

С. В. Матвеев<sup>1</sup>, А. Н. Матвеева<sup>2</sup>, С. В. Тихонов<sup>1</sup>

## РАВНОМЕРНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ТОНКОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ВКЛЮЧЕНИЕМ, ПРИ УСЛОВИИ СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТРЫВУ

<sup>1</sup> Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары

<sup>2</sup> Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары

**Аннотация.** В работе рассматривается упругопластическое состояние тонкой пластины с круговым отверстием, подкрепленной включением. Пластина подвергается равномерному растяжению. Материал пластины и включения различен и имеет разные свойства анизотропии и сопротивления отрыву. В работе определено напряженное состояние пластины и найдена граница между упругой и пластической областями.

**Ключевые слова:** пластичность, упругость, линеаризация, напряжение, отрыв, анизотропия

УДК: 539.374

Рассмотрим бесконечную кольцевую анизотропную идеальнопластическую пластину подкрепленную круговым включением с отверстием радиуса  $a$  (рис. 1). Области  $I$  соответствует включение, области  $II$  материал пластины. Начало координат совпадает с центром окружности и включения. Константа отрыва для материала включения равна  $p_1$ , константа отрыва для материала пластины –  $p_2$ . Пластина находится в состоянии равномерного растяжения.

Условие пластичности для материала включения и пластины примем в виде

$$(A_n \sigma_x - p_n)(B_n \sigma_y - p_n) - C_n \tau_{xy}^2 = 0, \quad A_n, B_n, C_n, p_n = const, \quad (1)$$

где  $A_n, B_n, C_n$  – константы анизотропии области  $n$ ,  $p_n$  – константа сопротивления отрыву области  $n$ .

---

© Матвеев С. В., Матвеева А. Н., Тихонов С. В., 2017

*Матвеев Сергей Владимирович*

**e-mail:** sergio2100@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары.

*Матвеева Алена Николаевна*

**e-mail:** goshtova@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары.

*Тихонов Сергей Владимирович*

**e-mail:** strangcheb@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары.

Поступила 11.12.2017

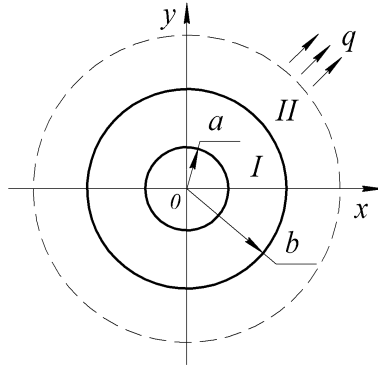


Рис. 1.

Перейдем к полярной системе координат. Связь между напряжениями в декартовой системе координат  $xy$  и напряжениями в полярной системе координат  $\rho\theta$  имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta + \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \sigma_y &= \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{2} - \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \cos 2\theta - \tau_{\rho\theta} \sin 2\theta, \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{2} \sin 2\theta + \tau_{\rho\theta} \cos 2\theta.\end{aligned}\quad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$\begin{aligned}A_n B_n (\sigma_\rho + \sigma_\theta)^2 - (\sigma_\rho - \sigma_\theta)^2 \left( \frac{A_n B_n + C_n}{2} + \frac{A_n B_n - C_n}{2} \cos 4\theta \right) - \\ - 2\tau_{\rho\theta}^2 (A_n B_n + C_n + (C_n - A_n B_n) \cos 4\theta) - 2\tau_{\rho\theta} (\sigma_\rho - \sigma_\theta) \times \\ \times (A_n B_n - C_n) \sin 4\theta - 2(\sigma_\rho - \sigma_\theta) (A_n - B_n) p_0 \cos 2\theta - \\ - 4\tau_{\rho\theta} (A_n - B_n) p_n \sin 2\theta - 2(\sigma_\rho + \sigma_\theta) (A_n + B_n) p_n = -4p_n^2.\end{aligned}\quad (3)$$

Все величины, имеющие размерность напряжения будем считать безразмерными, отнесенными к величине предела текучести  $k$ , а величины, имеющие размерность длины, – к радиусу пластической зоны  $\rho_s^0$ .

