Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 4 (34). С. 114–124

О. П. Ткаченко

РАЗРЕШАЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗОГНУТОГО ТРУБОПРОВОДА

Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск

Аннотация. Выведены разрешающие уравнения для математической модели напряженно-деформированного состояния трубопровода с криволинейным профилем. Эта модель основана на теории моментных оболочек Власова. Предложен метод приближенного решения уравнений математической модели на основе последовательного асимптотического разложения неизвестных функций в ряды по малому параметру и представления коэффициентов разложений в виде рядов Фурье. Посредством этих методов была получена одномерная постановка задачи. Приведены численные ограничения на параметры в уравнениях оболочки, при которых возможно такое преобразование задачи. Получены одномерные уравнения математической модели трубопровода в двух различных формулировках. Найдены условия, при которых математическая модель имеет наиболее простой вид в рамках поставленной задачи.

Ключевые слова: изогнутый трубопровод, теория оболочек, гидроупругость, асимптотические ряды

УДК: 539.384.6+517.955.8

Введение. Цельнометаллические изогнутые трубы часто встречаются в постановках как прикладных, так и фундаментальных задач механики. Например, в [1] изучена динамика подводного изогнутого трубопровода под влиянием внутреннего потока жидкости и натяжения верхнего конца трубы. Как правило, длинные трубы моделируются в рамках теории стержней. Современная математическая модель с учетом нелинейного растяжения построена и изучена в [2].

Очевидно, что для повышения детализации описания напряженно-деформированного состояния (НДС) в изогнутой трубе можно воспользоваться математической моделью трубы как оболочки. Наиболее близкая модель в данном случае – моментная тороидальная оболочка, описанная В.В. Новожиловым [3]. Обобщенное решение задачи определения перемещений в этой оболочке при симметричной и несимметричной нагрузке получено в [4]. Решения, приведенные в [3, 4], основаны на теории функций комплексного переменного и используют симметрию тороидальной оболочки.

Ткаченко Олег Павлович
`e-mail:` olegt1964@gmail.com, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Вычислительный центр ДВО РАН, г. Хабаровск.

Поступила 10.11.2017

Обобщенный подход, основанный на разложениях в ряды Фурье, представлен в [5]. Авторы [5] ограничились анализом зависимости продольного напряжения от меридионального угла, доказав хорошую согласованность теоретических и экспериментальных результатов.

Нами была построена математическая модель подземного изогнутого трубопровода как полубезмоментной оболочки, выполнен ее асимптотический и численный анализ [6]. Позднее, на основе фундаментального труда [7], построена математическая модель трубопровода как моментной оболочки с учетом специальной геометрии изогнутой трубы [8].

Здесь для математической модели [8] выводятся разрешающие уравнения. Выполняется анализ этих уравнений, в результате которого получены две одномерные формы разрешающих уравнений. Установливаются условия применимости полученных математических моделей. Исследуется связь двух формулировок одномерных уравнений и условия их взаимного перехода.

1. Механическая модель и предположения. Ниже суммируются основные теоретические положения, изложенные в нескольких статьях, в частности в [6, 8]. Сформулирована постановка задачи механики трубопровода и описана геометрия механической системы.

Рассматривается задача расчета НДС трубопровода. Пусть металлическая протяженная труба имеет изгиб осевой линии, такой, что осевая линия трубы Γ является плоской кривой: $\Gamma = \{x, y | x = x_0(s), y = y_0(s)\}$. Неизвестными являются напряжения и деформации трубы под действием заданного давления внутреннего потока жидкости и влияния внешней среды.

Обозначим геометрические параметры: s – длина дуги вдоль осевой линии; θ, R – полярные координаты в поперечном сечении; ρ_0, κ – радиус кривизны и кривизна осевой линии, соответственно; R_0, h – радиус и толщина стенки трубы; A, B – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности трубы; k_1, k_2 – главные кривизны срединной поверхности.

Введем системы координат: глобальная декартова система отсчета $(Oxyz)$, адаптированная к трубе криволинейная система координат $(Os\theta R)$. Функции A, B, k_1, k_2 для этих систем координат найдены в [6].

Также обозначим: u, v, w – компоненты вектора перемещений вдоль s, θ, R, соответственно. Соответствующие безразмерные переменные и неизвестные:

$\zeta = s/\ell$, $r = R/R_0$,$\theta = \theta$; $u' = u/R_0$, $v' = v/R_0$, $w' = w/R_0$. Здесь ℓ – характерный продольный масштаб.

В рамках изучаемых задач малы параметры:

$$\begin{cases} h^* = {}^{h}\!/_{R_0} \ll 1, \\ \lambda = R_0 \max|\kappa| \ll 1. \end{cases} \tag{1}$$

В книгах [3, 9] указаны ограничения на величину h^*, от $h^* \leq {}^1\!/_{20}$ до $h^* \leq {}^1\!/_5$, в зависимости от условий задачи. Оценки погрешности для различных h^* выполнены в [10]. На основе выводов, сделанных в [7], предположим, что

$$h^* \leq 0.05.$$

Для малого параметра кривизны предположим:

$$\lambda \leq 0.01.$$

2. Разрешающие уравнения математической модели. Математическая модель НДС стенки трубы построена в [8]. Система уравнений модели выведена на основе метода построения теории оболочек, предложенного в [7], и главными неизвестными в ней являются первый инвариант тензора деформаций и линейное кручение стенки.

В уравнения модели [8] подставим выражения для искомых функций через перемещения стенки оболочки во введенных выше криволинейных координатах, и получим систему разрешающих уравнений в перемещениях:

$$\frac{1}{A}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial s}\right)+\frac{1}{R_0}\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial\theta}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v}{A}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\left(k_1+\frac{1}{R_0}\right)w\right)+\frac{h^2}{12}(k_1+\right.$$

$$+1/R_0)\frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{A^3}\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{1}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial k_1}{\partial s}\frac{u}{A}+\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\frac{v}{R_0}-\right.$$

$$\left.-\left(k_1^2+\frac{1}{R_0^2}\right)w\right]+\frac{h^2}{12}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{R_0^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-k_1\left(\frac{\partial k_1}{\partial s}\frac{u}{A}+\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\frac{v}{R_0}\right)+\frac{k_1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial s}\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{k_1}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\left(k_1^3+\frac{1}{R_0^3}\right)w\right]\right\}-\frac{1-\nu}{R_0}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{u}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)+\right.$$

$$+\frac{h^2}{12}k_1\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\left(\frac{1}{R_0}-k_1\right)\left[\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{u}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right]\right)+$$

$$\left.+\frac{h^2}{24}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{k_1R_0-1}{R_0}\left[\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{k_1}{A}\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{u}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}+\frac{1}{AR_0}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\theta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right]\right)\right\}+$$

$$+(1-\nu)\left(\frac{k_1}{R_0}u-\frac{k_2}{A}\frac{\partial w}{\partial s}\right)=-\frac{1-\nu^2}{Eh}X; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{R_0}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{v}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}+\left(k_1+\frac{1}{R_0}\right)w\right)+\frac{h^2}{12}\left(k_1+\frac{1}{R_0}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{A^3}\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{1}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial k_1}{\partial s}\frac{u}{A}+\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\frac{v}{R_0}-\left(k_1^2+\frac{1}{R_0^2}\right)w\right]+$$

$$+\frac{h^2}{12}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{R_0^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-k_1\left(\frac{\partial k_1}{\partial s}\frac{u}{A}+\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\frac{v}{B}\right)+k_1\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial s}\right)+\frac{1}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]+\right.$$

$$\left.\left.+\left(k_1^3+\frac{1}{R_0^3}\right)w\right]\right\}+\frac{1-\nu}{A}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{u}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)+\right.$$

$$+\frac{h^2}{12R_0}\frac{\partial}{\partial s}\left(\left(\frac{1}{R_0}-k_1\right)\left[\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{u}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right]\right)+$$

$$\left.+\frac{h^2}{24}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{k_1R_0-1}{R_0}\left(\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\frac{k_1}{A}\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{u}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}+\frac{1}{AR_0}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\theta}-\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right)\right]\right\}+$$

$$+(1-\nu)\frac{k_1}{R_0}\left(v-\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=-\frac{1-\nu^2}{Eh}Y, \tag{3}$$

$$-\left(k_1+\frac{1}{R_0}\right)\cdot\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{v}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}+\left(k_1+\frac{1}{R_0}\right)w\right)-$$

$$-\frac{h^2}{6}\left\{\frac{1}{2}\left(k_1+\frac{1}{R_0}\right)\left[\frac{1}{R_0^3}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-k_1\left(\frac{\partial k_1}{\partial s}\frac{u}{A}+\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\frac{v}{B}\right)+k_1\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial s}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right]+\left(k_1^3+\frac{1}{R_0^3}\right)w\right]+\frac{k_1}{R_0}\left[\frac{1}{A^3}\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial k_1}{\partial s}\frac{u}{A}+\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\frac{v}{R_0}-\left(k_1^2+\frac{1}{R_0^2}\right)w\right]\right\}+\frac{h^2}{12}\frac{1}{AR_0}\times$$

$$\times\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{v}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}+\left(k_1+\frac{1}{R_0}\right)w\right)\right]+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{R_0}{A}\frac{\partial}{\partial s}\left[-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{A^3}\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{1}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial k_1}{\partial s}\frac{u}{A}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\frac{v}{R_0}-\left(k_1^2+\frac{1}{R_0^2}\right)w\right]\right]-(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k_1}{A}\frac{\partial w}{\partial s}\right)-(1-\nu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{k_1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial s}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{u}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{Ak_1}{R_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{R_0}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{v}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}+\left(k_1+\frac{1}{R_0}\right)w\right)+\right.$$

$$+\frac{A}{R_0}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-\frac{1}{R_0^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{A^3}\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{1}{AR_0^2}\frac{\partial A}{\partial\theta}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{\partial k_1}{\partial s}\frac{u}{A}+\frac{\partial k_1}{\partial\theta}\frac{v}{R_0}-\right.$$

$$\left.\left.-\left(k_1^2+\frac{1}{R_0^2}\right)w\right)\right]-\frac{1-\nu}{R_0^2}\frac{\partial}{\partial\theta}Ak_1\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{1-\nu}{2R_0}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial s}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial s}-\frac{1}{R_0}\frac{\partial u}{\partial\theta}-\frac{u}{AR_0}\frac{\partial A}{\partial\theta}\right)\right\}+$$

$$+\frac{h^2}{12}\frac{(1-\nu)}{AR_0}\left[\frac{\partial}{\partial s}(k_1^2u)+\frac{\partial}{\partial\theta}(AKk_2v)\right]+$$

$$+\frac{1-\nu}{AR_0}\left[2Ak_1w+\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial\theta}(Ak_1v)\right]=-\frac{1-\nu^2}{Eh}Z. \tag{4}$$

В выбранной криволинейной системе координат выполнены соотношения:

$$A=1+R_0\kappa\sin\theta,\quad B=R_0;\quad k_1=\frac{\kappa\sin\theta}{1+\kappa R_0\sin\theta},\quad k_2=\frac{1}{R_0}. \tag{5}$$

Система уравнений (2)-(5), дополненная выражениями для плотностей внешних сил X, Y, Z (см. [6, 8]), является замкнутой относительно искомых функций системой уравнений.

Здесь обозначено: E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона материала трубы;

$$E^*={}^{E}\!/_{(1-\nu^2)},\varepsilon^2={h^*}^2/12,\alpha=R_0/\ell,f={}^{\kappa}\!/_{\max|\kappa|}.$$

После перехода к безразмерным переменным u', v', w', пренебрежения величиной h^{*2} по сравнению с единицей, и отбрасывания слагаемых второго порядка малости по λ были получены упрощенные разрешающие уравнения для трубопровода как моментной оболочки.

3. Метод редукции уравнений оболочки к одномерной постановке задачи. Безразмерные функции решений (2)-(4) были разложены в ряды по малому параметру:

$$u' = u^0 + \lambda u^1 + O\left(\lambda^2\right), v' = v^0 + \lambda v^1 + O\left(\lambda^2\right), w' = w^0 + \lambda w^1 + O\left(\lambda^2\right).$$

Затем каждая неизвестная функция f, ввиду ее периодичности по угловой координате [3], была представлена в виде ряда Фурье:

$$f = f_0 + f_1 \sin\theta + f_2 \cos\theta + ...$$

В итоге приближенное решение уравнений (3)-(5) имеет вид:

$$\begin{gathered} u'(\zeta,\theta) = u_0^0(\zeta) + u_1^0(\zeta)\sin\theta + u_2^0(\zeta)\cos\theta + \lambda u_0^1(\zeta) + \lambda u_1^1(\zeta)\sin\theta + \lambda u_2^1(\zeta)\cos\theta + O\left(\lambda^2\right), \\ v'(\zeta,\theta) = v_0^0(\zeta) + v_1^0(\zeta)\sin\theta + v_2^0(\zeta)\cos\theta + \\ + \lambda v_0^1(\zeta) + \lambda v_1^1(\zeta)\sin\theta + \lambda v_2^1(\zeta)\cos\theta + O\left(\lambda^2\right), \\ w'(\zeta,\theta) = w_0^0(\zeta) + w_1^0(\zeta)\sin\theta + w_2^0(\zeta)\cos\theta + \lambda w_0^1(\zeta) + \lambda w_1^1(\zeta)\sin\theta + \lambda w_2^1(\zeta)\cos\theta + O\left(\lambda^2\right). \end{gathered} \tag{6}$$

