Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2014. №3 (21). С. 112–118

В. А. Аскаров

ОБРАТНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ИЗГИБА ПЛАСТИНЫ, АРМИРОВАННОГО ОДНОНАПРАВЛЕННЫМИ ВОЛОКНАМИ

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Аннотация. На основе принципа равнопрочности решена задача по определению оптимальной формы поперечного сечения упругих включений (волокон), обеспечивающая минимизацию напряжений в изгибаемой пластине. Найденная форма поперечного сечения волокон обеспечивает повышение несущей способности составной пластины.

Ключевые слова: упругая составная пластина, связующее, включения, изгиб, минимизация напряжений, оптимальная форма поперечных сечений волокон.

УДК: 539.3

Рассмотрим составную упругую пластину, состоящую из сплошной упругой среды (матрицы) и распределенных в ней включений из другого упругого материала. Подкрепляющие элементы (волокна), сравнительно небольшие по массе, существенно влияют на прочность составной пластины [1], [2]. Процесс разрушения таких материалов определяется взаимодействием включений (волокон) с матрицей. Армированные волокна проектируют в основном круглые поперечные сечения. Как показывает опыт, от идеальной конструкторской геометрии реальные поверхности сечений подкрепляющих волокон отличаются наличием неровностей, являющихся неизбежным следствием процесса их изготовления. Несмотря на малые размеры неровностей, они могут оказывать существенное влияние на несущую способность составного тела. Поэтому исследование как самой геометрии реальных поверхностей волокон, так и влияния параметров неровностей поверхности соединения связующего с волокнами на несущую способность крайне актуальны.

На современном этапе развития техники важное значение имеет оптимальное проектирование конструкций и материалов.

Пусть неограниченная пластина (композит) подвергается изгибу средними моментами (изгиб на бесконечности): $M_x = M_x^\infty$, $M_y = M_y^\infty$, $H_{xy} = 0$. Рассмотрим составную упругую пластину, состоящую из сплошной упругой среды (матрицы) области D, и распределенных в ней одинаковых включений с поперечным сечением, близким к круговому. Обозначим границу раздела различных упругих сред через $L'_m \quad (m = 0, \pm 1, \ldots)$. Полагаем, что границу L'_m соединения волокна с матрицей можно представить в виде

$$r = \rho(\theta) = \lambda + \varepsilon H(\theta), \tag{1}$$

а центры периодической системы волокон расположены в точках

$$P_m = m\omega, \quad (m = 0, \pm 1, \ldots), \quad \omega = 2.$$

Здесь ε – малый параметр, равный $R_{\max}/\lambda$; $R_{\max}$ – наибольшая высота неровности профиля контура L'_m от окружности радиуса $r = \lambda$.

Поступила 08.06.2014

Считается, что всюду на границе соединения L'_m имеет место жесткое сцепление различных сред. Начало системы координат совмещаем с геометрическим центром круга $L_0 \quad (r = \lambda)$ в срединной плоскости композита. Для оптимизации несущей способности составной пластины предлагается метод, заключающийся в выборе класса неровностей поверхности поперечного сечения волокна, обеспечивающего повышение несущей способности композита. Таким образом, требуется определить такую геометрию поверхности соединения волокна и связующего, чтобы созданное ею упругое поле снижало бы концентрацию напряжений в композите. Очевидно, что чем ниже уровень напряженности в составном теле, тем выше ресурс ее работы. Решению подобных задач механики посвящены работы [3], [4], [5], [6], [7].

Управляющими переменными принимаем параметры геометрии границы соединения волокон и связующего. Представим границу неизвестного контура ${L_0}^*$ в виде (1), где функция $H(\theta)$ подлежит определению в процессе решения задачи оптимизации. Не уменьшая общности поставленной задачи оптимизации, принимаем, что искомая функция $H(\theta)$ симметрична относительно координатных осей и может быть представлена в виде отрезка ряда Фурье. Следовательно, задача оптимизации сводится к определению коэффициентов a_{2k}^0 и b_{2k}^0 (параметров управления) этого ряда Фурье.