В дальнейшем положим

$$A_n = 1 + \delta a_n, \quad B_n = 1 + \delta b_n, \quad C_n = 1 + \delta c_n, \quad \alpha = \frac{a}{\rho_s^0}, \quad \beta = \frac{b}{\rho_s^0}, \quad (4)$$

где  $a_n, b_n, c_n$  – константы анизотропии,  $a$  – радиус отверстия,  $b$  – радиус включения,  $\delta$  – малый безразмерный параметр.

В исходном нулевом приближении при  $\delta = 0$ ,  $A_n = B_n = C_n = 1$  соотношение (3) имеет вид

$$(\sigma_{\rho n} - p_n)(\sigma_{\theta n} - p_n) - \tau_{\rho\theta n}^2 = 0, \quad p_n = \text{const.} \quad (5)$$

Решение будем искать аналогично работам [1-5], полагая

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \delta \sigma_{ij}^{(I)} + \delta^2 \sigma_{ij}^{(II)} + \dots \quad (6)$$

Положим

$$\tau_{\rho\theta n}^{(0)} = 0. \quad (7)$$

Припишем компонентам напряжения в пластической зоне индекс “ $p$ ” наверху, а упругой – индекс “ $e$ ” наверху.

В нулевом приближении из (3 – 7) получим

$$\sigma_{\theta n}^{(0)p} = p_n. \quad (8)$$

Уравнения равновесия в первом приближении для обеих областей имеют вид

$$\frac{d\sigma_{\rho n}^{(0)}}{d\rho} + \frac{\sigma_{\rho n}^{(0)} - \sigma_{\theta n}^{(0)}}{\rho} = 0. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1 - \frac{C_1}{\rho}. \quad (10)$$

Контур отверстия свободен от усилий, т. е.  $\sigma_{\rho 1} = 0$  при  $\rho \geq \alpha$ . Найдем константу  $C_1$  из условия  $\sigma_{\rho 1} = 0$  при  $\rho = \alpha$ . Тогда соотношение (10) можно переписать в виде

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right). \quad (11)$$

Таким образом, компоненты напряжения в пластической области в исходном нулевом состоянии для первой области имеют вид

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = p_1 \left(1 - \frac{\alpha}{\rho}\right), \quad \sigma_{\theta 1}^{(0)p} = p_1, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(0)p} = 0. \quad (12)$$

Определим компоненты напряжений для второй области в нулевом приближении. Из (8), (9) следует

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} = p_2 - \frac{C_2}{\rho}. \quad (13)$$

Значение коэффициента  $C_2$  определим из условий сопряжения компонент напряжения на границе включения

$$\sigma_{\rho 1}^{(0)p} = \sigma_{\rho 2}^{(0)p}, \quad \text{при } \rho = \beta. \quad (14)$$

Используя выражения (7), (8), (11), (13) получим компоненты напряжений в нулевом приближении для второй области

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} = p_2 \left(1 - \frac{\beta}{\rho}\right) + \frac{p_1(\beta - \alpha)}{\rho}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = p_2, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(0)p} = 0. \quad (15)$$

Напряжения в упругой области в нулевом приближении запишем в виде

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = q - \frac{F}{\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = q + \frac{F}{\rho^2}, \quad F - const. \quad (16)$$

Условие сопряжения компонент напряжения во второй области на упругопластической границе будет иметь вид

$$\sigma_{\rho 2}^{(0)p} = \sigma_{\rho}^{(0)e}, \quad \sigma_{\theta 2}^{(0)p} = \sigma_{\theta}^{(0)e}, \quad \rho = 1. \quad (17)$$

Из (15) – (17) получим выражения для компонент напряжений в упругой области

$$\sigma_{\rho}^{(0)e} = q - \frac{p_2\beta - p_1(\alpha + \beta)}{2\rho^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(0)e} = q + \frac{p_2\beta - p_1(\alpha + \beta)}{2\rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(0)e} = 0. \quad (18)$$

Радиус упругопластической границы определим из соотношений (4), (15), (17) и (18)

$$\rho_s^0 = \frac{b(p_2 - p_1) - ap_1}{2(p_2 - q)}. \quad (19)$$

В первом приближении из (3), (4) (6), с учетом (7), (12), (15) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta 1}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_1}{8\rho}(a_1 + b_1 - c_1) \cos 4\theta + \frac{p_1}{2}(a_1 - b_1) \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8\rho}(a_1 + b_1 - c_1) - \frac{p_1}{2}(a_1 + b_1), \\ \sigma_{\theta 2}^{(I)p} &= -\left(\frac{\beta}{\rho}(p_2 - p_1) + \frac{p_2\alpha}{\rho}\right) \frac{(a_2 + b_2 - c_2)}{8} \cos 4\theta + \\ &\quad + \frac{p_2(a_2 - b_2)}{2} \cos 2\theta - \frac{p_2(a_2 + b_2)}{2} + \left(\frac{\beta}{\rho}(p_2 - p_1) + \frac{p_2\alpha}{\rho}\right) \frac{(a_2 + b_2 - c_2)}{8}. \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнения равновесия в первом приближении записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\rho}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{\rho}^{(I)} - \sigma_{\theta}^{(I)}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(I)}}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{\rho\theta}^{(I)}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Уравнениям равновесия удовлетворим, полагая

$$\sigma_{\rho}^{(I)} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta}^{(I)} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2}, \quad \tau_{\rho\theta}^{(I)} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \quad (22)$$

Для первой области из (20), (22) получим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \left[ -\frac{\alpha p_1}{8}(a_1 + b_1 - c_1)\rho(\ln \rho - 1) + C_1\rho + C_2 \right] \cos 4\theta + \\ &\quad + \left[ \frac{p_1\rho^2}{4}(a_1 - b_1) + C_3\rho + C_4 \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8}(a_1 + b_1 - c_1)\rho(\ln \rho - 1) - \frac{p_1\rho^2}{4}(a_1 + b_1) + C_5\rho + C_6. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22), (23) следует

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho}^{(I)p} &= \left[ \frac{15\alpha p_1}{8}(a_1 + b_1 - c_1) \frac{\ln \rho}{\rho} - \frac{2\alpha p_1(a_1 + b_1 + c_1) + 15C_1}{\rho} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{16C_2}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \left[ \frac{p_1}{2}(a_1 - b_1) + \frac{3C_3}{\rho} + \frac{4C_4}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8}(a_1 + b_1 - c_1) \frac{\ln \rho}{\rho} - \frac{p_1}{2}(a_1 + b_1) + \frac{C_5}{\rho}, \\ \sigma_{\theta}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_1}{8\rho}(a_1 + b_1 - c_1) \cos 4\theta + \frac{p_1}{2}(a_1 - b_1) \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8\rho}(a_1 + b_1 - c_1) - \frac{p_1}{2}(a_1 + b_1), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\left[ \frac{\alpha p_1}{2\rho}(a_1 + b_1 - c_1) + \frac{4C_2}{\rho} \right] \sin 4\theta + \left[ \frac{p_1}{2}(a_1 - b_1) - \frac{2C_4}{\rho^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Определим константы  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  из условия

$$\sigma_{\rho 1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(I)p} \Big|_{\rho=\alpha} = 0. \quad (25)$$

Получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{p_1 \alpha \ln \alpha}{8} (a_1 + b_1 - c_1), & C_2 &= -\frac{p_1 \alpha^2}{8} (a_1 + b_1 - c_1), \\ C_3 &= -\frac{p_1 \alpha}{2} (a_1 - b_1), & C_4 &= \frac{p_1 \alpha^2}{4} (a_1 - b_1), \\ C_5 &= \frac{p_1 \alpha}{2} (a_1 + b_1) - \frac{p_1 \alpha \ln \alpha}{8} (a_1 + b_1 - c_1). \end{aligned}$$

