Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 45–51

Л. В. Левина, О. С. Новикова, В. Б. Пеньков, М. В. Поликарпов

ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЛЕГЧЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КРЕПЛЕНИЯ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия

Аннотация. Выполнена оптимизация облегченного элемента крепления с границей в форме гиперболоида в зависимости от нагрузки и радиуса конструкции, обладающего неоднородными жесткостными свойствами. Для анализа напряженно-деформированного состояния использован метод граничных состояний в сочетании с методом возмущений. Полнопараметрическое аналитическое решение, включающее параметры геометрии тела, построено с использованием интерполяционного многочлена Лагранжа.

Ключевые слова: метод граничных состояний, метод граничных состояний с возмущениями, базис состояний; неоднородное тело, дюралюминий, коэффициенты Фурье, интерполяционный многочлен Лагранжа.

УДК: 539.3

Метод граничных состояний [1] (МГС) основан на понятии состояния среды, под которым понимается частное решение определяющих уравнений среды безотносительно к условиям, поставленным на границе тела. Определяющие соотношения в математической модели неоднородного эластостатического тела представлены в тензорно-индексной форме записи:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \qquad \sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{tt}\, \delta_{ij} + 2\,\mu\, \varepsilon_{ij}, \qquad \sigma_{ij,j} + X_i^0 = 0, \tag{1}$$

Левина Любовь Владимировна
`e-mail:` satalkina_lyubov@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.
Новикова Ольга Сергеевна
`e-mail:` _o_l_g_a_@bk.ru, аспирант, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.
Пеньков Виктор Борисович
`e-mail:` vbpenkov@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.
Поликарпов Максим Владимирович
`e-mail:` messiah142@gmail.com, студент, Липецкий государственный технический университет, г. Липецк, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-41-480729 «р_а»).

Поступила 10.11.2017

где u_i,X_i^0– компоненты векторов перемещения и объемных сил, $\sigma_{i\,j}$,$\varepsilon_{i\,j}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций, $\delta_{i\,j}$ – символ Кронекера, λ, μ – неоднородные параметры Ламе. При фиксированных значениях λ, μсовокупность соотношений (1) сводится к системе уравнений Ламе

$$\mu\; u^{+}_{i,j\,j}(\lambda+\mu)\, u^{+}_{j,j\,i}X_i^0=0.$$

Их общее решение построено Папковичем и Нейбером и для ограниченного односвязного тела представляется в форме Аржаных – Слободянского:

$$u_i^{=}4(1-\nu)B_i+x_jB_{i,j}-x_iB_{j,i}, \tag{2}$$

где B_i – компонента произвольного гармонического вектора. Общие решения (2) служит эффективным средством формирования базиса пространства состояний для тела [1].

Понятие состояния среды трансформируется в понятия внутреннего ξ и граничного γ состояний, если речь заходит о конкретном теле V, имеющем границу ∂V:

$$\xi=\{u_i,\,\varepsilon_{i\,j},\sigma_{i\,j}\},\quad \gamma=\{\,u_i|_{\partial V}\,,p_i\}\,.$$

Совокупность всех возможных состояний $\xi \leftrightarrow \gamma$ образует изоморфные гильбертовы пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний со скалярными произведениями

$$\left(\xi^{(k)},\xi^{(m)}\right)_{\Xi}=\int\limits_V \sigma_{i\,j}^{(k)}\,\varepsilon_{i\,j}^{(m)}dV,\quad \left(\gamma^{(k)},\gamma^{(m)}\right)_{\Gamma}=\int\limits_{\partial V} p_i^{(k)}\,u_i^{(m)}dS,$$

которые равны между собой в силу принципа возможных перемещений

$$\left(\xi^{(k)},\xi^{(m)}\right)_{\Xi}=\left(\gamma^{(k)},\gamma^{(m)}\right)_{\Gamma}.$$