В таком же виде представлены X, Y, Z.

При математическом моделировании трубы как полубезмоментной оболочки ранее [11] нами использовались представления для решений:

$$\begin{aligned} u'(\zeta,\theta) &= u_0^0(\zeta) + \lambda u_1^1(\zeta)\sin\theta + \lambda u_2^1(\zeta)\cos\theta + O\left(\lambda^2\right), \\ v'(\zeta,\theta) &= v_0^0(\zeta) + \lambda v_1^1(\zeta)\sin\theta + \lambda v_2^1(\zeta)\cos\theta + O\left(\lambda^2\right), \\ w'(\zeta,\theta) &= w_0^0(\zeta) + \lambda w_1^1(\zeta)\sin\theta + \lambda w_2^1(\zeta)\cos\theta + O\left(\lambda^2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Ниже для общей моментной оболочки получены редуцированные одномерные формулировки уравнений как для представления (6), так и для (7), и найдены условия, при которых допустимо представление (7), которое сильнее упрощает задачу.

4. Редуцированная форма уравнений математической модели. В результате подстановки (6) получим систему из восемнадцати дифференциальных уравнений для восемнадцати неизвестных, используя стандартный метод приравнивания коэффициентов. Нижним индексом ζ обозначено дифференцирование. Уравнения сгруппированы по порядку малого параметра.

Нулевое по λ приближение:

$$\begin{gathered} \alpha^2 u^0_{0\zeta\zeta} + \alpha\nu w^0_{0\zeta} - \varepsilon^2\alpha^3 w^0_{0\zeta\zeta\zeta} + {X_0^0}/{E^* h^*} = 0; \\ \frac{1-\nu}{2}\alpha^2 v^0_{0\zeta\zeta} + {Y_0^0}/{E^* h^*} = 0; \\ w_0^0 + \nu\alpha u^0_{0\zeta} + \varepsilon^2\left[\alpha^4 w^0_{0\zeta\zeta\zeta\zeta} - \alpha^3 u^0_{0\zeta\zeta\zeta}\right] - {Z_0^0}/{E^* h^*} = 0; \end{gathered} \tag{8}$$

$\lambda^0 \sin\theta$:

$$\alpha^2 u^0_{1\zeta\zeta} + \alpha\nu w^0_{1\zeta} - \frac{1+\nu}{2}\alpha v^0_{2\zeta} - \frac{1-\nu}{2}u^0_1 - \varepsilon^2\alpha^3 w^0_{1\zeta\zeta\zeta} + X^0_1/E^*h^* = 0,$$

$$\frac{1-\nu}{2}\alpha^2 v^0_{1\zeta\zeta} - v^0_1 - \frac{1+\nu}{2}\alpha u^0_{2\zeta} - w^0_2 + \varepsilon^2\alpha^2\frac{3-\nu}{2}w^0_{2\zeta\zeta} + Y^0_1/E^*h^* = 0, \quad (9)$$

$$w^0_1 - v^0_2 + \nu\alpha u^0_{1\zeta} + \varepsilon^2\left[\alpha^4 w^0_{1\zeta\zeta\zeta\zeta} - 2\alpha^2 w^0_{1\zeta\zeta} - \alpha^2\frac{\nu-3}{2}v^0_{2\zeta\zeta} - \alpha^3 u^0_{1\zeta\zeta\zeta}\right] - Z^0_1/E^*h^* = 0;$$

$\lambda^0 \cos\theta$:

$$\alpha^2 u^0_{2\zeta\zeta} + \alpha\nu w^0_{2\zeta} + \frac{1+\nu}{2}\alpha v^0_{1\zeta} - \frac{1-\nu}{2}u^0_2 - \varepsilon^2\alpha^3 w^0_{2\zeta\zeta\zeta} + X^0_2/E^*h^* = 0,$$

$$\frac{1-\nu}{2}\alpha^2 v^0_{2\zeta\zeta} - v^0_2 + \frac{1+\nu}{2}\alpha u^0_{1\zeta} + w^0_1 - \varepsilon^2\alpha^2\frac{3-\nu}{2}w^0_{1\zeta\zeta} + Y^0_2/E^*h^* = 0, \quad (10)$$

$$w^0_2 + v^0_1 + \nu\alpha u^0_{2\zeta} + \varepsilon^2\left[\alpha^4 w^0_{2\zeta\zeta\zeta\zeta} - 2\alpha^2 w^0_{2\zeta\zeta} + \alpha^2\frac{\nu-3}{2}v^0_{1\zeta\zeta} - \alpha^3 u^0_{2\zeta\zeta\zeta}\right] - Z^0_2/E^*h^* = 0;$$

Первое по λ приближение:
$\lambda \cdot 1$:

$$\alpha^2 u^1_{0\zeta\zeta} + \alpha\nu w^1_{0\zeta} - \varepsilon^2\alpha^3 w^1_{0\zeta\zeta\zeta} - \alpha^2 f u^0_{1\zeta\zeta} - \frac{\alpha^2}{2}f_\zeta u^0_{1\zeta} +$$
$$+\frac{\alpha}{2}f_\zeta\left(v^0_2 + w^0_1\right) + \frac{\alpha}{2}\left[(1-\nu)f + \varepsilon^2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right]w^0_{1\zeta} + \left((1-\nu)f + \varepsilon^2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right)\frac{1}{2}u^0_1 +$$
$$+\alpha f v^0_{2\zeta} + \varepsilon^2\alpha^3\left(2f_\zeta w^0_{1\zeta\zeta} + 1.5 f w^0_{1\zeta\zeta\zeta}\right) + X^1_0/E^*h^* = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1-\nu}{2}\alpha^2 v^1_{0\zeta\zeta} - \frac{1-\nu}{2}\alpha^2 f v^0_{1\zeta\zeta} + \frac{\nu-1}{4}\alpha^2 f_\zeta v^0_{1\zeta} + \frac{1-\nu}{2}f v^0_1 + \frac{\nu-1}{2}\alpha f u^0_{2\zeta} + \frac{\nu-1}{4}\alpha f_\zeta u^0_2 +$$
$$+\frac{1-\nu}{2}f w^0_2 + \varepsilon^2\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{1-\nu}{2}f_\zeta w^0_{2\zeta} + \nu f w^0_{2\zeta\zeta}\right] + Y^1_0/E^*h^* = 0, \quad (12)$$

$$-w^1_0 - \nu f w^0_1 - \nu\alpha u^1_{0\zeta} + \varepsilon^2\left(-0.5f + \alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right)v^0_2 - \frac{\alpha}{2}\left[(1-\nu)f - \varepsilon^2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right]u^0_{1\zeta} + \varepsilon^2\left[-\alpha^4 w^1_{0\zeta\zeta\zeta\zeta} +\right.$$
$$+\alpha^3 u^1_{0\zeta\zeta\zeta} + 2\alpha^4 f w^0_{1\zeta\zeta\zeta\zeta} + 3\alpha^4 f_\zeta w^0_{1\zeta\zeta\zeta} + \left(\frac{\nu-3}{2}f + 2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right)\alpha^2 w^0_{1\zeta\zeta} +$$
$$+\left(\frac{\nu-2}{2}f_\zeta + \frac{\alpha^2}{2}f_{\zeta\zeta\zeta}\right)\alpha^2 w^0_{1\zeta} + \alpha^2\frac{5-\nu}{2}f v^0_{2\zeta\zeta} + \alpha^2\frac{11-\nu}{4}f_\zeta v^0_{2\zeta} -$$
$$\left.-1.5\alpha^3 f u^0_{1\zeta\zeta\zeta} - \alpha^3 f_\zeta u^0_{1\zeta\zeta} - \frac{\alpha}{4}\left[f_\zeta - 2\alpha^2 f_{\zeta\zeta\zeta}\right]u^0_1\right] + Z^1_0/E^*h^* = 0; \quad (13)$$

$\lambda \cdot \sin\theta$:

$$\alpha^2 u^1_{1\zeta\zeta} + \alpha\nu w^1_{1\zeta} - \varepsilon^2\alpha^3 w^1_{1\zeta\zeta\zeta} - \frac{1+\nu}{2}\alpha v^1_{2\zeta} - \frac{1-\nu}{2}u^1_1 - 2\alpha^2 f u^0_{0\zeta\zeta} - \alpha^2 f_\zeta u^0_{0\zeta} +$$
$$+\alpha f_\zeta w^0_0 + \alpha\left[(1-\nu)f + \varepsilon^2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right]w^0_{0\zeta} +$$

$$+\left(\frac{1-\nu}{2}f+\varepsilon^2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right)u_0^0+\varepsilon^2\alpha^3\left(4f_\zeta w^0_{0\zeta\zeta}+3fw^0_{0\zeta\zeta\zeta}\right)+X_1^1/E^*h^*=0, \qquad (14)$$

$$\frac{1-\nu}{2}\alpha^2 v^1_{1\zeta\zeta}-v_1^1-\frac{1+\nu}{2}\alpha u^1_{2\zeta}-w_2^1+\varepsilon^2\alpha^2\frac{3-\nu}{2}w^1_{2\zeta\zeta}-(1-\nu)\,\alpha^2 f v^0_{0\zeta\zeta}+$$
$$+\frac{\nu-1}{2}\alpha^2 f_\zeta v^0_{0\zeta}-\nu f v_0^0+Y_1^1/E^*h^*=0, \qquad (15)$$

$$-w_1^1+v_2^1-\nu\alpha u^1_{1\zeta}-\left(2\nu f-\varepsilon^2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right)w_0^0-\left[(1-\nu)\,f-\varepsilon^2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right]\alpha u^0_{0\zeta}+\varepsilon^2\left[-\alpha^4 w^1_{1\zeta\zeta\zeta\zeta}+\right.$$
$$+2\alpha^2 w^1_{1\zeta\zeta}+\frac{\nu-3}{2}\alpha^2 v^1_{2\zeta\zeta}+\alpha^3 u^1_{1\zeta\zeta\zeta}+4\alpha^4 f w^0_{0\zeta\zeta\zeta\zeta}+6\alpha^4 f_\zeta w^0_{0\zeta\zeta\zeta}-$$
$$-\left[(1-\nu)\,f-4\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right]\alpha^2 w^0_{0\zeta\zeta}+\left(\nu f_\zeta+\alpha^2 f_{\zeta\zeta\zeta}\right)\alpha^2 w^0_{0\zeta}-$$
$$\left.-3\alpha^3 f u^0_{0\zeta\zeta\zeta}-2\alpha^3 f_\zeta u^0_{0\zeta\zeta}-\frac{\alpha}{2}\left[(1+\nu)\,f_\zeta-2\alpha^2 f_{\zeta\zeta\zeta}\right]u_0^0\right]+Z_1^1/E^*h^*=0; \qquad (16)$$

$\lambda\cdot\cos\theta$:

$$\alpha^2 u^1_{2\zeta\zeta}+\alpha\nu w^1_{2\zeta}-\varepsilon^2\alpha^3 w^1_{2\zeta\zeta\zeta}+\frac{1+\nu}{2}\alpha v^1_{1\zeta}-\frac{1-\nu}{2}u_2^1+$$
$$+\alpha f_\zeta v_0^0+\frac{3-\nu}{2}\alpha f v^0_{0\zeta}+X_2^1/E^*h^*=0, \qquad (17)$$

$$\frac{1-\nu}{2}\alpha^2 v^1_{2\zeta\zeta}-v_2^1+\frac{1+\nu}{2}\alpha u^1_{1\zeta}+w_1^1-\varepsilon^2\alpha^2\frac{3-\nu}{2}w^1_{1\zeta\zeta}+\frac{\nu-3}{2}\alpha f u^0_{0\zeta}+\frac{\nu-1}{2}\alpha f_\zeta u_0^0+fw_0^0+$$
$$+\varepsilon^2\frac{\alpha^2}{2}\left[(3-\nu)\,f_\zeta w^0_{0\zeta}+(7-\nu)\,f w^0_{0\zeta\zeta}\right]+Y_2^1/E^*h^*=0, \qquad (18)$$

$$-w_2^1-v_1^1-\nu\alpha u^1_{2\zeta}-\left(\nu f-2\varepsilon^2\alpha^2 f_{\zeta\zeta}\right)v_0^0+\varepsilon^2\left[-\alpha^4 w^1_{2\zeta\zeta\zeta\zeta}+2\alpha^2 w^1_{2\zeta\zeta}-\frac{\nu-3}{2}\alpha^2 v^1_{1\zeta\zeta}+\right.$$
$$\left.+\alpha^3 u^1_{2\zeta\zeta\zeta}+\alpha^2\frac{\nu+3}{2}f v^0_{0\zeta\zeta}+\alpha^2\frac{\nu+7}{2}f_\zeta v^0_{0\zeta}\right]+Z_2^1/E^*h^*=0. \qquad (19)$$

Систему (8)-(10) называем системой уравнений нулевого приближения, систему (11)-(19) – системой уравнений первого приближения. Видно, что подсистема уравнений первого приближения (14)-(19) разделяется на две подсистемы, которые могут быть решены независимо друг от друга: (14, 16, 18) и (15, 17, 19). В отличие от [11], новая система уравнений получена для моментной оболочки.

Дальнейшее упрощение уравнений математической модели возможно, если решение представимо в виде (7). Из уравнений (8)-(19) следует, что необходимым условием применимости (7) являются равенства:

$$X_1^0=X_2^0=0,\quad X_0^1=0;\quad Y_1^0=Y_2^0=0,\quad Y_0^1=0;\quad Z_1^0=Z_2^0=0,\quad Z_0^1=0. \qquad (20)$$

В этом случае математическая модель состоит из уравнений (8), (14)-(19), вид которых не изменяется, поскольку в них не входят обращающиеся в нуль функции

$$u_1^0=u_2^0=0,\quad u_0^1=0;\quad v_1^0=v_2^0=0,\quad v_0^1=0;\quad w_1^0=w_2^0=0,\quad w_0^1=0. \qquad (21)$$

Очевидно, что для выполнения (21) необходимо, чтобы система уравнений для этих функций (9), (10), (11)-(13) была дополнена однородными краевыми условиями.

Итак, установлены необходимые условия (20), (21) допустимости представления (7) для решения уравнений математической модели (2)-(4).

Физически вид решения (7) означает, что осевая линия трубы не выходит из своей начальной плоскости, а в нулевом приближении труба ведет себя как прямолинейная и цилиндрическая.

Заключение. Решены задачи, перечисленные во Введении:

– для математической модели напряженно-деформированного состояния изогнутого трубопровода в предположении (1) выведены разрешающие уравнения (2)-(4);
– Предложен вид приближенного решения (6) разрешающих уравнений, основанный на сочетании асимптотического разложения по малому параметру λ (1), и последующего представления коэффициентов разложения в виде рядов Фурье;
– получены одномерные уравнения математической модели трубопровода в двух различных формулировках;
– найдены условия (20), (21), при которых возможно дальнейшее упрощение одномерных уравнений математической модели, а решение полной задачи для оболочки выражается формулами (7).

Возникла новая гипотеза о достаточности условий (20), (21) для применимости упрощенного представления решений (7). В линейном случае, при условии существования классического решения исходной задачи после наложения краевых условий, доказательство представляется очевидным и следует из единственности решения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Athisakul Ch., Monprapussorn T., Pulngern T., Chucheepsakul S. The Effect of Axial Extensibility on Three-Dimensional Behavior of Tensioned Pipes/Risers Transporting Fluid // Proceedings of the Eighth (2008) ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium. Bangkok, Thailand: ISOPE, 2008. P. 97–104.

[2] Bashurov V. V., Vaganova N. A., Kropotov A. I., Pchelintsev M. V., Skorkin N. A., Filimonov M. Yu. Nonlinear model of a pipeline in a gravity field with an ideal fluid moving through it // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2012. Vol. 53. № 1. P. 43–48. doi: 10.1134/S0021894412010063

[3] Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2010. 380 с.

[4] Xia Zi-Hui, Zhang Wei. The general solution of thin-walled toroidal shells with various boundary conditions and subjected to arbitrary loadings // Ingenieur-Archiv. 1987. Vol. 57. P. 166–174.

[5] Madureira L. R., Melo F. Q. A mixed formulation for stress analysis of curved pipes with tangent terminations under in-plane forces // Int. J. Mech. Mater. Des. 2008. Vol. 4. P. 221–227. doi: 10.1007/s10999-008-9074-2

[6] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical modeling of the fluid-filled pipelines in viscous medium // AIP Conference Proceedings. 2016. Vol. 1738. № 030036. doi: 10.1063/1.4951792

[7] Власов В. З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.: Издательство АН СССР, 1962. Т. 1. С.15–439.

[8] Tkachenko O. P. Construction of the mathematical model of complex pipeline with variable geometry // Procedia Engineering. 2016. Vol. 165. P. 1261–1274. doi: 10.1016/j.proeng.2016.11.849

[9] Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. школа, 1982. 264 с.

[10] Константинов М.В. Количественная оценка погрешности математической модели Власова для пологой сферической оболочки // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2014. № 12. С. 858–877. doi: 10.7463/1214.0738649

[11] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Approximate Solution to the Nonlinear Problem of an Underground Pipeline Deformation // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2012. Vol. 6. № 1. P. 100–110. doi: 10.1134/S1990478912010115

O. P. Tkachenko

THE RESOLVING EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL MODEL OF CURVED PIPELINE

Computing Center of Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk

Abstract. The resolving equations for mathematical model of the stress-strain state of a pipeline with a curvilinear profile were derived. This model is based on Vlasov's theory of moment shells. A method is proposed for approximate solution of equations of a mathematical model on the basis of a sequential asymptotic expansion of unknown functions into series in a small parameter and representations of the expansion coefficients in the form of Fourier series. By means of these transformations, the system of equations of the mathematical model was reduced to a one-dimensional form. Numerical constraints on the parameters in the shell equations are given at which such a reduction of the formulation of the problem is possible. One-dimensional equations of the mathematical model of the pipeline in two different formulations are obtained. Conditions are found under which the mathematical model has the simplest form in the framework of the problem formulated.

Keywords: bent pipeline, shell theory, hydroelasticity, asymptotical series

REFERENCES

[1] Athisakul Ch., Monprapussorn T., Pulngern T., Chucheepsakul S. The Effect of Axial Extensibility on Three-Dimensional Behavior of Tensioned Pipes/Risers Transporting Fluid // Proceedings of the Eighth (2008) ISOPE Pacific/Asia Offshore Mechanics Symposium. – Bangkok, Thailand: ISOPE, 2008. – P. 97–104.

[2] Bashurov V. V., Vaganova N. A., Kropotov A. I., Pchelintsev M. V., Skorkin N. A., Filimonov M. Yu. Nonlinear model of a pipeline in a gravity field with an ideal fluid moving through it // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2012. – Vol. 53. – № 1. – P. 43–48. – doi: 10.1134/S0021894412010063

[3] Novozhilov V. V. Thin Shell Theory. – SPb.: SPBU Publishing, 2010. – 380 p. (in Russian)

[4] Xia Zi-Hui, Zhang Wei. The general solution of thin-walled toroidal shells with various boundary conditions and subjected to arbitrary loadings // Ingenieur-Archiv. – 1987. – Vol. 57. – P. 166–174.

[5] Madureira L. R., Melo F. Q. A mixed formulation for stress analysis of curved pipes with tangent terminations under in-plane forces // Int. J. Mech. Mater. Des. – 2008. – Vol. 4. – P. 221–227. – doi: 10.1007/s10999-008-9074-2

[6] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Numerical modeling of the fluid-filled pipelines in viscous medium // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1738. – № 030036. – doi: 10.1063/1.4951792

[7] Vlasov V. Z. General theory of shells and its applications in engineering. Selected works. V.1. – M.: RAS, 1962. – P. 15–439. (in Russian)

Tkachenko Oleg Pavlovich

`e-mail:` olegt1964@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Leading Researcher, Computing Center of Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, Khabarovsk 680000, Kim-Yu-Chen st. 65.

[8] Tkachenko O. P. Construction of the mathematical model of complex pipeline with variable geometry // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 165. – P. 1261–1274. – doi: 10.1016/j.proeng.2016.11.849

[9] Samul V. I. Bases of the theory of elasticity and plasticity. – M.: Higher school, 1982. – 264 p. (in Russian)

[10] Konstantinov M. V. Vlasov Mathematical Model Inaccuracy Quantitative Assessment for a Shallow Spherical Shell // Science and Education of the Bauman MSTU. – 2014. – № 12. – P. 858–877. – doi: 10.7463/1214.0738649 (in Russian)

[11] Rukavishnikov V. A., Tkachenko O. P. Approximate Solution to the Nonlinear Problem of an Underground Pipeline Deformation // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2012. – Vol. 6. – № 1. – P. 100–110. – doi: 10.1134/S1990478912010115