Для нахождения геометрии соединения введем в рассматриваемую задачу в качестве критерия определения геометрии соединения (функции $H(\theta)$) условие равнопрочности на контуре соединения связующего и волокон.

Требуется определить функцию $H(\theta)$, так чтобы созданное в процессе нагружения составной пластины напряженно-деформированное поле обеспечивало выполнение условия равнопрочности на контуре раздела различных сред. Это дополнительное условие позволяет определить искомую функцию $H(\theta)$ геометрии соединения материалов.

На основании симметрии граничных условий и геометрии области D, занятой упругой средой, компоненты тензора напряжений в связующем являются периодическими функциями с основным периодом ω. Так как решение для связующего обладает свойством периодичности, достаточно рассмотреть условия сопряжения связующего и волокна лишь вдоль контура L_0^*.

Обозначим через w_0 прогиб (включения) области S_0^*, ограниченной контуром L_0^*, а w – прогиб пластины вне областей $S_m* \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ соприкасания волокон поперечного сечения, близкого к круговому. Представим эти прогибы через бигармонические функции. Комплексные потенциалы, относящиеся к волокну, обозначим через $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$, а относящиеся к связующему – через $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Искомые функции (прогиб, напряжения, моменты) ищем в виде разложений по малому параметру, в которых пренебрегаем для упрощения членами, содержащими ε в степени выше первой. Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений теории изгиба пластин. Значения компонент тензора напряжений (моментов) при $r = \rho(\theta)$ найдем, разлагая в ряд выражения для моментов в окрестности $r = \lambda$.

Используя процедуру метода возмущений, на основании граничных условий рассматриваемой задачи получим [8] граничные условия задачи на контуре L_0 $(\tau = \lambda \exp(i\theta))$ для комплексных потенциалов:
– для нулевого приближения:

$$
\begin{gathered}
\Phi^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi^{(0)}(\tau)} - \left[\bar{\tau}\Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)\right] e^{2i\theta} = \\
= \Phi_0^{(0)}(\tau) + \overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} - \left[\bar{\tau}\Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau)\right] e^{2i\theta} \quad \text{на} \quad L_0, \\
\text{к}\overline{\Phi^{(0)}(\tau)} + \Phi^{(0)}(\tau) - \tfrac{\tau^2}{\lambda^2}\left[\tfrac{\lambda^2}{\tau}\Phi^{(0)'}(\tau) + \Psi^{(0)}(\tau)\right] = \\
= \tfrac{D_0(1-v_0)}{D(1-v)}\left\{\text{к}_0\overline{\Phi_0^{(0)}(\tau)} + \Phi_0^{(0)}(\tau) - \tfrac{\tau^2}{\lambda^2}\left[\tfrac{\lambda^2}{\tau}\Phi_0^{(0)'}(\tau) + \Psi_0^{(0)}(\tau)\right]\right\};
\end{gathered}
\tag{2}
$$

– для первого приближения:

$$\begin{gathered}\Phi^{(1)}(\tau)+\overline{\Phi^{(1)}(\tau)}-\left[\bar{\tau}\Phi^{(1)'}(\tau)+\Psi^{(1)}(\tau)\right]e^{2i\theta}= \\ =\Phi_0^{(1)}(\tau)+\overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)}-\left[\bar{\tau}\Phi_0^{(1)'}(\tau)+\Psi_0^{(1)}(\tau)\right]e^{2i\theta}+f_1+if_2 \quad \text{на} \quad L_0, \\ \text{к}\overline{\Phi^{(1)}(\tau)}+\Phi^{(1)}(\tau)-\frac{\tau^2}{\lambda^2}\left[\frac{\lambda^2}{\tau}\Phi^{(1)'}(\tau)+\Psi^{(1)}(\tau)\right]= \\ =\frac{D_0(1-v_0)}{D(1-v)}\left\{\text{к}_0\overline{\Phi_0^{(1)}(\tau)}+\Phi_0^{(1)}(\tau)-\frac{\tau^2}{\lambda^2}\left[\frac{\lambda^2}{\tau}\Phi_0^{(1)'}(\tau)+\Psi_0^{(1)}(\tau)\right]\right\}+g_1+ig_2.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\tau=\lambda e^{i\theta}+m\omega \quad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...)$; v и v_0 – коэффициенты Пуассона связующего и волокна соответственно; $\text{к}=-(3+v)/(1-v)$; $\text{к}_0=-(3+v_0)/(1-v_0)$; D и D_0 – цилиндрическая жесткость связующего и волокна; функция f_1+if_2 выражается через функцию $H(\theta)$ и компоненты перемещений на контуре L_0 нулевого приближения; аналогично функция g_1+ig_2 зависит от функции $H(\theta)$ и компонент напряжений при $\tau=\lambda e^{i\theta}$ нулевого приближения.