После ортогонализации атрибуты результирующих внутреннего и граничного состояний представляются рядами Фурье по элементам ортонормированных базисов:

$$u_i=\sum_k c_k\,u_i^{(k)},\sigma_{i\,j}=\sum_k c_k\,\sigma_{i\,j}^{(k)},\varepsilon_{i\,j}=\sum_k c_k\,\varepsilon_{i\,j}^{(k)},\,u_i|_{\partial V}=\sum_k c_k\,u_i^{(k)}\Big|_{\partial V},\,p_i=\sum_k c_k\,p_i^{(k)}.$$

Проведем декомпозицию определяющих соотношений среды методом возмущений и представим искомые состояния в виде асимптотических рядов по малому параметру β[2] (ниже верхние индексы в круглых скобках указывают на номер итерации):

$$\sigma_{i\,j}=\sigma_{i\,j}^{(0)}+\beta\,\sigma_{i\,j}^{(1)}+...;\quad \varepsilon_{i\,j}=\varepsilon_{i\,j}^{(0)}+\beta\,\varepsilon_{i\,j}^{(1)}+...;\quad u_i=u_i^{(0)}+\beta\,u_i^{(1)}+...;\quad X_i=X_i^0+\beta\,X_i^{(1)}+....$$

Тогда исходные соотношения эквивалентны бесконечной последовательности линейных систем уравнений

$$\begin{gathered}\varepsilon_{i\,j}^{(k)}=\tfrac{1}{2}\left(u_{i,j}^{(k)}+u_{j,i}^{(k)}\right),\;\; s_{i\,j}^{(k)}=\lambda_0\,\varepsilon_{tt}^{(k)}\,\delta_{i\,j}+2\,\mu_0\,\varepsilon_{i\,j}^{(k)},\;\; s_{i\,j,j}^{(k)}+X_i^{(k)}=0,\\ X_i^{(k)}=\left(\lambda_1\varepsilon_{tt}^{(k-1)}\delta_{i\,j}+2\mu_1\,\varepsilon_{i\,j}^{(k-1)}\right)_{,j}\,,\end{gathered} \tag{3}$$

где $s_{i\,j}^{(k)}$ выполняет роль компоненты тензора напряжений и находится по решении задачи итерации k. При однородном коэффициенте ν и слабой неоднородности модуля сдвига $\mu = \mu_0 + \beta\mu_1$ модуль объемного расширения получает аналогичное представление $\lambda = \lambda_0 + \beta\lambda_1$, поскольку $\lambda_m = 2\nu\mu_m/(1-2\nu)$, $m = 1, 2$. Для задачи каждого приближения справедливо общее решение (2), которое обеспечивает способ построения базиса пространства внутренних состояний. Совокупность соотношений (1) определяет последовательность задач, решением которых должны явиться поля, соответствующие итерациям. По решении задачи итерации k восстанавливается тензор напряжений:

$$\sigma_{ij}^{(k)} = s_{ij}^{(k)} + \lambda_1\varepsilon_{tt}^{(k-1)}\delta_{ij} + 2\mu_1\,\varepsilon_{ij}^{(k-1)}.$$

Методом граничных состояний с возмущениями [3] в безразмерной постановке решена первая основная задача теории упругости для внутренности пяти неоднородных упругих гиперболоидов, выполненных из поверхностно упрочненного дюралюминия с параметрами

$$\mu_k = \mu_0 + \beta\mu_1,\ \ \nu = 0.34,\ \ \mu_0 = 1,\ \ \mu_1 = \frac{x^2+y^2}{R_n^2+z^2},\qquad R_n = \left\{\frac{19}{20}, \frac{17}{20}, \frac{3}{4}, \frac{13}{20}, \frac{11}{20}\right\},$$

где R_n– радиус торца гиперболоида в варианте n. Заложенная в μ_1 неоднородность достигается средствами приповерхностного упрочнения материала. Во всех вариантах безразмерная высота тела равна 2. Граничные условия на боковой поверхности S_1 и торцах S_2, S_3таковы:

$$p|_{S_1} = \{0,0,0\}\,,\quad p|_{S_2} = \{0,\,0,\,0.01\}\,,\quad p|_{S_3} = \{0,\,0,\,-0.01\}\,.$$

В задаче требовалось восстановить напряженно-деформированное состояние (НДС) тел (рис. 1).

