

М. С. Максютлов, В. А. Кадымов

О БЕЗМОМЕНТНОМ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ГЛАДКОГО ТОРА, НАГРУЖЕННОГО РАВНОМЕРНЫМ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия

Аннотация. Уточняется задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тороидальной оболочки, нагруженной равномерным внутренним давлением, и определяемого по безмоментной теории. Предложена система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), описывающая НДС тора на основе моментной теории оболочек. Выписано численное решение краевой задачи НДС тора, проведен его анализ.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, усилия, перемещения, моментная теория оболочек, тор, метод прогонки, метод отложенной коррекции.

УДК: 539.3

Введение.

При расчетах на прочность часто приходится сталкиваться с конструкциями, включающими в себя элементы трубопроводов и насосов тороидальной формы. Расчет таких конструкций регламентирован СНиП на основе упрощенных постановок, по формулам сопротивления материалов, и обычно не представляет особых трудностей. При математической постановке и решении задачи определения осесимметричного напряженно-деформированного состояния тороидальных оболочек, возникают определенные трудности в получении аналитического решения. Матрица системы дифференциальных уравнений имеет переменные коэффициенты, поэтому, в общем, система не разрешима аналитически. Лишь в некоторых случаях удается получить аналитическое решение. В частности, в работе [3] представлено аналитическое решение для тороидального участка трубопровода, в виде поворотного колена, жестко закрепленного на концах фланцами и нагруженного равномерным внутренним давлением. Постановка краевой задачи для замкнутого кругового тора, нагруженного равномерным внутренним давлением, была предложена В. Л. Бидерманом [1] в виде системы ОДУ четвертого порядка. Ее решение было получено численно, причем только на

© Максютлов М. С., Кадымов В. А., 2017

Максутлов Малик Сабитович

e-mail: mmaxutov@icloud.com, кандидат технических наук, доцент, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Кадымов Вагид Ахмедович

e-mail: vkadymov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Поступила 11.11.2017

локальном участке, исключаяющем окрестности полюсных точек поверхности тора. Однако, в некоторых случаях, требуется провести полный расчет НДС кругового тора, находящегося под действием равномерного внутреннего давления, например, при проектировании напорных высоконапорных элементов конструкций в горной и нефтедобывающей промышленности и др.

Вывод уравнений равновесия и постановка краевой осесимметричной задачи НДС тора.

Рассмотрим тороидальную оболочку, представленную на рис. 1

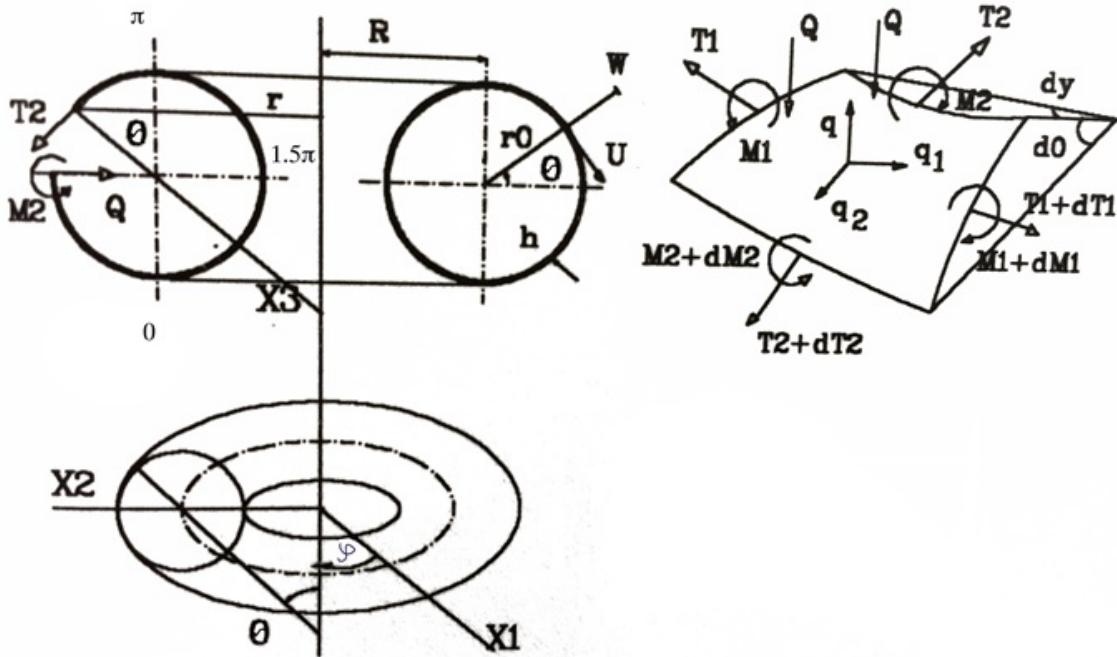


Рис. 1.