Рассматриваемая задача определения напряженно-деформированного состояния составной пластины сводится в каждом приближении к отысканию двух пар функций $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ и $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ комплексного переменного $z=x+iy$, аналитических в соответствующих областях и удовлетворяющих соответствующим граничным условиям (2) и (3).

Комплексные потенциалы $\Phi_0^{(0)}(z)$ и $\Psi_0^{(0)}(z)$ регулярны в области S_0, ограниченной контуром L_0, и, следовательно, могут быть представлены в виде [8]

$$\Phi_0^{(0)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}^{(0)}z^{2k}, \quad \Psi_0^{(0)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{2k}^{(0)}z^{2k}. \tag{4}$$

Комплексные потенциалы $\Phi^{(0)}(z)$ и $\Psi^{(0)}(z)$ в рассматриваемом случае (изгиб на бесконечности) ищем [9] в виде

$$\begin{gathered}\Phi^{(0)}(z)=\alpha_0^0+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}^0\frac{\lambda^{2k+2}\rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}-\frac{M_x^\infty+M_y^\infty}{4D(1+v)}, \\ \Psi^{(0)}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}^0\frac{\lambda^{2k+2}\rho^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}-\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}^0\frac{\lambda^{2k+2}S^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}+ \\ +\frac{1}{2}\frac{M_y^\infty-M_x^\infty}{D(1-v)},\end{gathered} \tag{5}$$

где $\rho(z)=\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega}z\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$; $S(z)=\sum_m{}'\left[\frac{P_m}{(z-P_m)^2}-\frac{2z}{P_m^2}-\frac{1}{P_m}\right]$;
штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс $m=0$.

Из условия симметрии относительно координатных осей находим, что

$$Im\alpha_{2k}^0=0, \quad Im\beta_{2k}^0=0 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...).$$

Из условия постоянства главного вектора всех сил, действующих на дугу, соединяющую две конгруэнтные точки в D, следует

$$\alpha_0^0=\frac{\pi^2}{24}\beta_2^0\lambda^2.$$

Можно убедиться, что представления (5) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Удовлетворяя граничным условиям (2) комплексными потенциалами (4) и (5) и используя процедуру метода степенных рядов, получим бесконечные системы алгебраических уравнений относительно α_{2k+2}^0, β_{2k+2}^0, a_{2k}^0, b_{2k}^0 $(k=0,1,\ldots)$. Эти системы имеют громоздкий вид. Однако в большинстве практически важных случаев можно их урезать до двух–трех уравнений и, несмотря на это, получить весьма точные результаты [10] для рабочих диапазонов изменения радиуса λ.