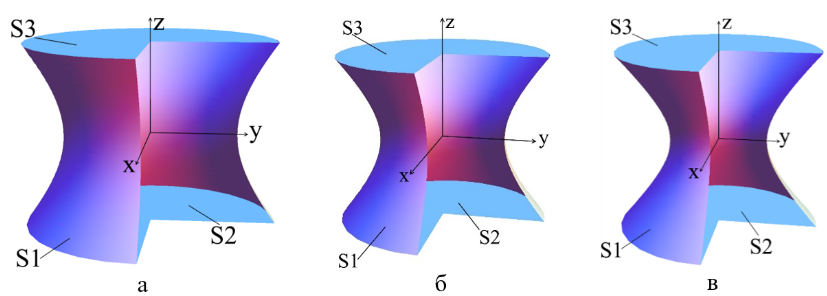


Рис. 1. Гиперболоид: а)$R = \frac{19}{20}$, б)$R = \frac{15}{20}$, в)$R = \frac{11}{20}$

Выполнены расчеты при $\beta = 0.2$ (20-процентное упрочнение на боковой поверхности) для трех итераций. Характеристики, отвечающие за напряженно-деформированное состояние, имеют форму аналитических выражений, но из-за их визуальной необозримости здесь не приведены. Для краткости в табл.1 представлены изолинии напряжений (обладают 2-ной симметрией), построенные в сечении $y = 0$.

Чтобы построить полнопараметрическое аналитическое решение [4], зависящее от радиуса торца гиперболоида, использовался интерполяционный многочлен Лагранжа

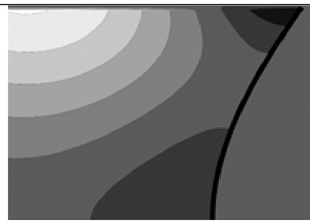
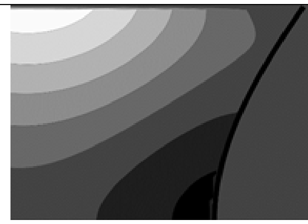
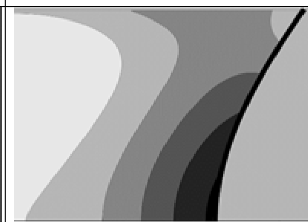
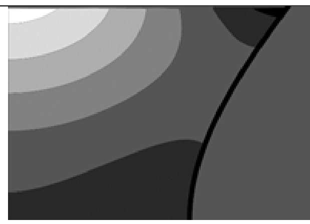
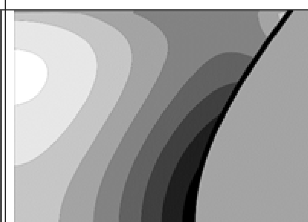
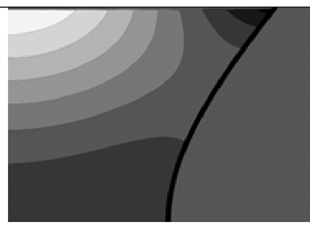
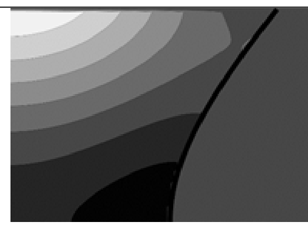
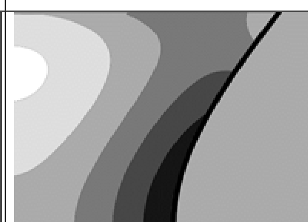
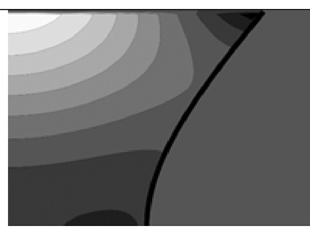
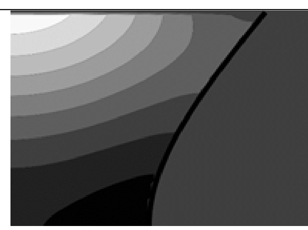
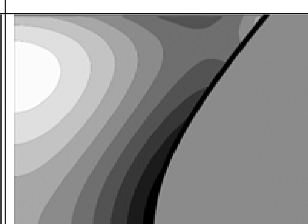
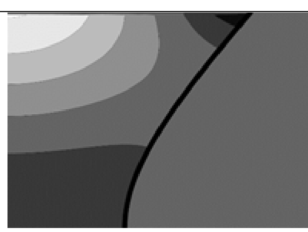
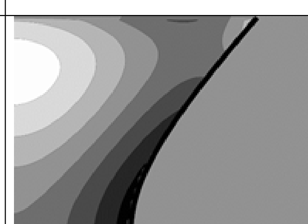
R	σ_{xx}	σ_{yy}	σ_{zz}
$\frac{19}{20}$			
$\frac{17}{20}$			
$\frac{3}{4}$			
$\frac{13}{20}$			
$\frac{11}{20}$			

