Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 66–73

В. А. Кадымов

ПЛАСТИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ С НЕОДНОРОДНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПО ТОЛЩИНЕ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследуются задачи течения тонкого пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине. Обсуждается условие, при выполнении которого пластическое течение происходит во всем кусочно-однородном слое. Решена осесимметричная задача об осадке биметаллического слоя в кольцевой области , для которой выписаны поля скоростей и контактного давления , найдено общее усилие, потребное для осуществления процесса пластической осадки.

Ключевые слова: растекание тонкого пластического слоя, пластическая осадка, осесимметричная задача.

УДК: 539.3

Теория течения в тонком пластическом слое (ТТТПС) получила развитие на горячие процессы [1,2]. Исследована плоская задача о сжатии предварительно нагретой полосы холодными внешними телами. В результате интенсивного теплообмена образуются приконтактные слои затвердевания. Для определения истинной границы течения используется принцип минимума мощности внешних сил. В работе [3] получено решение плоской задачи об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине($\tau_s = \tau_s(z)$)в изотермической постановке. В [4] решена плоская задача о пластическом сжатии трехслойной полосы с кусочно-однородными и симметричными свойствами по толщине. В [5] решена задача Прандтля для слабо неоднородного по пределу текучести пластического слоя.

1. Ниже ставится и решается плоская задача о сжатии двухслойной биметаллической полосы в рамках модели жесткопластического тела (рис.1). Предположим, что пластическое течение происходит только в “мягком” слое, а второй слой при этом остается жестким.

Выпишем замкнутую систему уравнений краевой задачи:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0; \qquad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Кадымов Вагид Ахмедович
`e-mail:` vkadymov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Поступила 05.10.2017

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4\tau_{s1}^2, \tag{2}$$

$$\frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Краевые условия задачи:

$$z = 0: \qquad \sigma_{xz} = \tau_{s1}; \qquad v = 0 \tag{5}$$

$$z = h_1(t): \qquad \sigma_{xz} = -\tau_{s1}; \qquad v = -v_0 = \frac{dh_1}{dt} \tag{6}$$

Кроме того, необходимо поставить краевые условия на неизвестной свободной границе $F(x, z, t) = 0$, которая в начальный момент задана уравнением $F(x, z, t_0) \equiv l_0 - x = 0$.

В рассматриваемом случае, при котором течение наблюдается в одном слое, остается в силе решение плоской задачи об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине ($\tau_s = \tau_s(z)$) в изотермической постановке [3]:

$$\sigma_{xz} = az + b, \qquad \sigma_{zz} = -ax - c_0, \qquad \sigma_{xx} = -ax - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - (az+b)^2}\ ,$$

$$v = -v_0 \tfrac{z}{h}, \qquad u = v_0 \left(\frac{x}{h} + \frac{2}{h} \int\limits_0^z \frac{az+b}{\sqrt{\tau_s^2(z) - (az+b)^2}} dz + c_1 \right),$$

в котором надо положить $\tau_s(z) \equiv \tau_{s1} = const$.

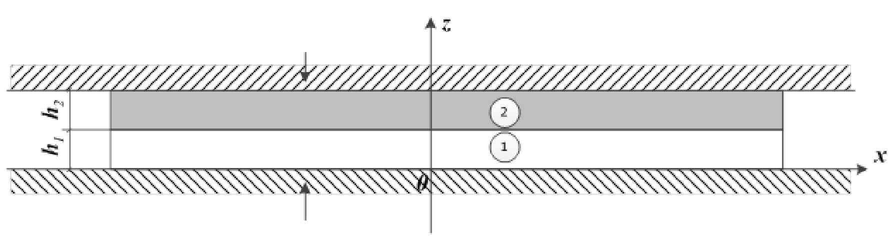

Рис. 1. Пластическая осадка биметаллической полосы

Постоянные a, bопределяются из следующих краевых условий:

$$\begin{aligned} z = 0: &\qquad \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b, \\ z = h_1: &\qquad -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot h_1 + b, \end{aligned}$$

из которых получаем:

$$b = \tau_{s1}, \qquad a = -\tfrac{2\tau_{s1}}{h_1}$$

Постоянная c_0 находится из интегрального условия на свободной границе $x = \bar{l}$, ($\bar{l} = \frac{l_0 h_0}{h(t)}$ – условная средняя граница):

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xx} dz = 0,$$

откуда нетрудно убедиться, что:

$$c_0 = \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1}\left(1 + \frac{\pi}{4}\frac{h_1}{\bar{l}}\right) \approx \tau_{s1}\left(\frac{2\bar{l}}{h_1}\right),$$

при этом мы учли условие тонкости слоя ($h/\bar{l} << 1$).