Введем декартову систему координат X_1, X_2, X_3 , а также тороидальную систему координат r, θ, φ .

Запишем параметрические уравнения:

$$r = R + r_0 \cos \theta, \quad X_1 = r \cos \varphi, \quad X_2 = r \sin \varphi, \quad X_3 = r_0 \sin \theta. \quad (1)$$

Параметры Ляме H_1, H_2 вычислим по формулам,

$$\begin{aligned}
H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial \theta}\right)^2}, & H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial \varphi}\right)^2}, \\
\frac{\partial X_1}{\partial \theta} &= -r_0 \sin \theta \cos \varphi, & \frac{\partial X_2}{\partial \theta} &= -r_0 \sin \theta \sin \varphi, & \frac{\partial X_3}{\partial \theta} &= r_0 \cos \theta, \\
\frac{\partial X_1}{\partial \varphi} &= -(R + r_0 \cos \theta) \sin \varphi, & \frac{\partial X_2}{\partial \varphi} &= (R + r_0 \cos \theta) \cos \varphi, & \frac{\partial X_3}{\partial \varphi} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Откуда, получим выражения для H_1 и H_2 :

$$H_1 = r_0, \quad H_2 = r. \tag{3}$$

Замкнутость оболочки по координате φ , независимость коэффициентов дифференциальных уравнений равновесия для оболочек вращения от угла φ , периодичность искомых и заданных величин позволяют применить метод разделения переменных и рассматривать соотношения теории тонких оболочек в ОДУ.

Запишем основные соотношения моментной теории оболочек в ОДУ для случая осесимметричного напряженно-деформированного состояния [1], [2].

$$\begin{aligned}
\nu &= -R_0^{-1} \left(\frac{d\omega}{d\theta} - u \right) - \text{угол поворота нормали}; \\
\varepsilon_\theta &= R_0^{-1} \left(\frac{du}{d\theta} + \omega \right) - \text{окружная деформация}; \\
\varepsilon_\varphi &= (R_\varphi \sin \theta)^{-1} (u \cos \theta + \omega \sin \theta) - \text{меридиональная деформация}; \\
\kappa_\varphi &= - \left(\frac{\cos \theta}{R_\theta R_\varphi \sin \theta} \right) \left(\frac{d\omega}{d\theta} - u \right) - \text{меридиональный изгиб}; \\
\kappa_\theta &= -R_\theta^{-1} \frac{d\omega}{d\theta} - \text{окружной изгиб}; \\
R_0 &= H_1, \quad R_\varphi = \frac{H_2}{\sin \theta} - \text{радиусы кривизны}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Считая положительным направлением отсчета угла θ от оси X примем величину $r = R + r_0 \sin \theta$. Для упрощения выкладок, примем $r_0=1$. Ввиду того, что оболочка замкнута по координате φ , разрешающую систему уравнений построим исходя из координаты θ . Изменению координаты θ соответствует изменение дуги $S = r\theta$, тогда

$$r = R + \sin \theta, \quad dS = d\theta. \tag{5}$$

С учетом введенных обозначений, перепишем следующие величины, входящие в (4)

$$\begin{aligned}
\nu &= \left(\frac{d\omega}{ds} + u \right), & \varepsilon_\theta &= \left(\frac{du}{ds} + \omega \right), & \varepsilon_\varphi &= r^{-1} (u \cos \theta + \omega \sin \theta), \\
\kappa_\varphi &= \left(\frac{\cos \theta}{\nu r} \right), & \kappa_\theta &= -\frac{d\nu}{ds}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Повороты краев оболочки, совпадающих соответственно с координатами θ и φ характеризуются углами поворота нормали ν и ψ , и выражаются через перемещения u, v, ω . Усилия возникающие в произвольном элементе оболочки, характеризуются величинами $T_1, T_2, M_1, M_2, Q, T, H$. Положительные направления усилий показаны на рис.1