Тогда компоненты напряжения в пластической зоне в первом приближении примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 1}^{(I)p} &= \alpha p_1 (a_1 + b_1 - c_1) \left[ \frac{15 \ln \rho}{8\rho} - \frac{(16+15 \ln \alpha)}{8\rho} + \frac{2\alpha}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \\ &\quad - p_0 (a_1 - b_1) \left[ \frac{1}{2} - \frac{3\alpha}{2\rho} + \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \frac{p_1 \alpha \ln \alpha}{8\rho} c_1 - \\ &\quad - p_0 (a_1 + b_1) \left[ \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\rho} \right] + \frac{\alpha p_1}{8\rho} (a_1 + b_1 - c_1) \ln \frac{\rho}{\alpha}, \\ \sigma_{\theta 1}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_1}{8\rho} (a_1 + b_1 - c_1) \cos 4\theta + \frac{p_1}{2} (a_1 - b_1) \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8\rho} (a_1 + b_1 - c_1) - \frac{p_1}{2} (a_1 + b_1), \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)p} &= -\frac{\alpha p_1}{2\rho} (a_1 + b_1 - c_1) [1 - \alpha^2] \sin 4\theta + \frac{p_1}{2} (a_1 - b_1) \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{\rho^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Для второй зоны из (20), (22) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho 2}^{(I)p} &= \left[ \frac{15(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha) \ln \rho}{8} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha)+15\bar{C}_1}{\rho} - \frac{16\bar{C}_2}{\rho^2} \right] \cos 4\theta - \\ &\quad - \left[ \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + \frac{3\bar{C}_3}{\rho} + \frac{4\bar{C}_4}{\rho^2} \right] \cos 2\theta + \\ &\quad + \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha) \ln \rho}{8} - \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + \frac{\bar{C}_5}{\rho}, \\ \sigma_{\theta 2}^{(I)p} &= -\left( \frac{\beta}{\rho} (p_2 - p_1) + \frac{p_2 \alpha}{\rho} \right) \frac{(a_2+b_2-c_2)}{8} \cos 4\theta + \\ &\quad + \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} \cos 2\theta - \frac{p_2(a_2+b_2)}{2} + \left( \frac{\beta}{\rho} (p_2 - p_1) + \frac{p_2 \alpha}{\rho} \right) \frac{(a_2+b_2-c_2)}{8}, \\ \tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} &= -\left[ \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha)}{2\rho} + \frac{4\bar{C}_2}{\rho^2} \right] \sin 4\theta + \left[ \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + \frac{2\bar{C}_4}{\rho^2} \right] \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (27)$$

Условия сопряжения на границе первой и второй зоны имеют вид

$$\sigma_{\rho 1}^{(I)p} = \sigma_{\rho 2}^{(I)p}, \quad \tau_{\rho\theta 1}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} \quad \text{при } \rho = \beta. \quad (28)$$

Из условий (27), (28) определим константы  $\bar{C}_1, \bar{C}_2, \bar{C}_3, \bar{C}_4, \bar{C}_5$ .

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha) \ln \beta}{8} - \\ &\quad - \frac{\alpha p_1 (a_1+b_1-c_1) \ln \frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\alpha^2 p_1 (a_1+b_1-c_1)}{15}}{8} \left( \alpha - \frac{1}{\beta} \right), \\ \bar{C}_2 &= \frac{\alpha \beta p_1 (a_1+b_1-c_1)(1-\alpha^2)}{8} - \frac{\beta(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha)}{8}, \\ \bar{C}_3 &= \frac{-\beta p_2 (a_2-b_2) + (\beta-\alpha) p_1 (a_1-b_1)}{2}, \\ \bar{C}_4 &= \frac{p_2 \beta^2 (a_2-b_2)}{4} - \frac{p_1 (a_1-b_1)(\beta^2-\alpha^2)}{4}, \\ \bar{C}_5 &= \frac{\beta(p_2(a_2+b_2)-p_1(a_1+b_1))}{2} - \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+p_2\alpha) \ln \beta}{8} + \\ &\quad + \frac{\alpha p_1}{8} \left( 4a_1 + 4b_1 + c_1 \ln \alpha + (a_1 + b_1 - c_1) \ln \frac{\beta}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Условия сопряжения на упругопластической границе имеют вид

$$\sigma_{\rho 2}^{(I)p} = \sigma_{\rho}^{(I)e}, \quad \tau_{\rho\theta 2}^{(I)p} = \tau_{\rho\theta}^{(I)e} \quad \text{при } \rho = 1. \quad (29)$$

Компоненты напряжения в упругой зоне в первом приближении с учетом (29) примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(I)e} &= a_0'' + a_2'' \cos 2\theta + a_4'' \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= b_2''' \sin 2\theta + b_4''' \sin 4\theta,\end{aligned}\quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}a_0'' &= -\frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + \bar{C}_5, \\ a_2'' &= -\left[\frac{p_2(a_2-b_2)}{2} + 3\bar{C}_3 + 4\bar{C}_4\right], \\ a_4'' &= -2(a_2 + b_2 - c_2)(\beta(p_2 - p_1) + \alpha p_2) - 15\bar{C}_1 - 16\bar{C}_2, \\ b_2''' &= \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} - 2\bar{C}_4, \\ b_4''' &= -\frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{2} - 4\bar{C}_2.\end{aligned}$$

Согласно [6] из (30) получим

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{(I)e} &= [2\bar{C}_5 - p_2(a_2 + b_2)] \frac{1}{2\rho^2} + \left[ (p_2(a_2 - b_2) + 3\bar{C}_3 + 2\bar{C}_4) \left( \frac{1}{\rho^4} - \frac{2}{\rho^2} \right) + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} - 2\bar{C}_4 \right) \frac{1}{\rho^4} \right] \cos 2\theta + \left[ \left( \frac{3(a_2+b_2-c_2)}{2} + 15\bar{C}_1 + 12\bar{C}_2 \right) \left( \frac{2}{\rho^2} - \frac{3}{\rho^4} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{2} + 4\bar{C}_2 \right) \frac{1}{\rho^2} \right] \cos 4\theta, \\ \sigma_\theta^{(I)e} &= (p_2(a_2 + b_2) - 2\bar{C}_5) \frac{1}{2\rho^2} - (p_2(a_2 - b_2) + 2\bar{C}_3) \frac{3}{2\rho^4} \cos 2\theta + \\ &\quad \left[ ((a_2 + b_2 - c_2)(\beta(p_2 - p_1) + \alpha p_2) + 8\bar{C}_2) \frac{1}{2\rho^6} - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{3(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{2} + 15\bar{C}_1 + 12\bar{C}_2 \right) \left( \frac{2}{\rho^6} - \frac{1}{\rho^4} \right) \right] \cos 4\theta, \\ \tau_{\rho\theta}^{(I)e} &= \left[ \left( \frac{p_2(a_2-b_2)}{2} - 2\bar{C}_4 \right) \frac{1}{\rho^4} - (p_2(a_2 - b_2) + 3\bar{C}_3 + 2\bar{C}_4) \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) \right] \sin 2\theta - \\ &\quad - \left[ (3(a_2 + b_2 - c_2)(\beta(p_2 - p_1) + \alpha p_2) + 15\bar{C}_1 + 12\bar{C}_2) \left( \frac{1}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^6} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{(a_2+b_2-c_2)}{2} (\beta(p_2 - p_1) + \alpha p_2) + 4\bar{C}_2 \right) \frac{1}{\rho^6} \right] \sin 4\theta.\end{aligned}\quad (31)$$

Для определения упругопластической границы в первом приближении будет справедливо соотношение [6]

$$\sigma_{\theta 2}^{(I)p} + \frac{d\sigma_{\theta 2}^{(0)p}}{d\rho} \rho_s^{(I)} = \sigma_\theta^{(I)e} + \frac{d\sigma_\theta^{(0)e}}{d\rho} \rho_s^{(I)} \quad \text{при } \rho = 1. \quad (32)$$

Из (15), (18), (27), (31), (32) получим

$$\begin{aligned}\rho_s^{(I)} &= \frac{6}{\alpha p_1 - \beta(p_2 - p_1)} \left[ \frac{(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{8} - \right. \\ &\quad - \frac{3p_2(a_2+b_2)}{2} + 2\bar{C}_5 + (2p_2(a_2 - b_2) + 3\bar{C}_3) \cos 2\theta + \\ &\quad \left. + \left( \frac{7(a_2+b_2-c_2)(\beta(p_2-p_1)+\alpha p_2)}{8} + 8\bar{C}_2 + 15\bar{C}_1 \right) \cos 4\theta \right].\end{aligned}$$

В случае однородности материала пластины и включения, полученное решение соответствует результатам работы [7].

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Роштова А. Н. О плоском напряженном состоянии анизотропного идеальнопластического материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. Т.1. № 3. С. 19–22.
- [2] Роштова А. Н. Об общих предельных условиях при отрыве для сжимаемых анизотропных сред // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2007. № 2. С. 131–134.
- [3] Матвеев С. В. Матвеева А. Н., Тихонов С. В. Деформированное состояние анизотропной плоскости, ослабленной отверстием, подкрепленной включением, ограниченной эксцентрической окружностью, при двусном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 1(27). С. 105–114.
- [4] Кержаев А. П. Уругопластическое состояние двухслойной толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления, при трансляционной анизотропии // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 71–81.
- [5] Кузнецов П. Н. Уругопластическое состояние неоднородной плоскости, ослабленной круговым отверстием, подкрепленной включениями, ограниченными эксцентрическими окружностями, при двусном растяжении // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1 (6). С. 134–141.
- [6] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории уругопластического тела М. : Наука, 1978. 208 с.
- [7] Роштова А. Н. Растяжение уругопластической анизотропной тонкой пластины, ослабленной круговым отверстием // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. 2007. № 3 (55). С. 22–27.

S. V. Matveev<sup>1</sup>, A. N. Matveeva<sup>2</sup>, S. V. Tikhonov<sup>1</sup>

**UNIFORM STRETCHING OF A THIN ANISOTROPIC PLATE WITH A  
CIRCULAR APERTURE BACKED UP BY INCLUSION, UNDER THE  
CONDITION OF RESISTANCE TO SEPARATION**

<sup>1</sup>*I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary*

<sup>2</sup>*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary*

**Abstract.** The elastic-plastic state of a thin annular plate reinforced by inclusion is considered, the outer radius of the plate is equal to infinity. The plate is subjected to uniform stretching. The material of the plate and the inclusion is different and has different properties of anisotropy and tear resistance. The stress state of the plate is determined and the boundary between the elastic and plastic regions is found.

**Keywords:** plasticity, elasticity, linearization, stress, separation, anisotropy

**REFERENCES**

[1] Roshtova A. N. O ploskom napryazhennom sostoyanii anizotropnogo ideal'noplasticheskogo materiala // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. 2007. T.1. № 3. S. 19–22. (in Russian)

[2] Roshtova A. N. Ob obshchikh predel'nykh usloviyakh pri otryve dlya szhimayemykh anizotropnykh sred // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitet im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2007. № 2. S. 131. (in Russian)

[3] Matveyev K. V. Matveyeva A. N., Tikhonov S. V. Deformirovannoye sostoyaniye anizotropnoy ploskosti, oslablennoy otverstiyem, podkreplennoy vklyuchencheniyem, ogranichennaya ekstsentricheskaya okruzhnost'yu, pri dvuosnom rastyazhenii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2016. № 1 (27). S. 105-114. (in Russian)

[4] Kerzhayev A. P. Uprugoplasticheskoye sostoyaniye dvukhsloynoy tolstostennoy trubyy, nakhodyashchayasya pod vozdeystviyem davleniya, pri translyatsionnoy anizotropii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universitet im. I. YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2013. № 2 (16). S. 71–81. (in Russian)

---

*Matveev Sergey Vladimirovich*

e-mail: sergio2100@mail.ru, Ph.D., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.

*Matveeva Alena Nikolaevna*

e-mail: roshtova@mail.ru, Ph.D., Assoc. Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia.

*Tikhonov Sergey Vladimirovich*

e-mail: strangcheb@mail.ru, Ph.D., Assoc. Professor, I. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russia.



[5] Kuznetsov P. N. Uprugoplasticheskoye sostoyaniye neodnorodnoy ploskosti, oslablennoy krugovym otverstiyem, podkreplennoy vklyucheniymi, sht. ekstsentricheskimy okruzhnostyami, pri dvuosnom rastyazhenii // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2009. № 1 (6). S. 134–141. (in Russian)

[6] Ivlev D. D., Yershov L. V. Metod vozmushcheniy v teorii uprugoplasticheskogo tela M. : Nauka, 1978. 208 s. (in Russian)

[7] Roshtova, A. N. Rastyazheniye uprugoplasticheskoy anizotropnoy tonkoy plastiny, oslablennoy krugovym otverstiyem // Vestnik CHGPU im. I.YA. Yakovleva. 2007. № 3 (55). S. 22–27. (in Russian)