Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3 (33). С. 87–95

Ю. В. Немировский

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ПЛИТ ПРИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ПОТЕНЦИАЛАХ

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Использование кусочно-линейных условий пластичности позволило получить целый ряд глубоких и впечатляющих аналитических решений плоских и пространственных задач теории пластического деформирования [1], [2]. Можно надеяться, что применение кусочно линейных потенциалов будет полезно также и при решении обратных задач теории пластичности. Одной из важнейших в теории пластичности является задача оптимального проектирования конструкций, общая постановка которой была сформулирована свыше пятидесяти лет назад [3]–[5]. Системы уравнений, описывающие оптимальные проекты при условиях пластичности Мизеса и Треска, были исследованы в работах [4]–[8]. Было установлено, что системы разрешающих уравнений задачи оптимального проектирования для гладкого условия пластичности (типа Мизеса–Хилла) являются нелинейными системами смешанно-составного типа.

Ключевые слова: теплопроводность, кольцевые пластинки, круглые пластинки, сотовые конструкции, слоистые конструкции, аналитические решения.

УДК: 536.21

В [6], [7] было показано, что для каждого отрезка условия Треска система разрешающих уравнений оказывается существенно более простой. Однако полный анализ не был завершен: вопрос сопряжения решений, отвечающих различным режимам, был лишь схематически намечен, а вопрос о существовании непротиворечивых полей напряжений в общем случае не был рассмотрен. Поэтому авторы ограничились рассмотрением лишь простейших осесимметричных задач. Возникающие трудности в поиске конкретных решений привели к тому, что один из основоположников теории оптимального проектирования конструкций в заключении своей работы [5] указывал: «... следует считать, что конструкции, удовлетворяющие условию абсолютно минимального веса, вообще говоря, не существуют». Это замечание на некоторое время привело к охлаждению интереса исследователей к этой проблеме.

Немировский Юрий Владимирович
`e-mail:` nemirov@itam.nsc.ru, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-00825, 17-41-210272).

Поступила 11.07.2017

Некоторое дальнейшее продвижение было достигнуто в работах [9]–[14], в которых были получены отдельные решения для гладких поверхностей текучести, оценки оптимальных проектов для вложенных поверхностей текучести, показано что для произвольных кусочно-линейных условий пластичности в главных напряжениях разрешающая система уравнений распадается на две подсистемы из двух нелинейных уравнений гиперболического типа каждая. Это позволило получить широкий спектр аналитических решений, согласованных с полями скоростей. Были построены решения для сингулярных режимов и оптимальные проекты, отвечающие сопряжению различных режимов, в том числе и оптимальные проекты для условия пластичности А. Ю. Ишлинского [1], [2].

Дальнейшим логическим развитием этих идей является рассмотрение кусочно-гладкого условия пластичности в пространстве $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$. Этот подход позволяет исследовать задачу оптимизации для пластин из произвольных анизотропных материалов [15] и дает возможность рассчитывать на получение новых решений. Поскольку любая поверхность текучести в пространстве $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$ может быть изнутри и снаружи аппроксимирована многогранниками, то решения для кусочно-линейных поверхностей, в соответствии с указанной в [9] теоремой, могут быть использованы для получения верхней и нижней оценки веса конструкции.

Рассмотрим пластины, нагруженные и закрепленные в своей плоскости, и введем безразмерные координаты x_i, напряжения σ_{ij}, перемещения u_i, деформации ε_{ij} и толщину пластины h, усилия T_{ij}, T_n, T_τ по формулам

$$x_i = x_i^* x_0^{-1}, \quad u_i = u_i^* x_0^{-1} t_0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* \sigma_0^{-1}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^* t_0, \quad h = h^* h_0^{-1},$$
$$T_{ij} = \sigma_{ij} h, \quad T_n = T_n^* (\sigma_0 h_0)^{-1}, \quad T_\tau = T_\tau^* (\sigma_0 h_0)^{-1},$$

где $i, j = 1, 2; x_0, t_0, \sigma_0, h_0$ – характерные длина, время, напряжение, толщина; T_n^*, T_τ^* – нормальная и касательная составляющие контурной нагрузки. Тогда в рамках постановки задач оптимального проектирования пластических конструкций функции $\sigma_{ij}, h, u_i, \varepsilon_{ij}$ должны удовлетворять уравнениям равновесия

$$(\sigma_{ij} h)_{,j} = 0, (\ldots)_{,j} = \partial(\ldots)/\partial x_j \quad (i, j = 1, 2), \tag{1}$$

