Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3 (33). С. 96–101

Б. Г. Миронов

О КРУЧЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВЫМ СЕЧЕНИЕМ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено кручение идеальнопластического цилиндрического стержня с круговым сечением, содержащим включение в виде квадрата, определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжений, построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, предел текучести.

УДК: 539.735

Кручение изотропных цилиндрических и призматических идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1], [2].

Кручение анизотропных и неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [1]–[6].

Рассмотрим круговой цилиндрический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xyz.

Ось z направлена параллельно образующим стержня. Сечение стержня плоскостью $z = const$ есть круг радиуса R.

Предположим, что стержень состоит из двух изотропных частей, разделенных хордой AB: $y = b$ (рис. 1).

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями:

$$\begin{gathered}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,\ y)\,,\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,\ y)\,,\end{gathered} \tag{1}$$

условиями пластичности

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_1^2 \tag{2}$$

Миронов Борис Гурьевич
`e-mail:` mironov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Поступила 02.08.2017

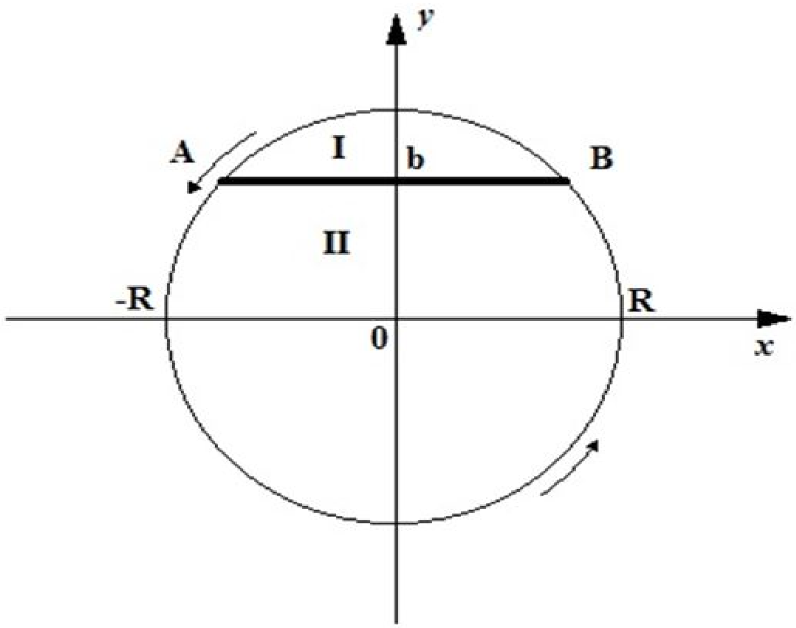

Рис. 1

в области I,

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k_2^2 \tag{3}$$

в области II,
уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \tag{4}$$

где $k_1 < k_2$.

Согласно [2] характеристики соотношения (4) есть прямые, ортогональные вектору касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \tau_{xz}\bar{i} + \tau_{yz}\bar{j}, \tag{5}$$

где $\bar{i}, \bar{j}$ – орты осей x и y соответственно, которые не меняются вдоль характеристики и направлены по касательной к контуру поперечного сечения стержня.

На линии неоднородности AB неизбежен скачок касательных напряжений, поэтому при переходе через кривую AB вектор касательного напряжения $\bar{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4), меняют свое направление. Это приводит к дополнительной линии разрыва напряжений ACB области II (рис. 2).

В области, ограниченной кривой ACB, характеристики соотношения (4) задаются уравнением

$$y = b - (x + b \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{ctg} \beta, \tag{6}$$

а вектор касательного напряжения имеет вид:

$$\bar{\tau}_{ACB} = k_2(\bar{i}\cos\beta + \bar{j}\sin\beta); \tag{7}$$

где $x_0 \in \left(-\sqrt{R^2-b^2},\ \sqrt{R^2-b^2}\right)$, $\sin\alpha = x_0/R$, $\cos\alpha = -\sqrt{R^2-x_0^2}/R$, $\sin\beta = k_1/k_2\sin\alpha$, $\cos\beta = -\sqrt{k_2^2-k_1^2\sin^2\alpha}/k_2$.

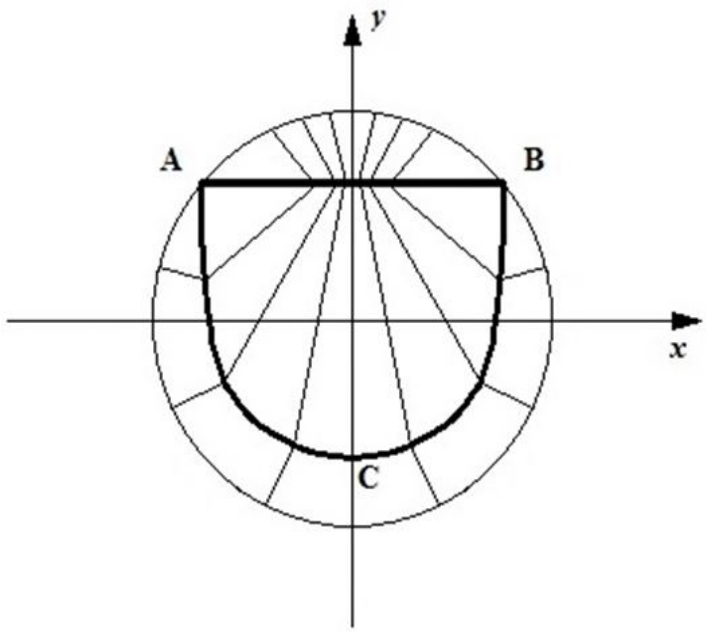

Рис. 2

Уравнение линии разрыва напряжений ACB имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta}{y+\sqrt{x^2+y^2}\sin\beta}. \tag{8}$$

Рассмотрим цилиндрический стержень с круговым сечением, в случае, когда стержень содержит включение, поперечное сечение которого есть квадрат ABB_1A_1 со стороной $\sqrt{2}R$ (рис. 3).

Пусть условие пластичности в квадрате имеет вид (3), а вне ее – (2). В этом случае в квадрате появятся две дополнительные линии разрыва напряжений, которые совпадают с его диагоналями.

Характеристики соотношения (4) определяются уравнениями

$$y = \frac{R}{\sqrt{2}} - \left(x + \frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{ctg}\beta_1 \tag{9}$$

в треугольнике AOB,

$$y = -\frac{R}{\sqrt{2}} - \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha\right)\operatorname{ctg}\beta_1 \tag{10}$$

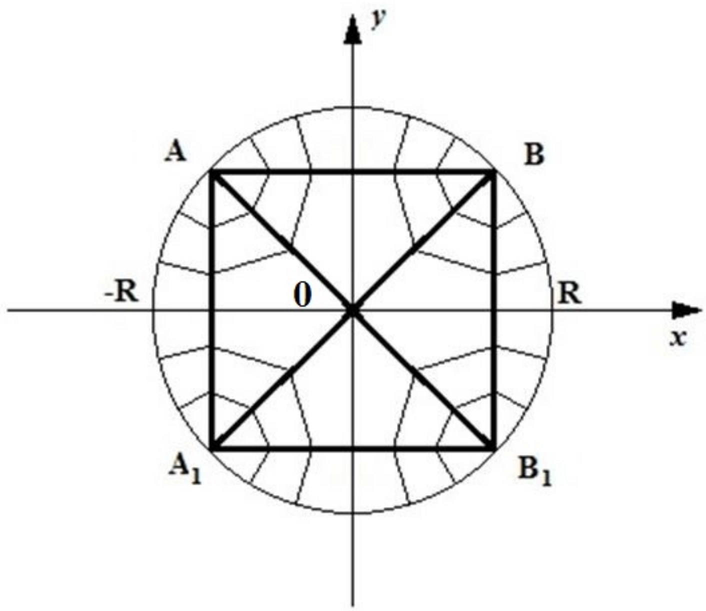

Рис. 3

в треугольнике A_1OB_1,

$$y = -\frac{R}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha - \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{ctg} \beta_2 \tag{11}$$

в треугольнике BOB_1,

$$y = -\frac{R}{\sqrt{2}} \operatorname{ctg} \alpha - \left(x - \frac{R}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{ctg} \beta_2 \tag{12}$$

в треугольнике AOA_1,

где $\sin \beta_1 = k_1/k_2 \sin \alpha$, $\cos \beta_1 = -\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \alpha}/k_2$, $\cos \beta_2 = k_1/k_2 \cos \alpha$, $\sin \beta_2 = -\sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \alpha}/k_2$, $\sin\alpha = x_0/R$, $\cos \alpha = -y_0/R$, $x_0^2 + y_0^2 = R^2$.

На рисунках 2 и 3 жирными линиями нарисованы линии разрыва напряжений, а тонкими линиями – характеристики.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Быковцев Г. И. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.

[2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.

[3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 С. 108–112.

[4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении цилиндрических анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 9 с. 150–155.

[5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.

[6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу о кручении призматических стержней с включением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2 (32) с. 18–22.

B. G. Mironov

ABOUT TORSION OF HETEROGENEOUS CYLINDRICAL CORES WITH CIRCULAR CUT

Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia

Abstract. In the work torsion of an ideal plastic cylindrical core with circular cut and with square inclusion is considered. Tension of a core is defined, lines of a rupture of tension are found, the field of characteristics is built.

Keywords: torsion, tension, plasticity, fluidity limit.

REFERENCES

[1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teorija plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).

[2] Ivlev D. D. Teorija ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. (in Russian).

[3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhih sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2012. No. 4. P. 108–112. (in Russian).

[4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. O kruchenii cilindricheskih anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2011. No 9. P. 150–155. (in Russian).

[5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. Teorija plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).

[6] Mironov B. G. , Mironov Yu. B. About torsion of piecewise isotropic prismatic cores with inclusion // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija. 2017. No 2. (32). P. 18–22. (in Russian).

Mironov Boris Guryevich

`e-mail:` mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia.