

Е. Ю. Русина

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ГРАНИЦ В ТОНКОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ КОНСТРУКЦИИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Аннотация. Настоящая работа посвящена определению напряженно-деформированного состояния механической конструкции, которая состоит из тонкой бесконечной упругопластической пластины с отверстием и включения цилиндрической формы. В качестве метода решения использован метод малого параметра, при этом малый параметр характеризует возмущение внешних статических граничных условий. В работе получены приближенно аналитически выражения для упругопластических границ в тонкой пластине с круговым отверстием, в которую с напрягом запрессовывается несколько большее по размеру включение цилиндрической формы.

Ключевые слова: малый параметр, пластичность, упругость, плоское напряженное состояние, условие пластичности Треска-Сен-Венана.

УДК: 539.3

1. Введение

Определению напряженно-деформированного состояния в плоских упругопластических задачах посвящены исследования ряда различных авторов [1, 3, 5, 6, 7, 10]. В данной работе в рамках плоского напряженного состояния методом малого параметра [4] определяются величины пластических зон в тонкой пластине с круглым отверстием, в которую с натягом запрессовывается несколько большее по размеру включение цилиндрической формы. Материал как пластины, так и включения предполагается упругопластическим. Решение в пластических областях конструкции строилось согласно условию пластичности Треска - Сен-Венана [4].

2. Постановка задачи

На бесконечности пластина растягивается взаимно перпендикулярными усилиями интенсивностями P_1 и P_2 , по контуру внутреннего отверстия во включении приложено распределенное давление интенсивностью P_0 . Особенностью данной работы является наличие пластических зон в обоих элементах рассматриваемой механической конструкции. Задача решалась с учетом того, что пластическая зона в пластине целиком охватывает контур кругового отверстия в пластине, а пластическая зона во включении аналогично охватывает целиком внутренний контур включения.

© Русина Е. Ю., 2017

Русина Елена Юрьевна

e-mail: Elena_RS@inbox.ru, аспирант, Воронежский Государственный Университет, г. Воронеж, Россия

Поступила 10.11.2017

Решение находится в цилиндрических координатах (ρ, θ, z) , при этом ось Oz направим перпендикулярно плоскости пластины. Начало координат выбираем в центре кругового отверстия в пластине.

3. Метод решения

Задача решается методом малого параметра [4], при этом определено два приближения: нулевое и первое.

За нулевое приближение выбирается осесимметричное состояние тонкой пластины с круговым отверстием радиуса α с тонким упругопластическим включением с внешним радиусом α_1 ($\alpha_1 > \alpha$) и внутренним β . На бесконечности данная конструкция растягивается взаимно перпендикулярными усилиями с интенсивностями $P = (P_1 + P_2)/2$. Внутренний контур включения нагружен усилиями интенсивностью P_0 .

Здесь и далее расчет производится с величинами, которые были записаны в безразмерном виде. Так величины, имеющие размерность напряжений, отнесены $2k_1$ – удвоенному значению предела текучести на сдвиг материала пластины. Перемещения и геометрические характеристики отнесем к радиусу упругопластической границы в пластине $r_{s1}^{(0)}$ в нулевом приближении. Для обозначения безразмерных величин используем их прежние обозначения.

Введем малый параметр, характеризующий, в данном случае, возмущение статических граничных условий $\delta d_3 = (P_1 - P_2)/2$. Тогда решение задачи будет иметь вид

$$r_{s1} = 1 + \delta r_{s1}^{(1)}, r_{s2} = r_1 + \delta r_{s2}^{(1)}, \quad (1)$$

где верхний индекс указывает на номер приближения, δ – малый параметр, r_{s1} – радиус упругопластической границы в пластине, r_{s2} – радиус упругопластической границы во включении, r_1 – радиус упругопластической границы во включении в нулевом приближении.

Ввиду малости величины ε , примем за линию контакта пластины и включения внешнюю границу включения [8, 10], которая при разложении представляется в форме

$$\rho_{kon} = \alpha_1. \quad (2)$$

3.1. Нулевое приближение в пластине

Следуя [4], для нулевого приближения имеем в упругой области пластины

$$\sigma_\rho^{e(0)} = P - \frac{(q+1)\alpha}{2\rho^2}, \sigma_\theta^{e(0)} = P + \frac{(q+1)\alpha}{2\rho^2}, \tau_{\rho\theta}^{e(0)} = 0, \quad (3)$$

$$u_\rho^{e(0)} = \frac{1}{E_1} \left((2 - (q+1)\alpha)\rho + \frac{3(q+1)\alpha}{\rho} \right), u_\theta^{e(0)} = 0.$$

В пластической зоне пластины

$$\sigma_\rho^{p(0)} = 1 - \frac{(q+1)\alpha}{\rho}, \sigma_\theta^{p(0)} = 1, \tau_{\rho\theta}^{p(0)} = 0, \quad (4)$$

$$u_\rho^{p(0)} = \frac{1}{2E_1} (\rho + (q+1)\alpha(1 - 2 \ln \rho)), u_\theta^{p(0)} = 0,$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\rho\theta}$ – компоненты тензора напряжений, u_ρ, u_θ – компоненты вектора перемещений, E_1 – модуль Юнга материала пластины, q – нормальное давление на границе контакта пластины и включения. Здесь и далее индексы "e" и "p" обозначают принадлежность к упругой или пластической зоне соответственно.

3.2. Нулевое приближение во включении

В упругой зоне включения, распределение поля напряжений и перемещений имеет вид [10]

$$\begin{aligned}\sigma_{B\rho}^{e(0)} &= \frac{(\rho^2 - \alpha_1^2) r_1 (r_1 k^* + r_1 q - (P_0 + k^*) \beta)}{\rho^2 (r_1^2 - \alpha_1^2)} - q, \\ \sigma_{B\theta}^{e(0)} &= \frac{(\rho^2 + \alpha_1^2) r_1 (r_1 k^* + r_1 q - (P_0 + k^*) \beta)}{\rho^2 (r_1^2 - \alpha_1^2)} - q, \quad \tau_{B\rho\theta}^{e(0)} = 0, \\ u_{B\rho}^{e(0)} &= -\frac{1}{2E_2} \left(\frac{3(\rho^2 - \alpha_1^2) r_1 (r_1 k^* + r_1 q - (P_0 + k^*) \beta)}{\rho (r_1^2 - \alpha_1^2)} + q\rho \right), \quad u_{B\theta}^{e(0)} = 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где E_2 – модуль Юнга материала включения, k^* – величина предела текучести на сдвиг материала включения.

В пластической зоне включения, распределение поля напряжений и перемещений имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{B\rho}^{p(0)} &= k^* - \frac{(P_0 + k^*) \beta}{\rho}, \quad \sigma_{B\theta}^{p(0)} = k^*, \quad \tau_{B\rho\theta}^{p(0)} = 0, \\ u_{B\rho}^{p(0)} &= \frac{1}{E_2} \left(\frac{1}{2} k^* \rho + \beta (P_0 + k^*) (2 \ln r_1 - \ln \rho + 3) - 4r_1 (k^* + q) \right), \quad u_{B\theta}^{p(0)} = 0,\end{aligned}\quad (6)$$

где σ_ρ , σ_θ , σ_z , $\tau_{\rho\theta}$ – компоненты тензора напряжений, u_ρ , u_θ – компоненты вектора перемещений.

3.3. Определение контактного давления и радиуса упругопластических границ в пластине и включении в нулевом приближении

Из условия совместности деформаций пластины и включения вдоль линии контакта следует

$$u_{\rho=\alpha}^{p(0)} = u_{B\rho=\alpha_1}^{e(0)} + \varepsilon, \quad (7)$$

из условия сопряжения на упругопластической границе в пластине

$$\sigma_\theta^{p(0)} = \sigma_\theta^{e(0)}, \quad \text{при } \rho = 1 \quad (8)$$

из условий сопряжения на упругопластической границе во включении

$$\sigma_{B\theta}^{p(0)} = \sigma_{B\theta}^{e(0)}, \quad \text{при } \rho = r_1 \quad (9)$$

имеем следующую систему уравнений для определения контактного давления q и радиусов упругопластических границ в пластине и включении в нулевом приближении $r_{s1}^{(0)}$ и $r_{s2}^{(0)}$.