После нахождения решения в нулевом приближении можно перейти к решению задачи в первом приближении. На основании решения в нулевом приближении находятся функции $f_1 + if_2$ и $g_1 + ig_2$. Комплексные потенциалы $\Phi_0^{(1)}(z)$, $\Psi_0^{(1)}(z)$ и $\Phi^{(1)}(z)$, $\Psi^{(1)}(z)$ ищутся в виде, аналогичном (4), (5), с очевидными изменениями. Дальнейший ход решения граничной задачи (3) такой же, как в нулевом приближении. Используя процедуру метода степенных рядов к граничным условиям (3), после некоторых преобразований находим бесконечную линейную алгебраическую систему относительно $\alpha_{2k}^{(1)}$, $\beta_{2k}^{(1)}$, $a_{2k}^{(1)}$, $b_{2k}^{(1)}$. Как и в нулевом приближении, эта система уравнений такова, что позволяет в явном виде получить формулы для $a_{2k}^{(1)}$ и $b_{2k}^{(1)}$, выраженные через коэффициенты ряда Фурье функций $f_1 + if_2$ и $g_1 + ig_2$.

При заданной функции $H(\theta)$ полученные алгебраические соотношения являются замкнутыми и позволяют найти напряженно-деформированное состояние композита для каждого профиля поперечного сечения волокна.

Рассмотрим задачу оптимизации. Пусть требуется определить границу (функцию $H(\theta)$) соединения связующего и волокна.

С помощью формул [10]

$$M_\theta + M_\rho = -4D(1+v)Re\Phi(z),$$

$$M_\theta - M_\rho + 2iH_{\rho\theta} = 2D(1-v)\left[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\right] e^{2i\theta},$$

используя полученное решение

$$\Phi(z) = \Phi^{(0)}(z) + \varepsilon\Phi^{(1)}(z), \quad \Psi(z) = \Psi^{(0)}(z) + \varepsilon\Psi^{(1)}(z),$$

найдем изгибающий момент M_θ на контуре $\tau = \rho(\theta)$ связующего с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра:

$$M_{\theta|r=\rho(\theta)} = M_{\theta|r=\lambda}^{(0)} + \varepsilon\left[\frac{\partial M_\theta^{(0)}}{\partial r} H(\theta) + M_\theta^{(1)}\right]_{r=\lambda} \tag{6}$$

$$M_{\theta|r=\lambda}^{(0)} = \frac{1}{2}\left(M_x^\infty + M_y^\infty\right) + \frac{1}{2}\left(M_y^\infty - M_x^\infty\right)\cos 2\theta -$$

$$-2D(1+v)\left(\alpha_0^0 + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}^0\cos(2k+2)\theta + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}^0\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{2k+2j+2}r_{j,k}\cos 2j\theta\right) +$$

$$+D(1-v)\left(-\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\alpha_{2k+2}^0\cos(2k+2)\theta + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}^0\lambda^{2k+2j+2}2jr_{j,k}\cos 2j\theta + \right.$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}^0\cos 2k\theta + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{2k+2}^0\lambda^{2k+2j+2}r_{j,k}\cos(2j+2)\theta -$$

$$\left. -\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(2k+2)\alpha_{2k+2}^0\lambda^{2k+2j+2}S_{j,k}\cos(2j+2)\theta\right)$$

$$M_{\theta|r=\lambda}^{(1)} = -2D(1+v)\left(\alpha_0^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}^{(1)}\cos(2k+2)\theta + \right.$$

$$
+\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}^{(1)}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{2k+2j+2}r_{j,k}\cos 2j\theta\Bigg)+
$$

$$
+D(1-v)\Bigg(-\sum_{k=0}^{\infty}(2k+2)\,\alpha_{2k+2}^{(1)}\cos(2k+2)\theta+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{2k+2}^{(1)}\lambda^{2k+2j+2}2jr_{j,k}\cos 2j\theta+
$$

$$
+\sum_{k=0}^{\infty}\beta_{2k+2}^{(1)}\cos 2k\theta+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{2k+2}^{(1)}\lambda^{2k+2j+2}r_{j,k}\cos\left(2j+2\right)\theta-
$$

$$
-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}(2k+2)\,\alpha_{2k+2}^{(1)}\lambda^{2k+2j+2}S_{j,k}\cos\left(2j+2\right)\theta\Bigg).
$$

В приведенной формуле (6) коэффициенты $\alpha_{2k}^{(1)}$, $\beta_{2k}^{(1)}$ зависят от величин d_{2k} (коэффициентов) ряда Фурье искомой функции $H\left(\theta\right)$. Для построения недостающих уравнений, позволяющих определить d_{2k}, необходимо, чтобы обеспечивалась минимизация напряжений (моментов) на контуре L_0'. Оптимальное проектирование осуществляем путем минимизации критерия

$$
\sum_{k=1}^{M}\left[M_\theta(\theta_i)-M_*\right]^2\to\min,
$$

где M_* – оптимальное значение изгибающего момента на границе раздела сред, которое заранее неизвестно и подлежит определению.

Разбиваем отрезок $[0,\ 2\pi]$ на n равных частей. В узлах разбиения θ_i вычисляем значения функции $M_\theta(\theta_i)$. Функция $M_\theta(\theta_i)$ линейно зависит от управляющих переменных d_{2k} и M_*. Согласно методу наименьших квадратов наилучшими коэффициентами d_{2k} и M_* будут те, для которых функция $U=\sum\limits_{i=1}^{N}\left[M_\theta(\theta_i)-M_*\right]^2$ будет принимать минимальные значения. Используя необходимое условие экстремума функции нескольких переменных, получаем бесконечную линейную систему уравнений для определения d_{2k} и M_*:

$$
\frac{\partial U}{\partial M_*}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial d_{2k}}=0\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{7}
$$

Система уравнений упрощается, так как функция $M_\theta\left(\theta,\ d_{2k}\right)$ линейна относительно параметров d_{2k}. Система уравнений (6) совместно с алгебраическими системами для α_{2k}^0, β_{2k}^0, a_{2k}^0, b_{2k}^0 и их аналогами в первом приближении позволяет определить равнопрочную форму раздела сред, напряженно-деформированное состояние композита, а также оптимальное значение изгибающего момента M_* на контуре раздела сред. Полученные системы относительно α_{2k}^0, β_{2k}^0, a_{2k}^0, b_{2k}^0, α_{2k}^1, β_{2k}^1, a_{2k}^1, b_{2k}^1 весьма громоздки. Так как $0<\lambda<1$, а параметр λ в высоких степенях входит в данные системы, то их можно значительно упростить. При решении большинства важных практических задач каждую из этих алгебраических систем можно урезать до двух-трех уравнений и получить достаточно точные результаты для рабочих диапазонов радиуса λ.

Для численной реализации изложенного способа совместно решали полученные системы. Использовали метод урезания алгебраических систем. Исследовали односторонний изгиб составной пластины постоянными моментами $M_y^\infty(M_x^\infty=0)$ и всесторонний изгиб – моментами $M_x^\infty=M_y^\infty=M_0$. Урезанные системы уравнений решали методом Гаусса с выбором главного элемента в зависимости от радиуса λ.

Оптимальное решение, т.е. найденные коэффициенты d_{2k} функции $H\left(\theta\right)$, способствует повышению несущей способности составной пластины.

Таким образом, полученные результаты рассмотренной работы открывают новые возможности оптимального проектирования составных пластин (композитов) за счет выбора формы соединения связующего и волокон (включений).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Решетов, Д. Н.* Состояние и тенденции развития деталей машин / Д. Н. Решетов // Вестник машиностроения. – 2000. – № 10. – С. 11–15.

[2] *Фудзии, Т.* Механика разрушения композиционных материалов / Т. Фудзии, М. Дзако. – М. : Мир, 1982. – 232 с.

[3] *Mirsalimov, V. M.* The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching / V. M. Mirsalimov, E. A. Allahyarov // Int. J. Fracture. – 1996. – Vol. 79. – No 1. – P. 17–21.

[4] *Гаджиев, Г. Х.* Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра контактной пары / Г. Х. Гаджиев, В. М. Мирсалимов // Проблема механики : сб. ст. к 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского ; под ред. Д. М. Климова. – М. : Физматлит, 2003. – С. 196–207.

[5] *Mirsalimov, V. M.* Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft / V. M. Mirsalimov // J. of Machinery Manufacture and Reliability. – 2007. – Vol. 36. – No 1. – P. 35–38.