условию пластичности в параметрической форме

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = \sigma_{11}(\alpha, \beta), \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}(\alpha, \beta), \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}(\alpha, \beta), \\ \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \quad \beta_1 \leq \beta \leq \beta_2, \end{gathered} \tag{2}$$

условию оптимальности Друккера–Шилда [3]

$$\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} = D_* = const > 0, \tag{3}$$

соотношениям Коши

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i,\omega} = \frac{u_{1,2} - u_{2,1}}{2D_*}, \tag{4}$$

граничным условиям на Γ_f $(f(x_1, x_2) = 0)$

$$\begin{gathered} T_n \left|\nabla f\right|^2 = h \left[\sigma_{11}(f_{,1})^2 + \sigma_{22}(f_{,2})^2 + 2\sigma_{12}(f_{,1})(f_{,2})\right], \\ T_\tau \left|\nabla f\right|^2 = h \left[(\sigma_{22} - \sigma_{11})(f_{,1})(f_{,2}) + \sigma_{12}\left\{(f_{,1})^2 - (f_{,2})^2\right\}\right], \\ \left|\nabla f\right|^2 = \left[(f_{,1})^2 + (f_{,2})^2\right] \end{gathered} \tag{5}$$

и на Γ_n $(\varphi(x_1, x_2) = 0)$

$$\begin{gathered} u_n \left|\nabla\varphi\right|^2 = u_1\varphi_{,1} + u_2\varphi_{,2}, \\ u_\tau \left|\nabla\varphi\right|^2 = u_2\varphi_{,2} - u_1\varphi_{,1} = 0, \quad \left|\nabla\varphi\right|^2 = (\varphi_{,1})^2 + (\varphi_{,2})^2. \end{gathered} \tag{6}$$

Кроме того, должен быть выполнен закон пластического течения, который утверждает, что для регулярных точек поверхности текучести вектор скоростей деформаций направлен по нормали к поверхности текучести, что математически выражается соотношениями

$$\varepsilon_{11}\sigma_{11,\alpha} + \varepsilon_{22}\sigma_{22,\alpha} + 2\varepsilon_{12}\sigma_{12,\alpha} = 0, \quad \varepsilon_{11}\sigma_{11,\beta} + \varepsilon_{22}\sigma_{22,\beta} + 2\varepsilon_{12}\sigma_{12,\beta} = 0. \tag{7}$$

Поскольку начало координат должно располагаться внутри поверхности текучести, а нормаль к ней должна быть направлена наружу, также должно выполняться неравенство

$$\begin{gathered} J = \sigma_{11}(\sigma_{22,\alpha}\sigma_{12,\beta} - \sigma_{12,\alpha}\sigma_{22,\beta}) + \sigma_{22}(\sigma_{12,\alpha}\sigma_{11,\beta} - \sigma_{11,\alpha}\sigma_{12,\beta}) + \\ + \sigma_{12}(\sigma_{11,\alpha}\sigma_{22,\beta} - \sigma_{22,\alpha}\sigma_{11,\beta}) > 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Соотношения (3), (7) позволяют выразить компоненты деформаций через параметры α, β в форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= D_* J^{-1} \left(\sigma_{22,\alpha}\sigma_{12,\beta} - \sigma_{12,\alpha}\sigma_{22,\beta}\right), \\ \varepsilon_{22} &= D_* J^{-1} \left(\sigma_{12,\alpha}\sigma_{11,\beta} - \sigma_{11,\alpha}\sigma_{12,\beta}\right), \\ 2\varepsilon_{12} &= D_* J^{-1} \left(\sigma_{11,\alpha}\sigma_{22,\beta} - \sigma_{22,\alpha}\sigma_{11,\beta}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

С другой стороны, исключая u_1, u_2 из (4), получим соотношения (уравнения совместности деформаций):

$$D_*\omega_{,1} = \varepsilon_{11,2} - \varepsilon_{12,1}, \quad D_*\omega_{,2} = \varepsilon_{12,2} - \varepsilon_{22,1}. \tag{10}$$

Таким образом, четыре дифференциальных уравнения (1), (10) с учетом зависимостей (2), (9) вместе с граничными условиями (5), (6) позволяют найти решение задачи оптимального проектирования – определить функции $\alpha(x_1, x_2)$, $\beta(x_1, x_2)$, $\omega(x_1, x_2)$, $h(x_1, x_2)$. Тип системы уравнений и соответственно метод ее решения зависят от формы условия пластичности, т. е. от конкретного вида параметрических зависимостей.

Для плоского участка поверхности параметрические зависимости (2) можно записать в форме

$$\sigma_{ij} = a_{ij}\alpha + b_{ij}\beta + c_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}; \quad a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} = const; \quad i, j = 1, 2, \tag{11}$$

или после соответствующей нормировки в виде:

$$\sigma_{11}(a_{22}b_{12} - b_{22}a_{12}) + \sigma_{22}(a_{12}b_{11} - b_{12}a_{11}) + \sigma_{12}(a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22}) = 1, \tag{12}$$

$$c_{11}(a_{22}b_{12} - b_{22}a_{12}) + c_{22}(a_{12}b_{11} - b_{12}a_{11}) + c_{12}(a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22}) = 1. \tag{13}$$

Тогда для деформаций будем иметь выражения

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = D_*(a_{22}b_{12} - b_{22}a_{12}), \quad \varepsilon_{22} = D_*(a_{12}b_{11} - b_{12}a_{11}), \\ 2\varepsilon_{12} = D_*(a_{11}b_{22} - b_{11}a_{22}). \end{gathered} \tag{14}$$

Учитывая это, из (10) получаем $\omega(x_1, x_2) = \omega_0$ следующие выражения для перемещений:

$$
\begin{gathered}
u_1(x_1,x_2) = u_1^0 + D_*\left[\omega_0 x_2 + (a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})x_2\right], \\
u_2(x_1,x_2) = u_2^0 + D_*\left[\omega_0 x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{22}b_{11} - a_{11}b_{22})x_1 + \tfrac{1}{2}(a_{11}b_{12} - a_{12}b_{11})x_2\right], \\
u_1^0, u_2^0 = const.
\end{gathered} \tag{15}
$$

Таким образом, плоскому участку условия пластичности соответствует континуум параллельных друг другу векторов скоростей деформаций. Каждому вектору скорости деформации соответствует свой проект. И тогда в соответствии с теоремой, доказанной в [9], при одинаковых силовых граничных условиях объемы всех этих проектов совпадают.

Для определения объема необходимо найти $h(x_1,x_2)$. Из (1) с учетом (11) для рассматриваемого плоского участка получим следующие уравнения:

$$
\begin{gathered}
(a_{11}\alpha + b_{11}\beta + c_{11})H_{,1} + (a_{12}\alpha + b_{12}\beta + c_{12})H_{,2} + \\
+ a_{11}\alpha_{,1} + a_{12}\alpha_{,2} + b_{11}\beta_{,1} + b_{12}\beta_{,2} = 0, \\
(a_{12}\alpha + b_{12}\beta + c_{12})H_{,1} + (a_{22}\alpha + b_{22}\beta + c_{22})H_{,2} + \\
+ a_{12}\alpha_{,1} + a_{22}\alpha_{,2} + b_{12}\beta_{,1} + b_{22}\beta_{,2} = 0, \quad H = lnh.
\end{gathered} \tag{16}
$$

Так как система (16) относительно трех неизвестных функций недоопределена, то следует ожидать, что в этом случае решение задачи оптимального проектирования будет не единственным. Для доопределения одну из функций будем считать известной. Пусть, например $\beta = \beta_0 = const$. В этом случае для нахождения функций $H(x_1,x_2), \alpha(x_1,x_2)$ получим систему

$$
\begin{gathered}
(a_{11}\alpha + b_{11}\beta_0 + c_{11})H_{,1} + (a_{12}\alpha + b_{12}\beta_0 + c_{12})H_{,2} + a_{11}\alpha_{,1} + a_{12}\alpha_{,2} = 0, \\
(a_{12}\alpha + b_{12}\beta_0 + c_{12})H_{,1} + (a_{22}\alpha + b_{22}\beta_0 + c_{22})H_{,2} + a_{12}\alpha_{,1} + a_{22}\alpha_{,2} = 0.
\end{gathered} \tag{17}
$$