$$\begin{aligned}\frac{(1-P)r_{s1}^{(0)} \ln r_{s1}^{(0)}}{E_1} + r_{s1}^{(0)} (1-P) \left(\frac{\alpha_1}{\alpha E_2} - \frac{1}{E_1} - \frac{\ln \alpha}{E_1} \right) + (\alpha - \alpha_1) \left(\frac{1}{2E_1} - \frac{1}{2E_2} + 1 \right) &= 0, \\ q = \frac{2(1-P)}{\alpha} - 1,\end{aligned}\quad (10)$$

$$\frac{4(1-P)\alpha_1^2 r_{s1}^{(0)} r_{s2}^{(0)}}{\alpha} - (P_0 + k^*)\beta \left(r_{s2}^{(0)2} + \alpha_1^2 \right) + 2\alpha_1^2 r_{s2}^{(0)} (k^* - 1) = 0.$$

4. Первое приближение

Рассмотрим первое приближение.

Граничные условия на внутреннем контуре отверстия во включении для первого приближения запишем согласно [4]

$$\sigma_{B\rho}^{(1)} = 0, \tau_{\rho\theta}^{(1)} = 0, \text{ при } \rho = \beta \quad (11)$$

Вдоль линии контакта пластины и включения, согласно [4, 9] запишем

1) если включение вложено с натягом в пластину

$$\sigma_{\rho}^{p(1)} = \sigma_{B\rho}^{e(1)}, \tau_{B\rho\theta}^{e(1)} = 0, \tau_{\rho\theta}^{p(1)} = 0, u_{\rho}^{p(1)} = u_{B\rho}^{e(1)}, \text{ при } \rho = \alpha_1, \quad (12)$$

2) если включение впаяно в пластину

$$\sigma_{\rho}^{p(1)} = \sigma_{B\rho}^{e(1)}, \tau_{\rho B\theta}^{e(1)} = \tau_{\rho\theta}^{p(1)}, u_{\rho}^{p(1)} = u_{B\rho}^{e(1)}, u_{\theta}^{p(1)} = u_{B\theta}^{e(1)}, \text{ при } \rho = \alpha_1. \quad (13)$$

5. Результаты решения

В результате решения задачи следуя [2] и [4] были получены компоненты тензора напряжений и вектора перемещений во включении и в пластине для обеих зон деформирования. Определяющие соотношения для форм упругопластических границ в пластине и во включении имеет вид:

$$r_{s1}^{(1)} = - \left[\sigma_{\theta}^{(1)} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \right]_{\rho=1}, \quad (14)$$

$$r_{s2}^{(1)} = - \left[\sigma_{\theta}^{(1)} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma_{\theta}^{(0)}}{\partial \rho} \right]^{-1} \right]_{\rho=r_1}, \quad (15)$$

где [] обозначают разность компонент в упругой и пластической области.

Подстановка полученных выражений для напряжений в (14), (15) дает для радиусов упругопластических границ (16) и (17)

$$r_{s1}^{(1)} = \frac{4d_3 - a_1 + 2a_2}{(q+1)\alpha} \cos 2\theta, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} r_{s2}^{(1)} = & \frac{r_1^2 (r_1^2 - \alpha_1^2)}{2N\alpha_1^2 (r_1 k^* + r_1 q - (P_0 + k^*)\beta)} \left(\left((-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4) - (3 - 2\beta^{-2} - \beta^4) \left(\frac{r_1}{\beta} \right)^{-4} + \right. \right. \\ & + 2(-3 + 2\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{r_1}{\beta} \right)^2 \left(-b_{B1} \left(\frac{C_{12}}{C_{11}} \left(\frac{C_{13}C_{21} - C_{23}}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \right) + \frac{C_{13}}{C_{11}} \right) - \right. \\ & - b_{B2} \left(\frac{C_{12}}{C_{11}} \left(\frac{C_{14}C_{21} - C_{24}}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \right) + \frac{C_{14}}{C_{11}} \right) - \frac{C_{12}}{C_{11}} \left(\frac{4d_3\alpha C_{21} - 2d_3\alpha(3\alpha_1 - 4)}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \right) - \\ & \left. \left. - \frac{4d_3\alpha}{C_{11}} \right) + \left((-1 + 2\beta^2 - \beta^4) + (-1 + 2\beta^2 + \beta^4) r_1^{-4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2(-3 + 2\beta^{-2} + \beta^4) r_1^2 \right) \left(b_{B1} \left(\frac{C_{13}C_{21} - C_{23}}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \right) + b_{B2} \frac{C_{14}C_{21} - C_{24}}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4d_3\alpha C_{21} - 2d_3\alpha(3\alpha_1 - 4)}{C_{22}C_{11} - C_{12}C_{21}} \Big) + \left((2 - 2\beta^{-2}) + (2\beta^{-1} - 2\beta^{-4}) \left(\frac{r_1}{\beta}\right)^{-4} + \right. \\
& \quad \left. + (6 - 8\beta^2 + 2\beta^4) \left(\frac{r_1}{\beta}\right)^2 + \beta^{-4} \left(\frac{r_1}{\beta}\right)^{-2} \right) b_{B1} + \\
& \quad \left. + \left((2 - 2\beta^2) + (-2\beta^4 + 2\beta^2) r_1^{-4} + (6 - 8\beta^{-2} + 2\beta^{-4}) r_1^2 \right) b_{B2} \right) \cos 2\theta, \quad (17)
\end{aligned}$$

где a_1, a_2, b_{B1}, b_{B2} – константы, определяемые из условий сопряжения (12) и (13) на границе контакта пластины и включения

$$\begin{aligned}
N &= 6 - 4(\beta^{-2} + \beta^2) + (\beta^{-4} + \beta^4), \\
C_{ij} &= \left(\frac{A_{i+1,1}B_{1j}}{NA_{11}} - \frac{A_{12}A_{i+2,1}B_{2j}}{NA_{11}A_{22}} + \frac{A_{i+2,2}B_{2j}}{NA_{22}} - \frac{\beta^2 B_{i+2,1}}{E} \right), \text{ где } i = 1, 2; j = 1, \dots, 4,
\end{aligned}$$

$$A_{11} = \frac{1}{\alpha_1}, \quad A_{12} = 2 \left(\frac{1}{\alpha_1^2} - \frac{1}{\alpha_1} \right), \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = \frac{2}{\alpha_1^2}, \quad A_{23} = \left(\frac{\ln \alpha_1 + 1}{E} - \frac{3}{2}\alpha - 1 \right),$$

$$A_{32} = \left(\alpha + 4 - \frac{2(\ln \alpha_1 + 1)}{E} - \frac{2}{\alpha_1 E} \right), \quad A_{41} = (3\alpha + 2 - 2\alpha_1(\alpha + 1)),$$

$$A_{42} = \left(\frac{2 \ln \alpha_1}{E} + \frac{5}{2E} - 2(\alpha + 4) + \alpha_1(2\alpha + 7) \right),$$

$$B_{11} = \left(\left(1 - \frac{4}{\beta^2} + \beta^4 \right) + \left(3 - \frac{2}{\beta^2} - \beta^{-4} \right) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-4} + 2(1 - 2\beta^2 + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-2} \right),$$

$$B_{12} = \left((1 - 2\beta^2 + \beta^{-4}) + (1 - 2\beta^2 - \beta^4) \alpha_1^{-4} + 2(1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \alpha_1^{-2} \right),$$

$$B_{13} = \left((-2 + 2\beta^{-2}) + (-2\beta^{-2} + 2\beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-4} + (2 - 2\beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-2} \right),$$

$$B_{14} = \left((-2 + 2\beta^2) + (2\beta^4 - 2\beta^2) \alpha_1^{-4} + (2 - 2\beta^4) \alpha_1^{-2} \right),$$

