Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3 (33). С. 102–110

В. Н. Орлов, Ю. Г. Жеглова

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ В ОБЛАСТИ АНАЛИТИЧНОСТИ

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Аннотация. Первое из простейших нелинейных дифференциальных уравнений Риккати, разновидность скалярного и матричного вида, широко применяется в теории оптимальных фильтров Калмана–Бьюси для скалярного вида. Матричное дифференциальное уравнение играет важную роль в теории гамильтоновых систем, в задачах оптимального управления, экономики. Следующее из этой категории – уравнение Абеля – находит приложение в нелинейной оптике, нелинейной диффузии, нелинейной волновой теории. К ним следует добавить уравнения Пенлеве, которые имеют прямое отношение к теории эволюционных процессов. Общим свойством, объединяющим эти виды уравнений, является наличие подвижных особых точек, которые относят эти уравнения к классу, в общем случае не разрешимых в квадратурах. Это обстоятельство и актуализирует развитие аналитического приближенного метода решений этой категории уравнений. Рассматриваемый в работе класс уравнений также относится к этой категории; представлено доказательство теоремы существования решения рассматриваемого класса уравнений в области аналитичности, основанного на методе мажорант, применяемого к решению искомого уравнения, позволяющего построить аналитическое приближенное решение и получить априорную оценку погрешности. Теоретические результаты протестированы численным экспериментом.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод мажорант, окрестность подвижной особой точки, аналитическое приближенное решение, априорная оценка погрешности.

УДК: 517.95:515.172.22

Результаты исследования и их обсуждение. Обоснованием приложений нелинейных дифференциальных уравнений при решении задач являются публикации:

Орлов Виктор Николаевич
`e-mail:` orlovvn@mgsu.ru, доктор физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.
Жеглова Юлия Германовна
`e-mail:` jeglovayug@mgsu.ru, ассистент кафедры, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия.

Поступила 15.08.2017

1) в теории оптимальных фильтров Калмана–Бьюси [1] и [2], в экономике [3], для уравнений Риккати;

2) в нелинейной волновой теории [4]–[6], в задачах упругости [7], нелинейной диффузии [8], уравнении Абеля;

3) интерес к уравнению Пенлеве связан с возможностью решения эволюционных уравнений методом обратной задачи рассеяния. В этом случае вспомогательное уравнение, полученное редукцией эволюционного уравнения, относится к уравнениям без подвижных критических особых точек, к уравнениям Пенлеве [9]–[11].

Решение поставленной задачи для рассматриваемого класса дифференциальных уравнений основано на подходе, предложенном в работах [12]–[18].

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y''' = a_0(x)y^5 + a_1(x)y^4 + a_2(x)y^3 + a_3(x)y^2 + a_4(x)y + a_5(x), \tag{1}$$

которое с помощью замены переменной

$$y = G(x)u(x) + C(x) \tag{2}$$

приводится к нормальной форме

$$y''' = y^5 + r(x) \tag{3}$$

при условиях

$$\begin{cases} G(x) = A = \mathrm{const}, \quad C(x) = -\dfrac{A^5}{5}a_4(x), \quad a_0(x) = \dfrac{A^{20}}{3125}a_4^5(x) + C'''(x), \\ a_1(x) = \dfrac{A^{15}}{125}a_4^4(x), \quad a_2(x) = \dfrac{2A^{10}}{25}a_4^3(x), \quad a_3(x) = \dfrac{2A^5}{5}a_4^2(x), \quad a_5(x) = \dfrac{1}{A^5}. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$y''' = y^5 + r(x), \tag{5}$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть*

1) $r(x) \in C^\infty$ *в области*

$$|x - x_0| < \rho_1, \quad 0 < \rho_1 = \mathrm{const}; \tag{7}$$

2) $\exists M_n$*:* $\dfrac{|r^n(x_0)|}{n!} \leqslant M_n$, $M_n = \mathrm{const}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *.*

Тогда существует единственное решение задачи Коши (5)–(6) в виде:

$$y(x) = \sum_0^\infty C_n(x - x_0)^n \tag{8}$$

в области $|x - x_0| < \rho_2$*, где*

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}}\right\}, \quad M = \max\left\{|y_0|, |y_1|, |y_2|, \sup_n \frac{|r^n(x_0)|}{n!}\right\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Доказательство. На основании условий теоремы следует

$$r(x) = \sum_0^\infty A_n(x - x_0)^n.$$

Тогда с учетом (8) из уравнения (5) получаем

$$\sum_0^\infty C_n(x-x_0)^{n-3}n(n-1)(n-2) = \sum_0^\infty C_n^{***}(x-x_0)^n + \sum_0^\infty A_n(x-x_0)^n,$$

где

$$C_n^{***} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^{**}, \quad C_n^{**} = \sum_0^n C_i C_{n-i}^{*}, \quad C_n^{*} = \sum_0^n C_i C_{n-i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Из последнего соотношения следует рекуррентное выражение для однозначного определения коэффициентов C_n:

$$n(n-1)(n-2)C_n = C_{n-3}^{***} + A_{n-3}, \tag{9}$$

где коэффициенты C_n:

$$C_3 = \frac{1}{6}(C_0^5 + A_0), \quad C_4 = \frac{1}{24}(5C_1C_0^4 + A_1), \quad C_5 = \frac{1}{60}(5C_2C_0^4 + 10C_1^2C_0^3 + A_2), \ \dots .$$

Аналитические выражения получены с помощью программируемых средств Maple. На основе полученных выражений строим гипотезу для оценок коэффициентов C_n:

$$|C_{3k}| \leqslant \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k-1)(3k-2)} = \vartheta_{3k}, \quad |C_{3k+1}| \leqslant \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k-1)(3k+1)} = \vartheta_{3k+1},$$

$$|C_{3k+2}| \leqslant \frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k+1)(3k+2)} = \vartheta_{3k+2}.$$

Справедливость оценок основана на методе математической индукции. Проиллюстрируем случай $n = 3k$:

$$|C_{3k+3}| \leqslant \frac{M(M+1)^{4k+4}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}.$$

Из рекуррентного соотношения (9) следует

$$(3k+3)(3k+2)(3k+1)C_{3k+3} = C_{3k}^{***} + A_{3k}$$

или

$$(3k+3)(3k+2)(3k+1)C_{3k+3} =$$
$$= \sum_{i=0}^{3k+3} C_i \sum_{j=0}^{3k+3-i} C_i C_{3k+3-i-j} \sum_{l=0}^{3k+3-i-j} C_i C_{3k+3-i-j-l} + A_{3k},$$

тогда

$$|C_{3k+3}| \leqslant \frac{1}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)} \Bigg(\sum_{i=0}^{k} \frac{M(M+1)^{4i}}{3i^*(3i+1)(3i+2)} \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{k-i} \frac{M(M+1)^{4j}}{3(k-i-j)^*(3(k-i-j)+1)(3(k-i-j)+2)} \times$$
$$\times \frac{M(M+1)^{4(k-i-j)}}{(3(k-i-j)+3)(3(k-i-j)+2)(3(k-i-j)+1)} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{k-i-j} \frac{M(M+1)^{4l}}{3(k-i-j-l)^*(3(k-i-j-l)+1)(3(k-i-j-l)+2)} \times$$

$$\times \frac{M(M+1)^{4(k-i-j-l)}}{(3(k-i-j-l)+3)(3(k-i-j-l)+2)(3(k-i-j-l)+1)} + M\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(M+1)^{4k}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{3i^*(3i+1)(3i+2)}\times\right.$$

$$\times \sum_{j=0}^{k-i} \frac{1}{3(k-i-j)^*(3(k-i-j)+1)(3(k-i-j)+2)}\times$$

$$\times \frac{1}{(3(k-i-j)+3)(3(k-i-j)+2)(3(k-i-j)+1)}\times$$

$$\times \sum_{l=0}^{k-i-j} \frac{1}{3(k-i-j-l)^*(3(k-i-j-l)+1)(3(k-i-j-l)+2)}\times$$

$$\times \frac{1}{(3(k-i-j-l)+3)(3(k-i-j-l)+2)(3(k-i-j-l)+1)} + M\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M(M+1)^{4k+4}}{(3k+3)(3k+2)(3k+1)}.$$

Аналогичным образом убеждаемся в справедливости оценок для вариантов $n = 3k+1$, $n = 3k+2$. Рассмотрим мажорирующий ряд для ряда (9):

$$\sum_{0}^{\infty} \vartheta_n (x-x_0)^n = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k}(x-x_0)^{3k} + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2}. \quad (10)$$

На основании признака Даламбера получаем область сходимости ряда (10):

$$|x-x_0| < \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}}.$$

Следовательно, с учетом пункта 1 теоремы получаем область

$$\rho_2 = \min\left\{\rho_1, \frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}}\right\}$$

для представления решения уравнения (5) в виде (8).

Доказанная теорема 1 позволяет построить аналитическое приближенное решение

$$y_N(x) = \sum_{0}^{N} C_n (x-x_0)^n. \quad (11)$$

Теорема 2. *Пусть выполняются пункты 1 и 2 теоремы 1, тогда для аналитического приближенного решения (11) задачи (5)–(6) в области $|x-x_0| < \rho_2$ справедлива оценка погрешности*

$$\Delta y_N(x) = |y(x) - y_N(x)| \leqslant \Delta,$$

которая в случае $N+1 = 3k$ имеет вид:

$$\Delta \leqslant \frac{M(M+1)^{\frac{4(N+1)}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{1 - M(M+1)|x-x_0|^3}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)}+\frac{|x-x_0|}{N(N+1)(N+2)}+\frac{|x-x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right),$$

для случая $N+1=3k+1$ *получаем*

$$\Delta\leqslant\frac{M(M+1)^{\frac{4N}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)(N-2)}+\frac{|x-x_0|}{N(N-1)(N+1)}+\frac{|x-x_0|^2}{N(N+1)(N+2)}\right)$$

и для $N+1=3k+2$ *будем иметь*

$$\Delta\leqslant\frac{M(M+1)^{\frac{4(N-1)}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{(N-1)(N-2)(N-3)}+\frac{|x-x_0|}{N(N-1)(N-2)}+\frac{|x-x_0|^2}{N(N-1)(N+1)}\right),$$
$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}}\right\},\quad 0<\rho_2=\mathrm{const},$$
$$M=\max\left\{|y_0|,|y_1|,|y_2|,\sup_n\frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

Доказательство. По определению

$$\Delta y_N(x)=|y(x)-y_N(x)|=\left|\sum_{N+1}^{\infty}C_n(x-x_0)^n\right|\leqslant\left|\sum_{N+1}^{\infty}\vartheta_n(x-x_0)^n\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{N+1}^{\infty}\vartheta_{3k}(x-x_0)^{3k}\right|+\left|\sum_{N+1}^{\infty}\vartheta_{3k+1}(x-x_0)^{3k+1}\right|+\left|\sum_{N+1}^{\infty}\vartheta_{3k+2}(x-x_0)^{3k+2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{N+1}^{\infty}\frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k-1)(3k-2)}|x-x_0|^{3k}+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k-1)(3k+1)}|x-x_0|^{3k+1}+$$
$$+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{M(M+1)^{4k}}{3k(3k+1)(3k+2)}|x-x_0|^{3k+2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{M(M+1)^{4k}|x-x_0|^{3k}}{3k(3k-1)(3k-2)}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{4k}|x-x_0|^{3k})+$$
$$+\frac{M(M+1)^{4k}|x-x_0|^{3k+1}}{3k(3k-1)(3k+1)}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{4k}|x-x_0|^{3k})+$$
$$+\frac{M(M+1)^{4k}|x-x_0|^{3k+2}}{3k(3k+1)(3k+2)}\sum_{k=1}^{\infty}(1+M(M+1)^{4k}|x-x_0|^{3k})=$$
$$=\frac{M(M+1)^{4k}|x-x_0|^{3k}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3}\left(\frac{1}{3k(3k-1)(3k-2)}+\frac{|x-x_0|}{3k(3k-1)(3k+1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{|x-x_0|^2}{3k(3k+1)(3k+2)}\right)=\frac{M(M+1)^{\frac{4(N+1)}{3}}|x-x_0|^{N+1}}{1-M(M+1)|x-x_0|^3}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{N(N-1)(N+1)}+\frac{|x-x_0|}{N(N+1)(N+2)}+\frac{|x-x_0|^2}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right).$$

Аналогичным образом получаем структуры оценок для вариантов $N+1=3k+1$, $N+1=3k+2$ в области

$$\rho_2=\min\left\{\rho_1,\frac{1}{\sqrt[3]{(M+1)^4}}\right\},$$

где

$$0<\rho_1=\mathrm{const},\quad M=\max\left\{|y_0|,|y_1|,|y_2|,\sup_n\frac{|r^{(n)}(x_0)|}{n!}\right\},\quad n=0,1,2,\dots.$$

Пример. $y'''=y^5(x)+x$, $y(0)=1$, $y'(0)=\dfrac{1}{4}$, $y''(0)=\dfrac{1}{2}$. Приближенное решение в области аналитичности:

x_1	$y_4(x_1)$	Δ_1	Δ_2
0,35	1,157	0,011	0,0002

где $y_4(x_1)$ — приближенное решение (11); Δ_1 — априорная оценка, теорема 2; Δ_2 — апостериорная оценка. Для $\Delta_2=0,0002$ по теореме 2 определяем $N=12$. Слагаемые с $N=5$ по 12 в общей сумме не превышают требуемой точности $\varepsilon=2\cdot10^{-4}$, следовательно, приближенное решение $y_4(x)$ имеет погрешность $\varepsilon=0,0002$.

Заключение. Предложенный метод мажорант в доказательстве теоремы существования позволяет построить аналитическое приближенное решение, оценить его погрешность и оптимизировать с помощью апостериорной оценки погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bucy R. S. Optimal Filtering for correlated Noise // J. of Mat. Analysis and Applications. 1967. Vol. 20. No. 1. P. 1–8.

[2] Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. Vol., 61, No. 1 (July). P. 31–53.

[3] Сулейманов Б. И. Второе уравнение Пенлеве в одной задаче о нелинейных эффектах вблизи каустик // Зап. науч. семинара ЛОМИ. 1991. 187. С. 110–128.

[4] Чудновский В. М., Холодкевич Е. Д. Теория сверхизлучательных лавин радиоволнового диапазона // Физика твердого тела. 1982. Т. 24. № 4. С. 1118–1123.

[5] Чудновский В. М. Лавинный распад инвертированного состояния квантовой системы: автореф. канд. физ.-мат. наук. Минск: БГУ, 1983. 16 с.

[6] Самодуров А. А., Чудновский В. М. Простой способ определения времени задержки сверхизлучательной бозонной лавины // Докл. АН БССР. 1985. Т. 29, № 1. С. 9–10.

[7] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat J. Solids Structures. 1977. 13. P. 93–10.

[8] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. “Moving Boundary Problems”/ e. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. P. 129–145.

[9] Ablowitz M., Romani A., Segur H. Nonlinear evolutions and ordinary differential equations of Painleve type // Lett. Al Nuowo Cim. 1978. V. 23. No. 9. P. 333–338.

[10] Ablowitz M., Romani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II // J. Mat. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721, 1006–1015.

[11] Ablowitz M., Satsuma I. Solutions and rational solutions of nonlinear evolution equations // J. Mat. Phys. 1978. V. 19. No. 10. P. 2180–2186.

[12] Орлов В. Н. Метод приближенного решения первого, второго дифференциальных уравнений Пенлеве и Абеля. М.: МПГУ, 2013. 174 с.

[13] Орлов В. Н. Метод приближенного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати. Чебоксары: Перфектум, 2012. 112 с.

[14] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А. Исследование приближенного решения второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 10. С. 1829–1832.

[15] Орлов В. Н., Лукашевич Н. А., Самодуров А. А. Построение приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для второго уравнения Пенлеве // Вестник БГУ. Серия 1: Физика, математика, информатика. Минск, 2002. С. 79–85.

[16] Орлов В. Н. Критерии существования подвижных особых точек решений второго уравнения Пенлеве // Известия ТулГУ. Серия: Дифф. уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. С. 26–29.

[17] Орлов В. Н. О приближенном решении второго уравнения Пенлеве // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 2008. № 2. С. 42–46.

[18] Орлов В. Н. Исследование приближеного решения дифференциального уравнения Абеля в окрестности подвижной особой точки // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2009. № 4 (35). С. 23–32.

V. N. Orlov, Yu. G. Zheglova

AN EXISTENCE THEOREM FOR THE SOLUTION OF A CLASS OF A THIRD-ORDER NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION WITH POLYNOMIAL RIGHT-HAND SIDE OF THE FIFTH DEGREE IN THE DOMAIN OF ANALYTICITY

National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow

Abstract. The first of Riccati's simplest nonlinear differential equations, is a kind of scalar and matrix form, is widely used in the theory of optimal Kalman–Bucy filters for the scalar form. The matrix differential equation plays an important role in the theory of Hamiltonian systems, in problems of optimal control, of economics. The following Abel equation from this category finds application in nonlinear optics, nonlinear diffusion, nonlinear wave theory. They should be supplemented by the Painleve equations, which are directly related to the theory of evolutionary processes. A common property that unites these types of equations is the presence of movable singular points that classify these equations in a general case that are not solvable in quadratures. This circumstance also actualizes the development of an analytic approximate method of solutions of this category of equations. The class of equations considered in this paper also belongs to this category. In this paper we prove the existence theorem for the solution of the class of equations under consideration in the analyticity region based on the majorant method applied to the solution of the desired equation, which allows us to construct an analytical approximate solution and obtain an a priori estimate of the error. Theoretical results are tested by the numerical experiment.

Keywords: nonlinear differential equation, Cauchy problem, majorant method, neighborhood of a movable singular point, analytic approximate solution, priori error estimate.

REFERENCES

[1] Bucy R. S. Optimal Filtering for correlated Noise // J. of Mat. Analysis and Applications. 1967. Vol. 20, No. 1. P. 1–8.

[2] Airault H. Rational Solutions of Painleve Equations // Studies in applied mathematics. 1979. Vol. 61, No. 1 (July). P. 31–53.

[3] Sulejmanov B. I. Vtoroe uravnenie Penleve v odnoj zadache o nelinejnyh jeffektah vblizi kaustik // Zap. nauch. seminara LOMI. 1991. 187. S. 110–128. (in Russian).

[4] Chudnovskij V. M., Holodkevich E. D. Teorija sverhizluchatel'nyh lavin radiovolnovogo diapazona // Fizika tverdogo tela. 1982. T. 24. № 4. S. 1118–1123. (in Russian).

[5] Chudnovskij V. M. Lavinnyj raspad invertirovannogo sostojanija kvantovoj sistemy: avtoref. kand. fiz.-mat. nauk. Minsk: BGU, 1983. 16 s. (in Russian).

[6] Samodurov A. A., Chudnovskij V. M. Prostoj sposob opredelenija vremeni zaderzhki sverhizluchatel'noj bozonnoj laviny // Dokl. AN BSSR. 1985. T. 29. № 1. S. 9–10. (in Russian).

Orlov Viktor Nikolaevich

`e-mail:` orlovvn@mgsu.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Assoc. Professor, Moscow National Research State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

Zheglova Yulia Germanovna

`e-mail:` jeglovayug@mgsu.ru, Assistant of the Department, Moscow National Research State University of Civil Engineering, Moscow, Russia.

[7] Hill J. M. Radial deflections of thin precompressed cylindrical rubber bush mountings // Internat J. Solids Structures. 1977. 13. P. 93–10.

[8] Ockendon J. R. Numerical and analytical solutions of moving boundary problems // Proc. Symp. "Moving Boundary Problems" / e. D. G. Wilson, A. D. Solomon and P. T. Boggs. New York, 1978. P. 129–145.

[9] Ablowitz M., Romani A., Segur H. Nonlinear evolutions and ordinary differential equations of Painleve type // Lett. Al Nuowo Cim. 1978. V. 23. No. 9. P. 333–338.

[10] Ablowitz M., Romani A., Segur H. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I, II // J. Mat. Phys. 1980. Vol. 21. P. 715–721, 1006–1015.

[11] Ablowitz M., Satsuma I. Solutions and rational solutions of nonlinear evolution equations // J. Mat. Phys. 1978. V. 19. No. 10. P. 2180–2186.

[12] Orlov V. N. Metod priblizhennogo reshenija pervogo, vtorogo differencial'nyh uravnenij Penleve i Abelja. M.: MPGU, 2013. 174 s. (in Russian).

[13] Orlov V. N. Metod priblizhennogo reshenija skaljarnogo i matrichnogo differencial'nyh uravnenij Rikkati. Cheboksary: Perfektum, 2012. 112 s. (in Russian).

[14] Orlov V. N., Lukashevich N. A. Issledovanie priblizhennogo reshenija vtorogo uravnenija Penleve // Differenc. uravnenija. 1989. T. 25. № 10. S. 1829–1832. (in Russian).

[15] Orlov V. N., Lukashevich N. A., Samodurov A. A. Postroenie priblizhennogo reshenija v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki dlja vtorogo uravnenija Penleve // Vestnik BGU. Serija 1: Fizika, matematika, informatika. Minsk, 2002. S. 79–85. (in Russian).

[16] Orlov V. N. Kriterii sushhestvovanija podvizhnyh osobyh tochek reshenij vtorogo uravnenija Penleve // Izvestija TulGU. Serija: Diff. uravnenija i prikladnye zadachi. Vyp. 1. Tula: Izd-vo TulGU, 2006. S. 26–29. (in Russian).

[17] Orlov V. N. O priblizhennom reshenii vtorogo uravnenija Penleve // Vestnik KGTU im. A. N. Tupoleva. 2008. № 2. S. 42–46. (in Russian).

[18] Orlov V. N. Issledovanie priblizhenogo reshenija differencial'nogo uravnenija Abelja v okrestnosti podvizhnoj osoboj tochki // Vestnik MGTU im. N. Je. Baumana. Serija: Estestvennye nauki. 2009. № 4 (35). S. 23–32. (in Russian).