Характеристики этой системы определяются из уравнения

$$
\begin{gathered}
dx_2^2[(a_{12}b_{11} - a_{11}b_{12})\beta_0 + a_{12}c_{11} - a_{11}c_{12}] + \\
+ dx_1dx_2[(a_{11}b_{12} - a_{22}b_{11})\beta_0 + a_{11}c_{22} - a_{22}c_{11}] + \\
dx_1^2[(a_{22}b_{12} - a_{12}b_{22})\beta_0 + a_{22}c_{12} - a_{12}c_{22}].
\end{gathered} \tag{18}
$$

Рассматривая случай силового нагружения на контуре пластины, следует иметь в виду, что контурные нагрузки должны удовлетворять требованию равенства нулю главного вектора и главного момента, которые определяются равенствами

$$
\begin{gathered}
N_1 = -\int_\Gamma [T_n dx_2 + T_\tau dx_1] = 0, \quad N_2 = -\int_\Gamma [T_n dx_1 - T_\tau dx_2] = 0, \\
M = \int_\Gamma [(T_n x_1 + T_\tau x_2)dx_1 + (T_n x_2 - T_\tau x_1)dx_2] = 0.
\end{gathered} \tag{19}
$$

Метод решения системы уравнений (17) зависит от вида апроксимирующих функций. Например, в частном случае

$$
a_{11} = a_{22} = b_{12} = 0, \quad b_{11} = b_{22} > 0, \quad a_{12} < 0, \quad \beta_0 = -c_{22}/b_{22}
$$

из (18) имеем $dx_2^2 = 0$. Следовательно, система (17) имеет параболический тип. Если же принять

$$
a_{11} = a_{22} = b_{12} = 0, \quad b_{11} = b_{22} > 0, \quad a_{12} < 0, \quad \beta_0 = -(c_{11} + c_{22})/b_{22},
$$

то из (18) находим $(dx_2/dx_1)^2 = -1$, т. е. в этом случае система (17) имеет эллиптический тип. Можно в обоих случаях построить решение одинаково нагруженных прямоугольных пластин и проверить в соответствии с общим результатом [9], что, хотя профили толщины в этих решениях будут различны, общий объем пластины будет одинаковым. Однако мы продемонстрируем это обстоятельство другим путем. Запишем уравнения равновесия (1) и условие пластичности для некоторой k-й плоскости в виде:

$$(T_{11})_{,1} + (T_{12})_{,2} = 0, \quad (T_{12})_{,1} + (T_{22})_{,2} = 0, \quad T_{ij} = \sigma_{ij} h \tag{20}$$

$$A_k T_{11} + B_k T_{22} + C_k T_{12} = h \tag{21}$$

Эта система уравнений недоопределена, имеет одну свободную функцию, которую далее будем считать известной: $T_{11} = \psi_1(x_1, x_2)$. В этом случае из системы (20) получаем

$$T_{12} = -\psi_2(x_1, x_2) + \phi_2(x_1), \quad T_{22} = -\psi_3(x_1, x_2) + \phi_2'(x_1) + \psi_3(x_1)$$
$$\psi_2(x_1, x_2) = \int \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \psi_3(x_1, x_2) = \int \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} dx_2.$$

Функции $\phi_2(x_1)$, $\phi_3(x_1)$ определяются из граничных условий (5), согласованных с требованиями (9). После определения усилий T_{ij} распределение толщины вычисляется по формуле (21).

В качестве примера рассмотрим прямоугольную пластину со сторонами ОА = СВ = a, ОС = АВ = b. Оси координат x_1 и x_2 направим, соответственно, вдоль сторон ОА и ОС. Пусть на сторонах прямоугольника заданы усилия

$$\text{на } OA,\ CB: T_n = T_{22} = P_0 + P_1 x_1, \quad T_\tau = -T_{12} = -K,$$

$$\text{на } AB,\ OC: T_n = T_{11} = R_0 + R_1 x_2, \quad T_\tau = T_{12} = K,$$

где $P_0, P_1, R_0, R_1, K = const.$

$$T_{11} = R_0 + R_1 x_2 + R_3 x_1^2 \big(\frac{x_1}{a} - 1\big)^2 \big(\frac{b^2}{6} - b x_2 + x_2^2\big), \quad R_3 = const.$$