$$\begin{aligned}
B_{21} &= \left((-2 + 2\beta^{-2} - \beta^4) + (3 - 2\beta^{-2} - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-4} + \right. \\
& \quad \left. + (-3 + 2\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^2 + (1 - 2\beta^2 + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{22} &= \left((-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) + (3 - 2\beta^2 - \beta^4) \alpha_1^{-4} + \right. \\
& \quad \left. + (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \alpha_1^2 + (1 - 2\beta^{-2} + \beta^4) \alpha_1^{-2} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{23} &= \left((2 - 2\beta^{-2}) + (-2\beta^{-2} + 2\beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-4} + \right. \\
& \quad \left. + (3 - 4\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^2 + (1 - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-2} \right),
\end{aligned}$$

$$B_{24} = ((2 - 2\beta^2) + (2\beta^4 - 2\beta^2) \alpha_1^{-4} + (3 - 4\beta^{-2} + \beta^{-4}) \alpha_1^2 + (1 - \beta^4) \alpha_1^{-2}),$$

$$B_{31} = \left(\frac{-3}{2N} (-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{2N} (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3N} (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{2}{N} (-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{32} = \left(-\frac{3}{2N} (-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{3}{2N} (-3\beta^{-4} + 2\beta^{-2} + 1) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3N} (-3\beta^2 + 2 + \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{2}{N} (-\beta^{-2} + 2\beta^{-4} - \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{33} = \left(-\frac{3}{N} (1 - \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{N} (\beta^{-2} - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{3N} (3 - 4\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{2}{N} (-1 + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{34} = \left(-\frac{3}{N} (1 - \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{N} (\beta^{-2} - 1) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} - \right. \\ \left. - \frac{1}{6N} (3\beta^2 - 4 + \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{2}{N} (-\beta^{-2} + \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{41} = \left(\frac{3}{2N} (-1 + 2\beta^{-2} - \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{2N} (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{7}{6N} (-3 + 2\beta^{-2} + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 - \frac{1}{2N} (-1 + 2\beta^2 - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{42} = \left(\frac{3}{2N} (-1 + 2\beta^2 - \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{3}{2N} (-3\beta^{-4} + 2\beta^{-2} + 1) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{7}{6N} (-3\beta^{-2} + 2 + \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 + \frac{1}{2N} (\beta^{-2} - 2\beta^{-4} + \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{43} = \left(\frac{3}{N} (1 - \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{N} (\beta^{-2} - \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{7}{6N} (3 - 4\beta^2 + \beta^4) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 - \frac{1}{2N} (-1 + \beta^{-4}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right),$$

$$B_{44} = \left(\frac{3}{N} (1 - \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right) + \frac{1}{N} (\beta^{-2} - 1) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-3} + \right. \\ \left. + \frac{7}{12N} (3\beta^2 - 4 + \beta^{-2}) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^3 - \frac{1}{2N} (-\beta^{-2} + \beta^2) \left(\frac{\alpha_1}{\beta} \right)^{-1} \right).$$

Из (16) и (17) следует, что радиус упругоэластических границ в пластине и включения имеют форму эллипсов, которые при $\delta = 0$ переходят в окружности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Артемов М. А. О двусосном растяжении толстой пластины с круговым отверстием из упрочняющегося упругопластического материала // ПМТФ, 1985. №6. С. 158–163.
- [2] Бицено К. Б., Граммель Р. Техническая динамика / Пер. с нем. Я. И. Перельмана и Е. П. Попова; Под ред. А. И. Лурье. Ленинград; Москва: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1950-1952.
- [3] Горностаев К. К., Ковалев А. В. Об упругопластическом состоянии толстостенной трубы с учетом температуры для сложной модели среды // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика, 2015. №1. С. 135-140.
- [4] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М. : Наука, 1978. 208 с.
- [5] Ковалев А. В. Об учете ассоциированной сжимаемости упругопластических тел в случае плоской деформации // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. №1(15). С. 65–69.
- [6] Ковалев А. В., Русина Е. Ю., Яковлев А. Ю. Об исследовании механического взаимодействия элементов тонкой упругопластической конструкции // В сборнике: Механика предельного состояния и смежные вопросы. Материалы Всероссийской научной школы-конференции, посвященной 85-летию профессора Д. Д. Ивлева, 2015. С. 107–114.
- [7] Ковалев А. В., Спорыхин А. Н., Яковлев А. Ю. Исследование механического взаимодействия элементов различных форм и свойств в системе спрессованных тел // В сборнике: Современные проблемы механики и прикладной математики сборник трудов международной школы-семинара. Ответственный редактор: А. Д. Чернышов, 2004. С. 280–281.
- [8] Марушкой Ю. М. Двусосное растяжение упругопластического пространства с включением. Изв. ВУЗов. Машиностроение, 1975. №12. С. 25–30.
- [9] Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. : Наука, 1966. 707 с.
- [10] Спорыхин А. Н., Ковалев А. В., Щеглова Ю. Д. Неодномерные задачи упруго-вязкопластичности с неизвестной границей. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2004. 219 с.

E. Y. Rusina

**ON THE DETERMINATION OF ELASTOPLASTIC BOUNDARIES IN A THIN
ELASTOPLASTIC STRUCTURE WITH INCLUSION**

Voronezh State University, Voronezh

Abstract. The paper is devoted to the determination of the stress-strain state of a mechanical structure, which consists of a thin infinite elastoplastic plate with a hole and inclusion of a cylindrical shape. The small parameter method is used as the solution method, while the small parameter characterizes the perturbation of external static boundary conditions. In the paper we obtain approximate analytical expression for elastoplastic boundaries in a thin plate with a circular aperture, into which a cylindrical shape incomparably larger in size is pressed in with stress.

Keywords: small parameter, plasticity, elasticity, plainly stresses a conditions, condition of plasticity of Tresca-Saint-Venant.

REFERENCES

- [1] Artemov M. A. O dvuosnom rastyazhenii tolstoj plastiny s krugovym otverstiem iz uprochnyayushchegosya uprugoplasticheskogo materiala // PMTF, 1985. №6. S. 158–163. (in Russian)
- [2] Biceno K. B., Grammel' R. Tekhnicheskaya dinamika / Per. s nem. YA. I. Perel'mana i E. P. Popova; Pod red. A. I. Lur'e. Leningrad; Moskva: Gos. izd-vo tekhn.-teoret. lit., 1950-1952. (in Russian)
- [3] Gornostaev K. K., Kovalev A. V. Ob uprugoplasticheskom sostoyanii tolstostennoj trubyy s uchetom temperaturyy dlya slozhnoj modeli sredy // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika, 2015. №1. S. 135-140. (in Russian)
- [4] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M. : Nauka, 1978. 208 s. (in Russian)
- [5] Kovalev A. V. Ob uchete associirovannoj szhimaemosti uprugoplasticheskikh tel v sluchae ploskoj deformacii // Vestnik CHuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2013. №1(15). S. 65–69. (in Russian)
- [6] Kovalev A. V., Rusina E. YU., YAKovlev A. YU. Ob issledovanii mekhanicheskogo vzaimodejstviya ehlementov tonkoj uprugoplasticheskoy konstrukcii // V sbornike: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya i smezhnye voprosy. Materialy Vserossijskoj nauchnoj shkoly-konferencii, posvyashchennoj 85-letiyu professora D. D. Ivleva, 2015. S. 107–114. (in Russian)
- [7] Kovalev A. V., Sporyhin A. N., YAKovlev A. YU. Issledovanie mekhanicheskogo vzaimodejstviya ehlementov razlichnyh form i svojstv v sisteme spressovanyh tel // V sbornike: Sovremennyye problemy mekhaniki i prikladnoj matematiki sbornik trudov mezhdunarodnoj shkoly-seminara. Otvetstvennyj redaktor: A. D. CHernyshov, 2004. S. 280–281. (in Russian)

Rusina Elena Yuryevna

e-mail: Elena_RS@inbox.ru, Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[8] Marushkej YU. M. Dvuosnoe rastyazhenie uprugoplasticheskogo prostranstva s vklyucheniem. Izv. VUZov. Mashinostroenie, 1975. №12. S. 25–30. (in Russian)

[9] Muskhelishvili N. I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti. M. : Nauka, 1966. 707 s. (in Russian)

[10] Sporyhin A. N., Kovalev A. V., SHCHeglova YU. D. Neodnomernye zadachi uprugovyazkoplastichnosti s neizvestnoj granicej. Voronezh: Izd-vo VGU, 2004. 219 s. (in Russian)