ее вязких свойств не успевает вытесняться из области контакта. Поэтому в силу наличия упругих нормальных перемещений инструмента в области контакта (ввиду того, что $w^e(r) \to 0$ при $\chi \equiv \left(\left({}^{d\tau}\!/_{dt}\right)\Big/_{\dot{\phi}(t)}\right) \to 0$, см. рис.2) промежуточная среда концентрируется в центральной части контакта (рис.3).

Далее мы реализуем осадку с вращением так, что промежуточная среда начинает вытекать из центральной части контакта. В конечном итоге, это ведет к уменьшению контактного давления, а также элементарной работы внешних сил.

В заключение укажем несколько работ [9]–[12], в которых развиваются другие подходы в исследовании контактных задач пластического течения в тонком слое.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильюшин А. А. Труды (1946–1966). Т.2. Пластичность. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 480 с.

[2] Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.

[3] Ивлев Д. Д. и др. Предельное состояние деформируемых тел и горных пород. М.: Физматлит. 2008. 832 с.

[4] Александрович А. И., Векшин Б. С., Потапов И. Н. Тензор коэффициентов трения анизотропных поверхностей // Трение и износ. 1985. Т. VI. № 6. С. 996–1004.

[5] Кийко И. А. Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя // Прикладная матем. и мех. Т. 70, вып. 2. С. 344–351.

[6] Кадымов В. А. Математическое моделирование контактных задач пластического течения //Nonlinear Analysis. 1997. Vol. 30. № 8. P. 5259–5265.

[7] Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением. М.: Металлургия, 1999. 688 с.

[8] Седов Л. И. Механика сплошных сред. Т. 2. М.: Наука, 1970. 568 с.

[9] Мохель А. Н., Салганик Р. Л. Тонкий пластический слой с произвольным контуром, сжимаемый между жесткими плитами // ДАН СССР. 1987. Т. 293. № 4. С. 809–813.

[10] Георгиевский Д. В. Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Известия РАН МТТ. 2006. № 1. С. 47–59.

[11] Белов Н. А., Кадымов В. А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами // Известия РАН. МТТ. 2011. № 1. С. 46–58.

[12] Кадымов В. А., Сосенушкин Е. Н., Белов Н. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора // Известия МГТУ «МАМИ». № 2 (16). 2013. Т. 2. С. 206–212.

V. A. Kadymov

ON FORMULATION AND SOLVING THE NONSTATIONARY CONTACT PROBLEMS OF PLASTIC FLOW

Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia

Abstract. The general approach in mathematical modeling of contact problems with the possible presence of the volumes of intermediate 'lubricants' has been discussed in the paper. The characterized peculiarities for considered processes are analyzed; the physical explanations for each case are given. The ways of their inclusion into mathematical model are indicated. In the second part it is considered the individual class of contact problems in which the plastic flows take place in a comparatively thin plastic layer between two converging surfaces of external bodies. The known Ilyushin's theory of plastic flow in a thin layer is developed in the following cases of: a) taking account of anisotropic properties of contact surfaces; b) preservation of the physical volumes of 'lubricants' along the contact in the process of stamping. The both peculiarities are demonstrated by the author on the solutions of the specific practical problems, the qualitative conclusions of the solutions are also given.

Keywords: mechanics, tension, deformations, plasticity, elasticity.

REFERENCES

[1] Il'jushin A. A. Trudy (1946–1966). T.2. Plastichnost'. M.: FIZMATLIT, 2004. 480 s. (in Russian)

[2] Kijko I. A. Teorija plasticheskogo techenija. M.: MGU, 1978. 75 s. (in Russian)

[3] Ivlev D. D. i dr. Predel'noe sostojanie deformiruemyh tel i gornyh porod. M.: Fizmatlit, 2008. 832 s. (in Russian)

[4] Aleksandrovich A. I., Vekshin B. S., Potapov I. N. Tenzor kojefficientov trenija anizotropnyh poverhnostej // Trenie i iznos. 1985. T. VI. № 6. S. 996–1004. (in Russian)

[5] Kijko I. A. Anizotropija v processah techenija tonkogo plasticheskogo sloja // Prikladnaja matematika i mehanika T. 70, vyp. 2. S. 344–351. (in Russian)

[6] Kadymov V. A. Matematicheskoe modelirovanie kontaktnyh zadach plasticheskogo techenija //Nonlinear Analysis. 1997. Vol. 30. № 8. P. 5259–5265. (in Russian)

[7] Kolmogorov V. L. Mehanika obrabotki metallov davleniem. M.: Metallurgija. 1999. 688 s. (in Russian)

[8] Sedov L. I. Mehanika sploshnyh sred. T. 2. M.: Nauka, 1970. 568 s. (in Russian)

[9] Mohel' A. N., Salganik R. L. Tonkij plasticheskij sloj s proizvol'nym konturom, szhimaemyj mezhdu zhestkimi plitami // DAN SSSR. 1987. T. 293. № 4. S. 809–813. (in Russian)

[10] Georgievskij D. V. Zadacha Prandtlja dlja slaboneodnorodnogo po predelu tekuchesti plasticheskogo sloja // Izvestiya RAN. MTT. 2006. № 1. C. 47–59. (in Russian)

[11] Belov N. A., Kadymov V. A. O kraevoj zadache techenija plasticheskogo sloja mezhdu sblizhajushhimisja zhestkimi plitami // Izv.RAN. MTT. 2011. № 1. C. 46–58. (in Russian)

Kadymov Vagid Ahmedovich

`e-mail:` vkadymov@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia.

[12] Kadymov V. A., Sosenushkin E. N., Belov N. A. Jeksperimental'nye issledovanija po plasticheskoj osadke mezhdu nepodvizhnymi stenkami tonkih polos v forme prjamougol'nika i sektora // Izvestija MGTU «MAMI». № 2 (16). 2013. T. 2. S. 206–212. (in Russian)