Принимая далее $\text{A}_k = 0$ для функций T_12, T_22, h получаем выражения

$$T_{12} = K - \frac{R_3}{3a^2}(2x_1^3 - 3x_1^2 a + x_1 a^2)(b^2 - 3b x_2 + 2x_2^3) x_2,$$

$$T_{22} = P_0 + P_1 x_1 + \frac{R_3}{6}\frac{x_2^2}{a^2}(6x_1^2 - 6x_1 a + a^2)(b - x_2)^2,$$

$$h = B_k(P_o + P_1 x_1) + C_k K + R_3 \Bigg(\frac{B_k x_2^2}{6a^2}(6x_1^2 - 6x_1 a + 1)(b - x_2)^2 -$$
$$- \frac{C_k x_1 x_2}{3a^2}(x_1 - a)(2x_1 - a)(2x_2^2 - 3b x_2 + b^2) \Bigg).$$

Как видим, при различных значениях R_3 профили пластины будут различными. Тем не менее ее объем

$$V = 2\int_0^a \int_0^b h dx_1 dx_2 = (B_k P_0 + K C_k) ab + \frac{a^2}{2} B_k P_1 > 0$$

одинаков для всех этих проектов, поскольку не зависит от R_3. Для кольцевых пластин, нагружаемых по контурам равномерно распределенными нагрузками P_1 и P_2, условие пластичности для плоского участка с номером m и уравнение равновесия имеют вид:

$$a_m T_1 + b_m T_2 = h, \quad T_2 = (rT_1)', \quad (\cdots)' = d(\cdots)/dr, \tag{22}$$

из которых можно выразить h в виде:

$$h = b_m (rT_1)' + a_m T_1. \tag{23}$$

Умножая это равенство на $2\pi r$ и интегрируя в пределах от r_1 до r_2, для объема пластины будем иметь выражение

$$V = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} [b_m (rT_1)' + a_m T_1] r dr.$$

Для m-го линейного участка напряжение σ_1 удовлетворяет неравенствам $c_m \le \sigma_1 \le d_m$ или $c_m h \le T_1 \le d_m h$, которое с учетом выражения (23) может быть переписано в виде:

$$c_m \le \frac{T_1}{b_m (rN_1)' + a_m T_1} \le d_m. \tag{24}$$

Таким образом, выбирая множество функций $T_1(r)$, удовлетворяющих граничным условиям $T_1(r_1) = P_1,\ T_1(r_2) = P_2$ и неравенствам (24), будем иметь множество оптимальных проектов, соответствующих m-му участку кусочно линейного условия пластичности для рассматриваемой кольцевой пластинки. Однако еще необходимо согласовать статические и кинематические поля. Для рассматриваемого отрезка многоугольника текучести условия оптимальности и закон пластического течения дают для деформаций следующие выражения: $\varepsilon_1 = D_* a_m,\ \varepsilon_2 = D_* b_m$, и поскольку должны быть выполнены условия совместности деформаций $(r\varepsilon_2)' = \varepsilon_1$, то должно быть $a_m = b_m$. Это требование соответствует двум параллельным сторонам шестиугольника пластичности А. Ю. Ишлинского [1], [2], и в этом случае объем всех проектов будет одинаковым и равным $V = 2\pi a_m (r_2^2 P_2 - r_1^2 P_1) > 0$. Подробнее решение для круглых кольцевых и эллиптических пластин при условии пластичности А. Ю. Ишлинского описано в работах [13], [14] и для изгибаемых трехслойных пластин с легким заполнителем — в работе [9]. В [10] показано, что для однородных осесимметричных оболочек оптимальный проект существует лишь для прямолинейного участка, соответствующего требованию $a_m = b_m$, при этом в оптимальной оболочке реализуется строго безмоментное состояние. При использовании кусочно-линейных условий пластичности возможны пластические состояния, соответствующие ребрам многоугольника, поскольку любое ребро соответствует линейным зависимостям величин T_{ij} от одной функции (например, α), то соответствующие уравнения для $\alpha(x_1, x_2)$ и $h(x_1, x_2)$ получим из (16), полагая $\beta \equiv 0$ и заменяя a_{ij}, c_{ij} на коэффициенты параметрического ребра $\overline{a}_{ij}, \overline{c}_{ij} : \overline{\sigma}_{ij} = \overline{a}_{ij}\alpha + \overline{c}_{ij}, i, j = 1, 2$. Таким образом, для ребра задача становится статически определимой.

Для решения кинематических задач на ребре, являющемся пересечением плоскостей,

$\Phi_k = A_k\sigma_{11} + B_k\sigma_{22} + C_k\sigma_{12} = 1, \quad \Phi_m = A_m\sigma_{11} + B_m\sigma_{22} + C_m\sigma_{12} = 1$; пользуясь условиями оптимальности и пластического течения, будем иметь выражения

$$\varepsilon_{11} = A_m D_* + \lambda(A_k - A_m), \quad \varepsilon_{22} = B_m D_* + \lambda(B_k - B_m),$$

$$2\varepsilon_{12} = C_m D_* + \lambda(C_m - C_k).$$

Подставляя эти выражения в (10) после исключения функции ω для λ получим уравнение

$$(B_k - B_m)\lambda_{,11} + (A_k - A_m)\lambda_{,22} + (C_m - C_k)\lambda_{,12} = 0$$

Таким образом, в случае ребер статическая и кинематическая задачи разделяются. При реализации вершины, образующейся пересечением трех плоскостей $\Phi_k = 1$, $\Phi_m = 1$, $\Phi_n = 1$, оптимальным будет проект постоянной толщины $h = h_0$. В общем случае при использовании в качестве условия пластичности некоторого многогранника в пространстве напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ в пределах пластины могут реализоваться состояния, соответствующие напряженным состояниям плоскости, ребра или вершины. Границы $\Gamma_s r$ этих состояний заранее неизвестны и должны быть определены из условий непрерывности векторов усилий и перемещений на этих границах, а предельные размеры соответствующих областей и ограничения на параметры действующих нагрузок определяются из неравенств, характеризующих размеры соответствующих плоских участков и ребер. Дать формальное описание процедуры в общем случае затруднительно. Однако при выборе конкретных пар плоскостей и ребер такие решения могут быть получены и проанализированы по схеме, подробно описанной в [11], [12] для случаев кусочно линейных многоугольников в главных напряжениях.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ишлинский А. Ю. Об уравнениях деформирования тел за пределом упругости // Ученые записки МГУ. Механика. 1946. Вып. 17. С. 90–108.

[2] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 704 с.

[3] Drucker D. C, Shield R. T. Design for minimum weight // Proc. IX International Congress of Applied Mechanics. 1957. V. 5. P. 212–222.

[4] Shield R. T. Plate design for minimum weight // Quarterly of Applied Mathematics. 1960. V. 28, № 2. P. 131–144.

[5] Shield R. T. Optimum design methods for structures // Plasticity. Proc. 2nd Sympos. Naval Structural Mechanics. Pergamon Press, 1960. / Шилд Р. Методы оптимального проектирования конструкций // Механика. Сб. переводов. 1962. № 2. С. 148–159.

[6] Hu T. C., Shield R. T. Minimum-volume design of discs // ZAMP. 1961. V. 12. № 5. P. 414– 443.

[7] Эстрин М. И. О пластинках наименьшего веса, находящихся в условиях плоского напряженного состояния // Труды ЦНИИ строительных конструкций. 1961. Вып. 4. С.91–103.

[8] Reitman M. I. Analysis of equations of the theory of perfectly plastic shells // Archiwum mechaniki stosowanej. 1967. V. 19. №4. P. 595–601.

[9] Немировский Ю. В. Об оценках веса пластических конструкций // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 4. С. 159–162.

[10] Немировский Ю. В. Оболочки абсолютно минимального веса // Механика деформируемого твердого тела: межвуз. сб. Вып. 3. — Куйбышев: Куйбышевский госуниверситет, 1978. С. 3–78.

[11] Немировский Ю. В., Небогатое В. М. Некоторые решения задачи оптимального проектирования неосесимметричных пластинок // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Горький: Изд-во ГГУ, 1985. С. 78–87.

[12] Немировский Ю. В., Небогатое В. М. Исследование возможных сопряжений оптимальных проектов пластических плит // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1986. № 1. С. 107–115.

[13] Немировский Ю. В., Небогатое В. М. Оптимальное проектирование эллиптических жестко-пластических плит // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 5. С. 77–84.

[14] Немировский Ю. В., Небогатое В. М. Об идеально-пластическом состоянии плит минимального веса // Прикладная механика. 1986. Т. 22. № 11. С. 99–104.

[15] Гольденблат И. И., Копнов В. И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.