Таблица 1. Результаты решения задач

$$\xi(R) = \sum_{n=0}^{N} \xi_n l_n(R), \quad l_n(R) = \prod_{j=0, j\neq n}^{N} \frac{R - R_j}{R_n - R_j} \tag{4}$$

График на рис. 2 отображает невязку $\tau(R)$. сопоставляющую тензоры напряжений, построенные двумя способами: 1) непосредственная аппроксимация пяти полей тензоров напряжений; 2) построение тензоров напряжений через соотношения (1) по результатам аппроксимации полей перемещений. Вертикальная шкала свидетельствует о допустимости отклонения.

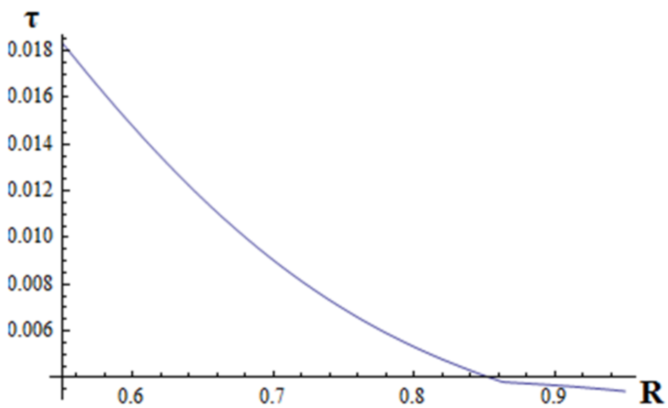


Рис. 2. Невязка лагранжевой аппроксимации

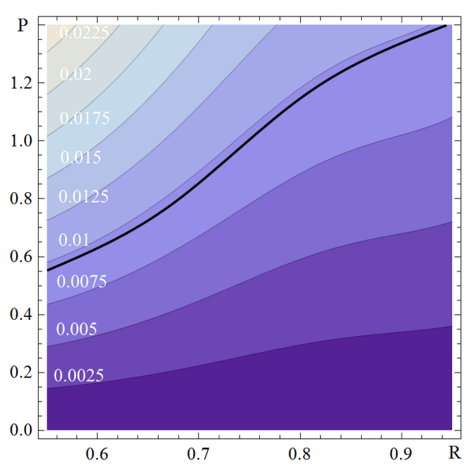


Рис. 3. Распределение $\sigma_{\max}$ в плоскости параметров

Проведена процедура обезразмеривания типового значения предела текучести дюралюминия, которое составляет величину порядка 250 Мпа, а справочное значение модуля сдвига равно 27 ГПа: $\sigma_T = \sigma_T^0/\mu_0$. Согласно теории предельного упругого состояния Губера – Мизеса интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \frac{p}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2+6(\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{xz}^2)}$$

не может превышать предела текучести:

$$\sigma_i \leq \sigma_T. \tag{5}$$

В этой связи интерес представляет именно максимальное по области V значение интенсивности напряжений

$$\sigma_{\max}(R,p) = \max_{x\in V} \sigma_i(x,R,p).$$

Зависимость $\sigma_{\max}$ от варьируемых безразмерных параметров p, R приведена на рис. 3 изолиниями. Жирной линией отмечена кривая, отвечающая предельно допустимому значению σ_T. Наличие аналитического полнопараметрического решения позволяет проводить параметрическую оптимизацию без промежуточных громоздких численных операций и занимает по времени считанные секунды.

Любая пара значений усилий и радиуса торца гиперболоида, лежащая ниже кривой отмеченной на графике, сохранит конструкцию в рабочем состоянии. Значения, находящиеся выше, приведут к разрушению элементов крепления. Эта информация позволяет инженерам-конструкторам назначать геометрические параметры элементов, обеспечивая устраивающий их запас прочности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Пеньков В. Б., Пеньков В.В. Метод граничных состояний для решения задач линейной механики. // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т.2, №2. С. 115–137.

[2] Пеньков В. Б., Саталкина Л. В., Кузьменко Н. В. Решение задач изотропной теории упругости при наличии массовых непрерывных сил // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики». Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 259–265.

[3] Пеньков В. Б., Левина Л. В., Поликарпов М. В. Упругое состояние неоднородных конструкционных элементов // Потенциал современной науки. 2015. № 3. С. 7–13.

[4] Новикова О. С. Построение полнопараметрических аналитических решений основных смешанных задач эластостатики для обеспечения технологических процессов обработки давлением // Проблемы и перспективы развития машиностроения. Сб. научных трудов МНТК, посвященной 60-летию Липецкого ГТУ. Ч.2. 17-18 ноября 2016 г. Липецк: ЛГТУБ2016. С. 203–207.

L. V. Levina, O. S. Novikova, V. B. Penkov, M. V. Polikarpov

OPTIMIZATION OF LIGHTWEIGHT FASTENING ELEMENTS AT A VARIATION OF GEOMETRICAL PARAMETERS

Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia

Abstract. Optimization of a lightweight fastening element with a hyperboloid-shaped boundary, depending on the load and the radius of the structure, having heterogeneous stiffness properties, is performed. Method of boundary states in combination with the method of perturbation is used to analyze of the stress-strain state of a heterogeneous element of construction. A full parametrical analytic solution, including parameters of body geometry is built on the Lagrange interpolation polynomial.

Keywords: method of boundary states, method of boundary states with perturbation; basis of states, heterogeneous body, duraluminium, coefficients of Fourie, Lagrange interpolation polynomial.

REFERENCES

[1] Pen'kov V. B., Pen'kov V. V. Metod granichnyh sostojanij dlja reshenija zadach linejnoj mehaniki. // Dal'nevostochnyj matematicheskij zhurnal. 2001. T.2, №2. S.115–137. (in Russian)

[2] Pen'kov V. B., Satalkina L. V., Kuz'menko N.V. Reshenie zadach izotropnoj teorii uprugosti pri nalichii massovyh nepreryvnyh sil //Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Sovremennye problemy matematiki, mehaniki, informatiki". Tula: Izd-vo TulGU, 2014. S. 259–265. (in Russian)

[3] Pen'kov V. B., Levina L. V., Polikarpov M. V. Uprugoe sostoyanie neodnorodnyh konstrukcionnyh ehlementov // Potencial sovremennoj nauki. 2015. № 3. S. 7–13. (in Russian)

[4] Novikova O. S. Postroenie polnoparametricheskih analiticheskih reshenij osnovnyh smeshannyh zadach ehlastostatiki dlya obespecheniya tekhnologicheskih processov obrabotki davleniem // Problemy i perspektivy razvitiya mashinostroeniya. Sb. nauchnyh trudov MNTK, posvyashchennoj 60-letiyu Lipeckogo GTU. CH.2. 17–18 noyabrya 2016 g. Lipeck: LGTUB2016. S. 203–207. (in Russian)

Levina Lyubov Vladimirovna,
`e-mail:` satalkina_lyubov@mail.ru, Ph. D. Phys. & Math., Associate Professor, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.
Novikova Olga Sergeevna,
`e-mail:` _o_l_g_a_@bk.ru, graduate student, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.
Penkov Viktor Borisovich,
`e-mail:` vbpenkov@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.
Polikarpov Maxim Vladimirovich,
`e-mail:` messiah142@gmail.com, student, Lipetsk state technical university, Lipetsk, Russia.