[6] *Мирсалимов, В. М.* Обратная задача механики разрушения для составного цилиндра / В. М. Мирсалимов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2009. – № 1. – С. 165–173.

[7] *Мирсалимов, В. М.* Минимизация параметров разрушения в составном теле / В. М. Мирсалимов, К. С. Мамедова // Механика машин, механизмов и материалов. – 2012. – № 2 (19). – С. 65–68.

[8] *Мусхелишвили, Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. Мусхелишвили. – М. : Наука, 1966. – 707 с.

[9] *Мирсалимов, В. М.* Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами / В. М. Мирсалимов. – Баку : Элм, 1984. – 124 с.

[10] *Григолюк, Э. И.* Перфорированные пластины и оболочки / Э. И. Григолюк, Л. А. Фильштинский. – М. : Наука, 1970. – 556 с.

Аскаров Вусал Али оглы,

аспирант, Институт математики и механики НАН Азербайджана, г. Баку

`e-mail:` irakon63@hotmail.com

V. A. Askarov

INVERSE PERIODIC PROBLEM OF THE THEORY OF THE BEND OF THE PLATE REINFORCED BY UNIDIRECTIONAL FIBRES

Institute Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan

Abstract. On the basis of a principle of a uniform strength the problem of definition of an optimum form of cross-section of the elastic inclusions (fibers), provided decrease in concentration of tension in a bent plate is solved. The found form of cross-section of fibers provides increase of bearing ability of a composite plate.

Keywords: elastic composite plate, binding, inclusions, bend, minimization of stresses, optimal form of width section of fiber.

REFERENCES

[1] *Reshetov, D. N.* Status and trends of development of machine elements. Vestnik Mashinostr / D. N. Reshetov. – 2000. – № 10. – P. 11–15.

[2] *Fujii, T.* Fracture mechanics Composite Materials / T. Fujii, M. Dzako. 1982. – Moscow. Mir. - 232 p.

[3] *Mirsalimov, V. M.* The breaking crack build-up in perforated planes by uniform ring switching. Int. J. Fracture / V. M. Mirsalimov, E. A. Allahyarov. – 1996. – Vol. 79. – No 1. – P. 17–21.

[4] *Gadzhiev, G. Kh.* Inverse problem of mechanics of fracture mechanics for a composite cylinder of a contact pair. In: Klimov D. M. (ed), Problem in Mechanics (collected papers devoted to the 90^{th} anniversary of A. Yu. Ishlinskii / G. Kh. Gadzhiev, V. M. Mirsalimov. – M. : Fizmalit, 2003. – P. 196–207.

[5] *Mirsalimov, V. M.* Inverse theory of elasticity problem of mounting a disk on a rotating shaft. J. of Machinery Manufacture and Reliability / V. M. Mirsalimov. – 2007. – Vol. 36. – No 1. – P. 35–38.

[6] *Mirsalimov, V. M.* Inverse problem of fracture mechanics for a compound cylinder. Mechanics of Solid / V. M. Mirsalimov. – 2009. – Vol. 44. – № 1. – P. 141–148.

[7] *Mirsalimov, V. M.* Minimization of stress state of the compound cylinder. J. of Machinery Manufacture and Reliability / V. M. Mirsalimov. – 2006. – Vol. 35. – № 26. – P. 97–101.

[8] *Muskhelishvili, N. I.* Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity / N. I. Muskhelishvili. – M. : Nauka, 1966. – 707 p.

[9] *Mirsalimov, V. M.* Destruction of elastic and elastoplasti bodies with cracks / V. M. Mirsalimov. – Baku : Elm. – 1984. – 124 p.

[10] *Grigolyuk, E. I.* Punch of a plates and shelts / E. I. Grigolyuk, L. A. Filshtinsky. – M. : Science, 1970. – 556 p.

Askarov, Vusal Ali oqli

Postgraduate student, Institute of Mathematics and Mechanics NAN of Azerbaijan, Baku