Следовательно, поле напряжений имеет вид:

$$\begin{array}{c} \sigma_{xz} = \tau_{s1}(-\frac{2z}{h_1} + 1), \qquad \sigma_{zz} = \frac{2\tau_{s1}}{h_1}x - c_0, \\ \sigma_{xx} = \frac{2\tau_{s1}}{h_1}x - c_0 + 2\tau_{s1}\sqrt{1 - (-\frac{2z}{h_1} + 1)^2} \end{array} \tag{7}$$

Теперь можем найти общее потребное усилие для осуществления процесса пластической осадки:

$$Q_{(1)} = \left|\int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \sigma_{zz} dx\right| = \left|\int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \left(\frac{2\tau_{s1}}{h_1}x - c_0\right)dx\right| = c_0 2\bar{l} = \ = \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1}(2\bar{l})(1+\frac{\pi}{4}\frac{h_1}{\bar{l}}) \sim \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1}(2\bar{l}) \tag{8}$$

Итак, в рассматриваемом случае, при котором течет только “мягкий” слой, определили напряжения (7), а также величину потребного усилия Q. Кроме того, как нетрудно заметить, имеет место условие (9),при котором прямая II располагается ниже прямой I (рис. 2):

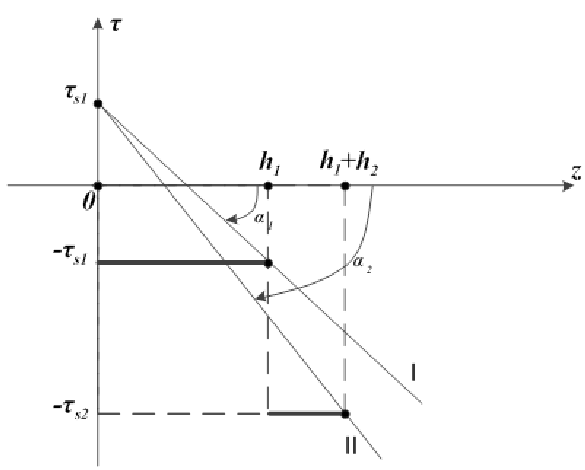

Рис. 2. Пластическое течение в двухслойной полосе

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_1} < \frac{\tau_{s1+}\tau_{s2}}{h_1+h_2}, \tag{9}$$

которое подтверждает выполнимость условия [1], при выполнении которого течение происходит только в “мягком” слое. Таким образом, в результате осадки пластического слоя уменьшается h_1 до некоторого значения h_{10} такого, что:

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_{10}} = \frac{\tau_{s1+}\tau_{s2}}{h_{10}+h_2}, \tag{10}$$

и в дальнейшем пластическое течение распространяется на весь объем двухслойной полосы.

Предположим теперь, что течет вся полоса. Для этого случая можем принять решение (7), в котором надо положить:

$$\tau_s(z) = \left\{ \begin{array}{cc} \tau_{s1}, & 0 < z < h_1, \\ \tau_{s2}, & h_1 < z < h_1 + h_2 \equiv h, \end{array} \right. ; \qquad \tau_{s1} \leq \tau_{s2}. \tag{11}$$

Аналогично тому, что мы проделали в предыдущем случае, найдем постоянные a, b из соответствующих условий на контакте:

$$\begin{array}{rl} z = 0: & \quad \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b, \\ z = h_1 + h_2: & \quad -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot (h_1 + h_2) + b, \end{array} \tag{12}$$

из которых следует, что:

$$b = \tau_{s1}, \qquad a = -\tfrac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2} \tag{13}$$

Напряжения в области течения принимают вид:

$$\begin{array}{c} \sigma_{xz} = -\left(\tfrac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}\right) z + \tau_{s1}, \qquad \sigma_{zz} = \tfrac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2} x - c_0, \\ \sigma_{xx} = \tfrac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2} x - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - (-\tfrac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2} z + \tau_{s1})^2} \end{array} \tag{14}$$

В рассматриваемом случае прямая II располагается выше прямой I (рис.3), то есть:

$$\frac{\tau_{s1+}\tau_{s2}}{h_1+h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1} \tag{15}$$

Утверждение 1. Условия (9), (12) в точности совпадают с условием, выведенным в [1] из **принципа минимума мощности внешних сил**:
истинному положению границы течения (неоднородного по толщине пластического слоя) в данном состоянии соответствует минимум мощности, потребной для протекания процесса. При заданном законе сближения плит минимуму мощности отвечает условие минимума внешних усилий.