Yu. V. Nemirovskii

OPTIMUM DESIGN OF PLASTIC PLATES PIECEWISE UNDER LINEAR POTENTIALS

S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia

Abstract. Use of piecewise-linear conditions of plasticity has allowed to receive whole number of deep and impressive analytical decisions flat and spatial tasks of the theory of plastic deformation [1], [2]. It is possible to hope that use kusochno of linear potentials will be useful as well at the decision and return tasks of the theory of plasticity. One of the most important in the theory plasticity the problem of optimum design of structures, the general is which statement has been formulated [3]–[5] over fifty years ago. The systems of the equations describing optimum projects under plasticity conditions Mises and the Treske, have been investigated in works [4]–[8]. It has been established that the systems of the resolving equations tasks of optimum design for smooth condition of plasticity (like Mises–Hill) are nonlinear systems of mixed-compound type.

Keywords: heat conduction, circular plates, honeycomb structures, fiber composites, analytical solutions.

REFERENCES

[1] Ishlinskij A. Ju. Ob uravnenijah deformirovanija tel za predelom uprugosti // Uchenye zapiski MGU. Mehanika. 1946. Vyp. 17. S. 90–108. (in Russian)

[2] Ishlinskij A. Ju., Ivlev D. D. Matematicheskaja teorija plastichnosti. M.: FIZMATLIT, 2001. 704 s. (in Russian)

[3] Drucker D. S, Shield R. T. Design for minimum weight // Proc. IX International Congress of Applied Mechanics. 1957. V. 5. P. 212–222.

[4] Shield R. T. Plate design for minimum weight // Quarterly of Applied Mathematics. 1960. V. 28, № 2. P. 131–144.

[5] Shield R. T. Optimum design methods for structures // Plasticity. Proc. 2nd Sympos. Naval Structural Mechanics. Pergamon Press, 1960. / Shild R. Metody optimal'nogo

Nemirovskii Yuri Vladimirovich, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Research Worker, S. Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS, Novosibirsk, Russia.

proektirovanija konstrukcij // Mehanika. Sb. perevodov. 1962. № 2. S. 148–159. (in Russian)

[6] Hu T. S., Shield R. T. Minimum-volume design of discs // ZAMP. 1961. V. 12. № 5. P. 414– 443.

[7] Jestrin M. I. O plastinkah naimen'shego vesa, nahodjashhihsja v uslovijah ploskogo naprjazhennogo sostojanija // Trudy TsNII stroitel'nyh konstrukcij. 1961. Vyp. 4. S. 91–103. (in Russian)

[8] Reitman M. I. Analysis of equations of the theory of perfectly plastic shells // Archiwum mechaniki stosowanej. 1967. V. 19. №4. P. 595–601.

[9] Nemirovskij Ju. V. Ob ocenkah vesa plasticheskih konstrukcij // Izvestiya AN SSSR. Mehanika tverdogo tela. 1968. № 4. S. 159–162. (in Russian)

[10] Nemirovskij Ju. V. Obolochki absoljutno minimal'nogo vesa // Mehanika deformiruemogo tverdogo tela: mezhvuz. sb. Vyp. 3. Kujbyshev: Kujbyshevskij gosuniversitet, 1978. S. 3–78. (in Russian)

[11] Nemirovskij Ju. V., Nebogatoe V. M. Nekotorye reshenija zadachi optimal'nogo proektirovanija neosesimmetrichnyh plastinok // Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti. Gor'kij: Izd-vo GGU, 1985. S. 78–87. (in Russian)

[12] Nemirovskij Ju. V., Nebogatoe V. M. Issledovanie vozmozhnyh soprjazhenij optimal'nyh proektov plasticheskih plit // Izvestiya AN SSSR. Mehanika tverdogo tela. 1986. № 1. S. 107–115. (in Russian)

[13] Nemirovskij Ju. V., Nebogatoe V. M. Optimal'noe proektirovanie jellipticheskih zhestko-plasticheskih plit // Prikladnaja mehanika. 1986. T. 22. № 5. S. 77–84. (in Russian)

[14] Nemirovskij Ju. V., Nebogatoe V. M. Ob ideal'no-plasticheskom sostojanii plit minimal'nogo vesa // Prikladnaja mehanika. 1986. T. 22. № 11. S. 99–104. (in Russian)

[15] Gol'denblat I. I., Kopnov V. I. Kriterii prochnosti i plastichnosti konstrukcionnyh materialov. M.: Mashinostroenie, 1968. 192 s. (in Russian)