Уравнения равновесия произвольного элемента оболочки:

$$\begin{aligned}
&\frac{dR_\varphi \sin \theta T_2}{d\theta} + kR_\theta T - R_\theta \cos \theta T_1 + \frac{dR_\varphi \sin \theta M_2}{R_\theta d\theta} + 2kH - \cos \theta M_1 = -R_\theta R_\varphi \sin \theta q_2, \\
&-kR_\theta T_1 + \frac{(R_\varphi \sin \theta)^{-1} d(R_\varphi \sin \theta)^2}{d\theta} T + \\
&+ R_\varphi^{-1} \left(-kR_\theta M_1 + \frac{2R_\varphi dH}{d\theta} + 2 \cos \theta (R_\theta + R_\varphi) H \right) = -R_\varphi R_\theta \sin \theta q_1, \\
&\frac{T_1}{R_\varphi} + \frac{T_2}{R_\theta} - (R_\varphi R_\theta \sin \theta)^{-1} \left\{ d/d\theta \left[\frac{dR_\varphi \sin \theta M_2}{R_\theta d\theta} + kH - \cos \theta M_1 \right] + \right. \\
&\left. + (R_\varphi \sin \theta)^{-1} \left[-k^2 R_\theta M_1 + (k/R_\varphi \sin \theta) d(R_\varphi \sin \theta)^2 H/d\theta \right] \right\} = q_3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Для осесимметричной задачи НДС можно положить

$$v = 0, \quad T = 0, \quad H = 0, \quad \psi = 0, \quad k = 0. \quad (8)$$

Уравнения (7) и упрощения (8) с учетом (5) для тороидальной оболочки дают следующую систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{dT_2}{ds} - r_0 \cos \theta T_1 + \frac{dM_2 r}{ds} - \cos \theta M_1 &= 0, \\ \frac{T_2}{r} + \frac{T_1 \sin \theta}{r} - r^{-1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{dM_2 r}{ds} - \cos \theta M_1 \right] \right\} &= q_3, \\ r^{-1} \left\{ \frac{dM_2 r}{ds} - \cos \theta M_1 \right\} &= Q. \end{aligned} \quad (9)$$

Из последнего уравнения (9) выразим величину M_2 :

$$\frac{dM_2 r}{ds} = Qr + M_1 \cos \theta. \quad (10)$$

Тогда во втором уравнении (9) получим

$$\frac{T_2}{r_0} + \frac{T_1 \sin \theta}{r} - r^{-1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{dM_2 r}{ds} - \cos \theta M_1 \right] \right\} = q_3,$$

или

$$T_2 + \frac{T_1 \sin \theta}{r} - \frac{r^{-1} dQr}{ds} = q_3,$$

откуда получим

$$\frac{dQr}{ds} = T_2 r + T_1 \sin \theta - q_3 r. \quad (11)$$

Из первого уравнения системы (9) имеем:

$$\frac{dM_2 r}{ds} = M_1 \cos \theta + r_0 T_1 \cos \theta - q_3 r,$$

тогда с учетом (10) можем записать

$$M_1 \cos \theta + r_0 T_1 \cos \theta - \frac{dT_2 r}{ds} = Qr + M_1 \cos \theta,$$

или

$$\frac{dT_2 r}{ds} = T_1 \cos \theta - Qr. \quad (12)$$

Для определения остальных неизвестных запишем уравнения связи между усилиями и деформациями, устанавливаемыми соотношениями обобщенного закона Гука. В указанных соотношениях не будем учитывать лишь компоненты температурных деформаций. Согласно линейной теории тонких оболочек, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} T_1 &= Eh / (1 - \mu^2) [\varepsilon_\varphi + \mu \varepsilon_\theta], & T_2 &= Eh / (1 - \mu^2) [\varepsilon_\theta + \mu \varepsilon_\varphi], \\ M_1 &= D (\kappa_\varphi + \mu \kappa_\theta), & M_2 &= D (\kappa_\theta + \mu \kappa_\varphi), & D &= Eh^3 / (12 [1 - \mu^2]). \end{aligned} \quad (13)$$

Из этих соотношений можно получить:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta &= 1/Eh(T_2 - \mu T_1), & \varepsilon_\varphi &= 1/Eh(T_1 - \mu T_2), \\ \kappa_\theta &= 12/Eh^3(M_2 - \mu M_1), & \kappa_\varphi &= 12/Eh^3(M_1 - \mu M_2).\end{aligned}$$

Используя соотношения для κ , а также учитывая (6) можем записать:

$$M_1 - \mu M_2 = Eh^3 \cos \theta \nu / r.$$

Аналогично, с учетом (6) можем записать

$$M_2 - M_1 = -Eh^3 d\nu/ds, \quad (14)$$

$$M_1 = -Eh^3/12 \cdot \nu \cos \theta / r + \mu M_2 r / r. \quad (15)$$

Заменяя в соотношении (14) M_1 его значением из (15) получим следующее равенство,

$$d\nu/ds = -\nu \mu \cos \theta / r + M_2 r / Dr. \quad (16)$$

Снова используя соотношения (6) запишем выражения для производных перемещений u , ω :

$$d\omega/ds = u - \nu, \quad du/ds = \varepsilon_\theta - \omega. \quad (17)$$

Из уравнений (1.14) выразим величину $\mu T_1 : \mu T_1 = T_2 - \varepsilon_\theta Eh$; $\mu T_1 = \mu \varepsilon_\varphi Eh + \mu T_2$. Откуда, учитывая ε_φ из (1.7) получим:

$$\varepsilon_\varphi = (u \cos \theta + \omega \sin \theta) / r, \quad du/ds = T_2 (1 - \mu^2) / Eh - \mu / r (u \cos \theta + \omega \sin \theta). \quad (18)$$

Для определения последнего неизвестного задачи, необходимо выразить значение усилия T_1 через остальные неизвестные задачи:

$$T_1 = Eh\varepsilon_\varphi + \mu T_2, \quad T_1 = 1/r (u \cos \theta + \omega \sin \theta) + \mu T_2. \quad (19)$$

Таким образом, получилась замкнутая относительно переменных задачи система шести дифференциальных уравнений – (10) – (12), (16) – (18) и двух уравнений связи для определения величин M_1 , T_1 соответственно – (1.16) и (1.20). Для постановки краевых условий, рассмотрим внешнюю и внутреннюю образующие тора. Угол θ отсчитывается от π до 2π (внутренняя образующая тора) и от 0 до π (внешняя образующая тора). Точки $0(2\pi)$, π считаются «полюсными» точками тора. Закрепив оболочку в этих точках от перемещений по оси ординат, можем сформулировать следующие геометрические краевые условия:

$$Q = 0, \quad \nu = 0, \quad u = 0. \quad (20)$$

В дальнейшем, для удобства вычислений, произведем замену переменных задачи следующим образом: заменим произведение окружного усилия T_2 , окружного момента M_2 , перерезывающей силы Q на радиус параллельного круга r , переменными X_1, X_2, X_3 соответственно; величины угла поворота нормали ν , нормального перемещения ω , касательного перемещения u , соответственно на X_4, X_5, X_6 . Теперь можно сформулировать постановку задачи для гладкой круговой тороидальной оболочки, в случае ее нагружения равномерным внутренним давлением, в виде уравнений (10) – (18) с

краевыми условиями (20). Вектор напряженно-деформированного состояния в любой точке оболочки $\{X\}$, имеет следующие компоненты

$$X_1 = T_2 r, \quad X_2 = M_2 r, \quad X_3 = Q r, \quad X_4 = \nu, \quad X_5 = \omega, \quad X_6 = u.$$

Тогда в матричном виде система разрешающих уравнений запишется так,

$$dX/d\theta = [A(\theta)]\{X\} + F(\theta), \quad \text{при} \quad \theta = 0(2\pi), \quad \pi, \quad X_3 = X_4 = X_5 = 0. \quad (21)$$

Выпишем коэффициенты матрицы A краевой задачи (21)

$$\begin{array}{cccccc} \mu \cos \theta / r & 0 & -1 & 0 & Eh \cos \theta \sin \theta / r & Eh \cos^2 \theta / r \\ 0 & -\mu \cos \theta / r & 1 & Eh^3 \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ (r + \mu \cos \theta) / r & 0 & 0 & 0 & Eh \sin^2 \theta / r & Eh \sin \theta \cos \theta / r \\ 0 & 1 / Dr & 0 & -\mu \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ (1 - \mu^2) / Ehr & 0 & 0 & 0 & -\mu \sin \theta / r & -\mu \cos \theta / r \end{array}$$

Компоненты вектора $F^T = \{0, 0, -qr, 0, 0, 0\}$.

Численное решение.

Краевая задача (21) неразрешима аналитически, но ее решение может быть получено численным методом. На практике, при расчёте гладких оболочек, хорошо зарекомендовал себя метод ортогональной прогонки, предложенный Н. Годуновым. Он основан на решении встречных задач Коши, с последующим решением СЛАУ модифицированным методом Гаусса. Метод позволяет минимизировать ошибки округления, так как позволяет использовать модификацию путём ортогонализации и ортонормирования решения в выбранных, либо во всех точках интервала интегрирования. Однако, вопрос сходимости метода полностью зависит от числа выбранных шагов и не может управляться автоматически. С другой стороны, свойством автоматического контроля сходимости обладает метод отложенной коррекции, построенный на основе метода конечных разностей с последующим решением итерационным методом Ньютона. Метод был предложен М. Перейра в работе [4], существует в исходных кодах для ранних диалектов языка программирования FORTRAN, а также адаптирован в математической библиотеке NAG и входит в ее состав (пробную версию можно получить на сайте www.nag.com). В этом случае, сходимость метода отложенной коррекции определяется сходимостью метода Ньютона, с автоматическим изменением числа шагов сетки и контролем соответствующей погрешности.

На основе безмоментной теории, Феплем [1] было получено выражения для окружного усилия в торе T_2 , при соблюдении соотношения $R = (2 - 3)r_0$, оно хорошо подтверждается на практике,

$$T_2 = qr_0 [1 + 0.5k \sin \theta] / (1 + k \sin \theta), \quad k = r_0 / R. \quad (22)$$

Величину (2.1) будем использовать в качестве тестовой, приняв нагрузку $q = 1$ мПа, $r_0 = 1$. Ниже приведены результаты расчёта краевой задачи, для определения окружного усилия T_2 методом отложенной коррекции, для различных значений R , толщины оболочки $h = 0.0012$ м. Параметры численного решения выбирались соответствующим диапазоном применимости безмоментного решения Фепля. В частности,

для одинаковых значений величины R . Точность, принятая для метода отложенной коррекции, $\text{TOL}=1 \times 10^{-4}$. Решение Фепля показано прерывным синим.

Внешняя образующая тора, $\theta \in [0, \pi]$, $R = 2$ м.



Рис. 2.

Внутренняя образующая тора: $\theta \in [\pi, 2\pi]$, $R = 2$ м.



Рис. 3.

Для случая $R = 3$ м, принята аналогичная требуемая точность, $\text{TOL}=1 \times 10^{-4}$.

Внешняя образующая тора, $\theta \in [0, \pi]$, $R = 3$ м.

Внутренняя образующая тора: $\theta \in [\pi, 2\pi]$, $R = 3$ м.

Исходя из графиков распределения окружного усилия, при расчете НДС тора, можно считать его безмоментным, исключая окрестность полюсных точек. В полюсных точках, НДС тора незначительно отличается от безмоментного, хотя усилия в них не превышают максимальных значений, определяемых по формуле (22) на практике.

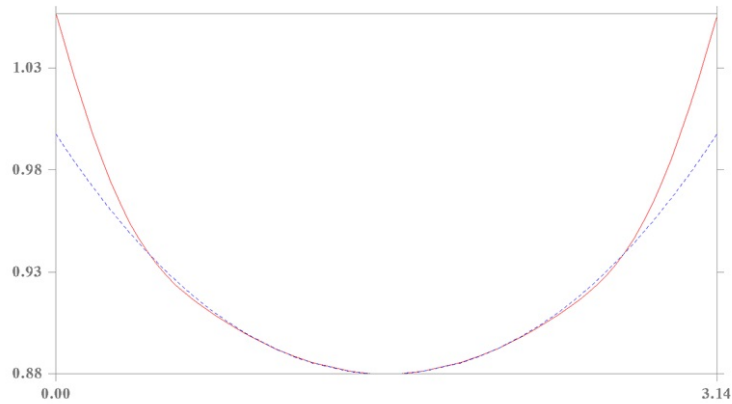


Рис. 4.



Рис. 5.

Выводы Как видно, моментная постановка и последующее численное решение дают несколько завышенное значение окружного усилия T_2 в полюсах тора, по сравнению с безмоментной постановкой. Поэтому НДС гладкого тора нельзя считать безмоментным. Однако, в моментной постановке, значения окружных усилий существенно сказываются только в полюсных точках тора. При этом, для значения $R = 3$ в формуле (22) получаемое решение, в целом, удовлетворительно согласуется с решением Фепля. Сходимость к решению Фепля, в этом случае, оценивается среднеквадратичной ошибкой

$RMS = 2.3 \times 10^{-3}$ для внутренней образующей тора, $RMS = 1.4 \times 10^{-3}$ для внешней. Максимальные усилия, возникающие от действия равномерного внутреннего давления, соответствуют решению Фепля, и наблюдаются на внутренней образующей тора. Существует соблазн, заключающийся в использовании решения в виде «симметрии» верхней и нижней половин оболочки, при котором необходимо решать всего одну краевую задачу: либо для верхней, либо для нижней половины тора. Однако, как показал

анализ литературы, его применение на практике оказывается затруднительным, так как наталкивается на трудности вычислительного характера. Численное решение хорошо согласуется с решением Фепля только в начале интервала интегрирования. При дальнейшем увеличении интервала интегрирования, в окрестности полюсных точек, приходится значительно измельчать шаг, что приводит к неоправданному росту численного решения. Такой же результат дает и метод отложенной коррекции. Поэтому численное решение в «симметричной» постановке, скорее всего, обусловлено поведением самого решения, в окрестности полюсных точек тора.

Таким образом, определение НДС тора путем решения двух краевых задач (несимметричная постановка) является наиболее приемлемым.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бидерман В. Л. Статика тонкостенных конструкций. Библиотека расчетчика. Москва: Машиностроение, 1977. 319 с.
- [2] Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т. 1. Москва: Машиностроение, 1978. 831 с.
- [3] Пухлий В. А. Об одной краевой задаче для упругого изгиба трубопроводов гидротехнических сооружений и АЭС // Теория Механизмов и Машин. 2014. Т. 12. №2(24).
- [4] H. В. Keller, V. Pereyra. Difference methods and deferred correction for ordinary boundary value problems. SIAM. 1979. V. 16. No. 2.
- [5] NAG Library Manual, The Numerical Algorithms Group Ltd. Oxford. UK 2012.

M. S. Maxutov, V. A. Kadyrov

THE MOMENT-LESS STATE OF TOROIDAL SHELL BY THE INTERNAL PRESSURE DEFORMING

Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia

Abstract. The problem of determining the stress-strain state of a toroidal shell, loaded with uniform internal pressure, and determined by the membrane theory is refined. A system of ordinary differential equations describing the stress-strain state of a torus based on the moment theory of shells is proposed. A numerical solution of the boundary value problem of the stress-strain state of the torus is written out, its analysis is carried out.

Keywords: stress-strain state, forces, displacements, moment theory of shells, torus, sweep method, delayed correction method.

REFERENCES

- [1] Biderman V. L. Statika tonkostennykh konstrukcij. Biblioteka raschetchika. Moskva: Mashinostroenie, 1977. 319 s. (in Russian)
- [2] Prochnost', ustojchivost', kolebaniya. Spravochnik. T. 1. Moskva: Mashinostroenie, 1978. 831 s. (in Russian)
- [3] Puhlij V. A. Ob odnoj kraevoj zadache dlya uprugogo izgiba truboprovodov gidrotekhnicheskikh sooruzhenij i AEHS // Teoriya Mekhanizmov i Mashin. 2014. T. 12. №2(24). (in Russian)
- [4] H. B. Keller, V. Pereyra. Difference methods and deferred correction for ordinary boundary value problems. SIAM. 1979. V. 16. No. 2.
- [5] NAG Library Manual, The Numerical Algorithms Group Ltd. Oxford. UK 2012.

Maksyutov Malik Sabitovich,
e-mail: mmaxutov@icloud.com, Ph.D. Phys. & Math., Assoc. Professor, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia.
Kadimov Vagid Ahmedovich,
e-mail: vkadymov@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia.