

Б. Г. Миронов

О КРУЧЕНИИ КУСОЧНО-АНИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет,
г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассмотрено кручение кусочно-анизотропного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением. Определено напряженное состояние стержня, найдены линии разрыва напряжений, построено поле характеристик.

Ключевые слова: кручение, напряжение, пластичность, предел текучести.

УДК: 539.735

Кручение изотропных и анизотропных идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1]-[4]. Кручение неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [5]-[7].

Рассмотрим цилиндрический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат xyz . Ось z направлена параллельно образующим стержня. Контур сечения стержня плоскостью $z = const$ есть эллипс: $\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$.

Предположим, что сечение стержня состоит из двух анизотропных областей, разделенных хордой AB : $y = 0$ (рис. 1).

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

условиями пластичности

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_1^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_1^2} = 1 \quad (2)$$

© Миронов Б. Г., 2017
Миронов Борис Гурьевич
e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-41-210272).

Поступила 12.10.2017

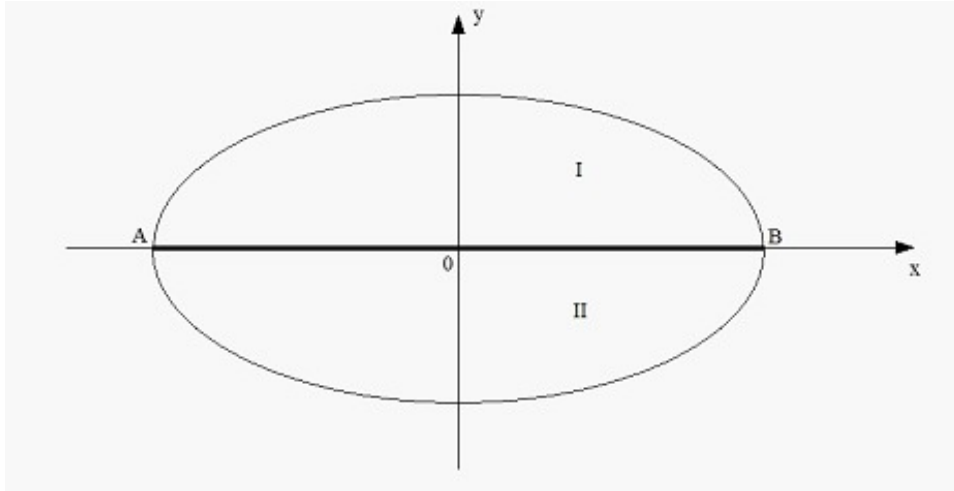


Рис. 1.

в области I,

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_2^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_2^2} = 1 \quad (3)$$

в области II,
уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где $b_1 < b_2$.

Согласно [3] характеристики соотношения (4) в каждой области есть прямые, ортогональные вектору градиента к кривым (2) и (3) соответственно. Вектор касательного напряжения:

$$\bar{\tau} = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j}, \quad (5)$$

не меняется вдоль характеристик и направлен по касательной к контуру поперечного сечения стержня.

Пусть

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{d}{c}. \quad (6)$$

Тогда уравнение характеристик в обоих областях имеет вид:

$$y = \frac{y_0}{x_0} x, \quad (7)$$

где

$$\frac{x_0^2}{c^2} + \frac{y_0^2}{d^2} = 1. \quad (8)$$

На линии неоднородности AB неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через кривую AB вектор касательного напряжения $\bar{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. А это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений AC и CB области II (рис. 2).

Уравнение линии разрыва напряжений AC и CB имеет вид соответственно

$$b_2 \sqrt{d^2 x^2 + c^2 y^2} - d \left(b_1 x + \sqrt{b_2^2 - b_1^2} y \right) = (b_2 c - b_1) d, \quad (9)$$

$$b_2 \sqrt{d^2 x^2 + c^2 y^2} + d \left(b_1 x - \sqrt{b_2^2 - b_1^2} y \right) = (b_2 c - b_1) d. \quad (10)$$

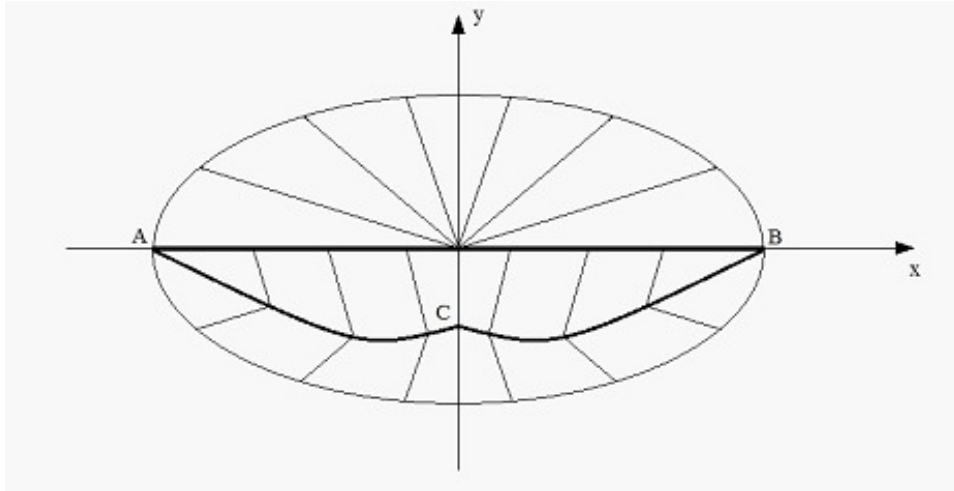


Рис. 2.

На рис. 2 линии разрыва напряжений нарисованы жирными линиями, а характеристики – тонкими линиями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
- [3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 С. 108–112.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1(23). С. 197–200.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.
- [6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу о кручении призматических стержней с включением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №2(32). С. 18–22.
- [7] Миронов Б. Г. О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №3(33). С. 95–100.

B. G. Mironov

ABOUT TORSION OF PIECEWISE ANISOTROPIC CYLINDRICAL CORES

Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia

Abstract. In work torsion of a piecewise anisotropic cylindrical core with a cut in the form of an ellipse is considered. Tension of a core is defined, lines of a rupture of tension are found, the field of characteristics is built.

Keywords: torsion, tension, plasticity, fluidity limit.

REFERENCES

- [1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. *Teoriya plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka*, 1998. 528 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. *Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka*, 1966. (in Russian).
- [3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhikh sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2012. No. 4. P. 108–112. (in Russian).
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. To the question of torsion of an anisotropic core // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2015. No. 1(23). P. 197–200. (in Russian).
- [5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. *Teoriya plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir*, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G., Mironov Yu. B. About torsion of piecewise isotropic prismatic cores with inclusion // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2017. No. 2(32). P. 18–22. (in Russian).
- [7] Mironov B. G. About torsion of heterogeneous cylindrical cores with a circular cut // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojanija*. 2017. No 3 (33). P. 95 – 100. (in Russian)

Mironov Boris Guryevich

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State Humanitarian and Economic University, Moscow, Russia.