Для подтверждения приведенного выше утверждения достаточно вычислить потребное усилие сжатия полосы относительно второго случая, при котором течет вся биметаллическая полоса:

$$Q_{(2)} = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-\bar{l}}^{\bar{l}} \left(\frac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2} x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2\bar{l}. \tag{16}$$

Найдем постоянную интегрирования c_0, входящую в (13):

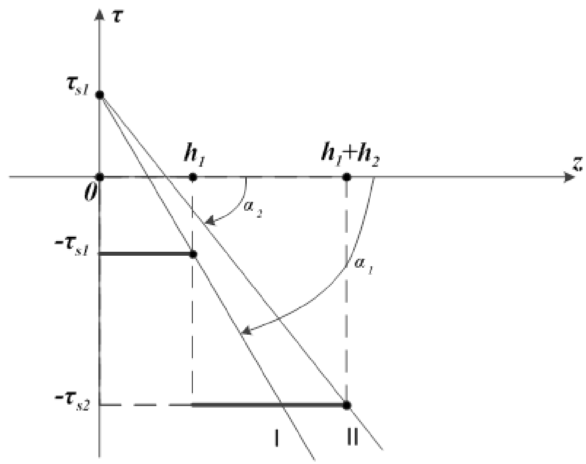

Рис. 3. Пластическое течение в двухслойной полосе

$$\int\limits_{0}^{h_1+h_2} \sigma_{xx}(x=\bar{l},z)dz = 0, \tag{17}$$

$$\int\limits_{0}^{h_1} (\frac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}\bar{l} - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - (-\frac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}z+\tau_{s1})^2})dz = 0, \tag{18}$$

$$c_0 = \frac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}\bar{l}(1+O({}^{h}\!/_{\bar{l}})) \sim \frac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}\bar{l},$$

где $O({}^{h}\!/_{\bar{l}})$- бесконечно-малая одного порядка с ${}^{h}\!/_{\bar{l}}$.

Подставим последнее выражение в (13):

$$Q_{(2)} = 2\bar{l}(\frac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}\bar{l})(1+O({}^{h}\!/_{\bar{l}})) \sim 2\bar{l}(\frac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}\bar{l}) \tag{19}$$

Из (8) и (14) видно, что случаю пластического течения всей биметаллической полосы отвечает условие (12), которое, в свою очередь, совпадает с условием минимума внешних сил.

Преобразуем условие (12):

$$(\tau_{s1+}\tau_{s2})\,h_1 < 2\tau_{s1}\,(h_1+h_2)\,,$$

или разделив последнее на$\tau_{s1}h_2$, получим:

$$(h_1/h_2) < \frac{2}{(\tau_{s2}/\tau_{s1})-1} \tag{20}$$

Из соотношения (15) можем сделать следующий вывод. Примем, что $\tau_{s1}, \tau_{s2}, h_1$заданы. Тогда (15) налагает ограничения на h_2: чем разнороднее материалы слоев, тем большим следует принять относительную толщину слоя, имеющего больший предел текучести.

2. В предыдущем разделе мы представили метод определения истинного положения границы течения неоднородного по толщине тонкого пластического слоя. А теперь, зная границу области течения, можем приложить сказанное к решению задач о пластическом сжатии многослойных пластин. В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу о пластическом сжатии биметаллической пластины (рис.4) в плане формы кольца ($a \leq r \leq b$), у которого внутренний конец остается неизменным (затекание в пазы в одном из тел инструмента), а внешний контур свободно растекается ($b = b(t)$).

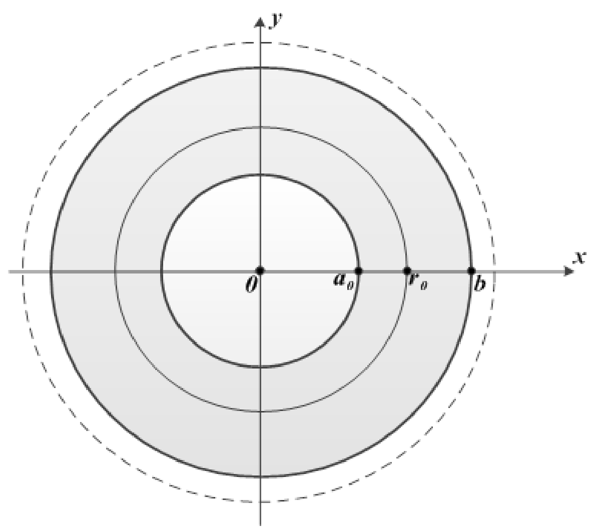

Рис. 4. Пластическая осадка тонкой пластины в плане формы кольца

Предположим, что пластическое течение происходит во всем объеме так, что выполняется условие:

$$\frac{\tau_{s1+}\tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1} \tag{21}$$

Отметим, что граница раздела двух пластических сред $h_1(t) \equiv z(t) = \frac{h_{10}}{h_{10}+h_{20}} h(t)$ определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\tfrac{dz}{dt} = \tfrac{1}{h}\tfrac{dh}{dt} z; \qquad z(t = t_0) = h_{10}; \qquad 0 \leq z \leq . \ h_1 + h_2. \tag{22}$$

Воспользуемся упрощенной постановкой задач ТТТПС. Выпишем основные соотношения задачи в полярной системе координат:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mp \frac{\tau_{s1+}\tau_{s2}}{h_1 + h_2}; \qquad \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} = \frac{d\lambda}{dt}, \tag{23}$$

$$r = a_0 : p = \frac{\sigma_{s1} h_1 + \sigma_{s2} h_2}{h_1 + h_2}; \qquad r = b(t) : p = 2(\frac{\sigma_{s1} h_1 + \sigma_{s2} h_2}{h_1 + h_2}) \tag{24}$$

Интегрируя уравнение равновесия (17) со стороны внутренней, а затем внешней границы области, и, приравнивая найденные значения контактного давления, определим из условия непрерывности неизвестную линию ребра поверхности давлений (линию ветвления течения) $r = r_0$:

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}\right)(r_0 - a_0) - 2\sqrt{3}\left(\tfrac{\tau_{s1}h_1+\tau_{s2}h_2}{h_1+h_2}\right) = \\ &= \left(\tfrac{\tau_{s1}+\tau_{s2}}{h_1+h_2}\right)(b - r_0) - \sqrt{3}\left(\tfrac{\tau_{s1}h_1+\tau_{s2}h_2}{h_1+h_2}\right), \end{aligned} \tag{25}$$

откуда с точностью до h/Lполучаем:

$$r_0 = \frac{1}{2}(b(t) + a_0) \tag{26}$$

Интегрируя уравнение несжимаемости (17) с учетом условия на ребре $w\,(r = r_0) = 0$, находим:

$$w(r) = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dt}\left(r - \frac{r_0^2}{r}\right). \tag{27}$$

Теперь с учетом условия (20) можем найти закон изменения свободной границы из решения задачи Коши:

$$w\,(b) = \frac{db}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dt}\left(b - \frac{r_0^2}{b}\right) = \frac{(3b + a_0)\,(b - a_0)}{8b}; \qquad b\,(t = t_0) = b_0. \tag{28}$$

В результате получаем в неявном виде зависимость $b = b\,(t)$:

$$8\int \frac{db}{3b + a_0} + 8a_0 \int \frac{db}{(3b + a_0)\,(b - a_0)} = \int d\lambda, \tag{29}$$

$$\left(\frac{3b + a_0}{3b_0 + a_0}\right)^{2/3}\left(\frac{b - a_0}{b_0 - a_0}\right)^2 = e^{\lambda(t)} = \frac{h_0}{h(t)} \tag{30}$$

Выпишем теперь значение максимального контактного давления в точках ребра:

$$p_{\max} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\,(r_0 - a_0) - 2\sqrt{3}\left(\frac{\tau_{s1}h_1 + \tau_{s2}h_2}{h_1 + h_2}\right) \approx \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h(t)}\left(\frac{b(t) - a_0}{2}\right). \tag{31}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильюшин А. А. Труды (1946-1966). Т.2 Пластичность. М.:Физматлит, 2004. 480 с.
[2] Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
[3] Кузнецов А. И. //Archiwum Mech.Stos. 1960. №12(1960). P. 163–171.
[4] Kadymov V., Wille R. // ZAMM. 1995. V. 75. №S1. P. 293–294.
[5] Георгиевский Д. В. Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя // Изв. РАН. МТТ. 2006. №1. С.47–59.

V. A. Kadymov

PLASTIC FLOW IN A THIN LAYER WITH NON-UNIFORM PROPERTIES ON THE THICKNESS

Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia

Abstract. The problem of flow of a thin plastic layer with non-uniform properties on the thickness is discussed in the paper. The condition of providing the plastic flow for all piecewise-homogeneous layer is investigated. The axisymmetric problem of compression of a bimetallic layer in the annular region is solved. The velocities, contact pressures and the total required force for the plastic compression of the layer are obtained.

Keywords: spreading of a thin plastic layer, plastic sediment, axisymmetric problem.

REFERENCES

[1] Ilyushin A. A. Trudy (1946-1966). T.2 Plastichnost'. M.:Fizmatlit, 2004. 480 s. (in Russian)

[2] Kiyko I. A. Teoriya plasticheskogo techeniya. M.: MGU, 1978. 75 s. (in Russian)

[3] Kuznetsov A. I.//Archiwum Mech.Stos. 1960. 2. P. 163–171.

[4] Kadymov V., Wille R. // ZAMM. 1995. V.75. № 1. P. 293–294. (in Russian)

[5] Georgiyevskiy D. V. Zadacha Prandtlya dlya slaboneodnorodnogo po predelu tekuchesti plasticheskogo sloya // Izv. RAN. MTT. 2006. №1. S. 47–59. (in Russian)

Kadimov Vagid Ahmedovich,
`e-mail:` vkadymov@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia.