

В. А. Кадымов

## КОНТАКТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О РАСТЕКании КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ПЛОСКОСТИ

*Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Еще в середине прошлого века А. А. Ильюшин предложил эффективную двумерную, осредненную по толщине слоя, математическую модель течения тонкого пластического слоя между сближающимися жесткими плитами. В рамках этой модели он сформулировал краевую задачу для «вязкой жидкости» относительно трех неизвестных функций, двух компонент скорости течения и контактного давления, в области с подвижной границей. Он также указал на возможность упрощения постановки задачи до течения «идеальной жидкости». Все последующие исследователи в своих работах ограничивались этой упрощенной постановкой. В работе рассмотрены такие течения пластического слоя, которые невозможно описать в модели «идеальной жидкости». В рамках упрощенной постановки решена краевая задача течения тонкого пластического слоя в клиновидной области, составленного из двух разных сред. Проверено, что полученное решение не удовлетворяет одному из динамических условий на границе раздела двух пластических сред. Для корректного описания представленной задачи надо использовать модель «вязкой жидкости», или более простую теорию пограничного слоя.

**Ключевые слова:** осадка слоя из пластического материала; квазистатическая постановка краевой задачи; свободное растекание на плоскости.

УДК: 539.3

**1. Введение.** Выделим один класс задач пластического течения материала в сравнительно тонком слое между сближающимися поверхностями тел инструмента [1-3]. К таковым примыкает подавляющее большинство технологических задач обработки давлением, таких как штамповка и прессование тонкостенных элементов конструкций, тонколистовая прокатка, дрессировка и др. Это сложные объемные задачи пластического формоизменения с разнообразием параметров, определяющих свойства материала. В рассматриваемых процессах развиваются высокие давления, на порядок превышающие сдвиговые свойства материала слоя. Требования к точности конечной детали определяют другую особенность этих процессов. Как известно [3], большие

---

© Кадымов В. А., 2018

*Кадымов Вагид Ахмедович*

**e-mail:** vkadymov@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный гуманитарно-экономический университет, г. Москва, Россия.

Поступила 10.02.2018

контактные давления вызывают нормальные упругие перемещения рабочих поверхностей тел инструмента, соизмеримые с толщиной пластического слоя. А следовательно, неучет упругих перемещений тел инструмента становится неоправданным. На указанные процессы растекания пластических слоев заметное влияние могут оказывать силы инерции, температуры и тепловые потоки, объемная сжимаемость, касательные напряжения. Перечисленные выше особенности, присущие процессам течения в тонком пластическом слое, достаточно подробно изучены и представлены в научной литературе. Для описания указанного течения тонкого пластического слоя А.А.Ильюшин предложил эффективную двумерную, осредненную по толщине слоя математическую модель [1], к которой приводит исходная трехмерная задача течения идеально пластического тела. Переход к двумерной задаче проводился на основе специальных гипотез, предложенных в результате анализа известного решения Прандтля в задаче об осадке плоского, в вертикальном разрезе, слоя пластического материала [2]. На контактных поверхностях принимается условие полного проскальзывания материала, а касательные напряжения достигают максимального значения, равного пределу текучести материала слоя на сдвиг. В рамках этой модели сформулирована краевая задача для «вязкой жидкости» в области с подвижной границей относительно трех неизвестных функций- контактного давления  $p$  и двух компонент  $u, v$  скорости течения. Такая краевая задача описывается дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка. Он же указал на возможность упрощения постановки до задачи для «идеальной жидкости», в которой принимаются условия полной пластичности, и соответственно, пренебрегают касательными напряжениями. Все последующие исследователи до недавнего времени в своих работах ограничивались этой упрощенной постановкой [3], представленной нелинейными уравнениями в частных производных первого порядка; она достаточно наглядна и доступна для инженерных расчетов. На ее основе разработаны различные математические методы решения задач течения в тонком пластическом слое. Однако, не все процессы течения в тонком пластическом слое могут быть описаны в рамках упрощенной модели «идеальной жидкости». Недавно такие случаи были рассмотрены в работах автора: теоретическое исследование задачи о растекании пластического слоя, состоящего из двух разных сред [5], и экспериментальная работа по исследованию процесса растекания слоя в области с неподвижной границей [6]. Для корректного описания в таких случаях необходимо использовать более общую модель «вязкой жидкости». В настоящей работе подробно исследуется постановка задачи о растекании пластического слоя, состоящего из двух разных сред, и дается ее решение для клиновидной области в модели «идеальной жидкости».

**2. Постановка краевой задачи (модель «вязкой жидкости») в размерных величинах.** В процессах течения тонкого пластического слоя, как известно [1], достигаются большие давления, на порядок превышающие сдвиговые свойства материала, и, в начальном приближении, свойства материала пластического слоя близки к свойствам гидродинамической жидкости. При этом, однако, влияние сдвиговых свойств остается заметным в задачах растекания слоя, составленного из разных идеально-пластических сред. Пусть слой, составленный из разных идеально-пластических сред, сжимается между двумя параллельно сближающимися по нормали плоскостями жестких шероховатых плит (рис.1).

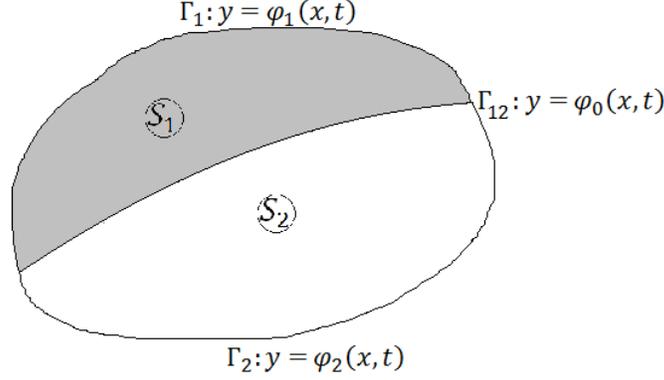


Рис. 1. Слой, составленный из двух идеально-пластических сред, в плане

Тогда основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

$p$ ,  $u$ ,  $v$  – контактное давление и скорости течения;  $\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk}$  ( $k = 1, 2$ ) – предел текучести пластического материала в области  $S_1$  и  $S_2$  соответственно;  $h = h(t)$  – известный закон изменения толщины слоя;  $\lambda(t) = \ln(h_0/h(t))$  – степень деформации;  $h_0 = h(t_0)$ .

Выпишем условия на границе раздела двух пластических сред  $\Gamma_{12} : y = \varphi_0(x, t)$ :

$$\sigma_{11}^{(1)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(2)}, \quad (4)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(2)}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = v_k, \quad (6)$$

и свободной границе  $\Gamma_k : y = \varphi_k(x, t)$ , ( $k = 1, 2$ ):

$$\sigma_{11}^{(k)} \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(k)} = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_{12}^{(k)} \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = v_k, \quad (9)$$

где

$$\sigma_{11}^{(k)} = -p_k + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk}\frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial u_k}{\partial x};$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{sk}\frac{dt}{d\lambda}\left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x}\right);$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = -p_k + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk}\frac{dt}{d\lambda}\frac{\partial v_k}{\partial y}.$$

**3. Краевая задача в безразмерных величинах.** Упрощение краевой задачи. Пусть  $h_0, L_0, v_0, p_0$  – характерные значения толщины слоя, линейного размера слоя, скорости течения и контактного давления;  $\varepsilon = h_0/L_0 \ll 1$  – малый параметр, характеризующий тонкость пластического слоя. Примем, что  $p_0 = \sigma_{s1}/\varepsilon$ ,  $v_0 = -(dh(t_0)/dt)/\varepsilon$ . Тогда, в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \varepsilon \frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{v} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_1, \quad (11)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{3} \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (12)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{3} \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{v} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_2, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad \text{в } S_1 \cup S_2, \quad (14)$$

где  $\delta = \sigma_{s1}/\sigma_{s2}$ .

Динамические условия (4),(5) на  $\Gamma_{12}$  (черточки над безразмерными величинами убираем) разрешим относительно контактного давления:

$$(p_1 - p_2) \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) = \varepsilon A, \quad p_1 - p_2 = \varepsilon B, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} A &\equiv \left[ \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{2}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right], \\ B &\equiv \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \\ &+ \left[ \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{2}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Как видно из (15),  $p_1 - p_2$  есть малый параметр, который определяется однозначно, если:

$$A + B \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \quad (16)$$

или:

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \left( \frac{\partial \varphi_0^2}{\partial x} - 1 \right) = \\ & = 2 \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Аналогично поступаем с динамическими условиями (7),(8) на свободной границе:

$$p_k \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) = \varepsilon A_1, \quad p_k = \varepsilon B_1, \quad (17)$$

где  $p_k$  – малый параметр, определяемый однозначно, если только

$$\left( \frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \varphi_k^2}{\partial x} - 1 \right) = 2 \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} - \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right). \quad (18)$$

Если отказаться от условий (16) и (18), то, в главном приближении, ( $\varepsilon = 0$ ) исходная краевая задача для «вязкой жидкости» сводится к известной задаче о растекании слоя, составленного из идеально-пластического материала, в приближении «идеальной жидкости» относительно искомым переменных  $u, v, p$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad \text{в } S_1 \\ p_1 &= p_2 \quad \text{на } \Gamma_{12}, \\ p_k &= 0 \quad \text{на } \Gamma_k (k = 1, 2). \end{aligned}$$

Отметим, что уравнение несжимаемости (14), а также кинематические граничные условия (6) и (9) остаются без изменения.

**4. Задача о свободном растекании пластического слоя, состоящего из разных сред, в постановке модели «идеальной жидкости».** В рамках упрощенной постановки ставится краевая задача течения тонкого пластического слоя в клиновидной области, составленной из двух разных сред. Пусть пластический слой постоянной толщины в начальный момент имеет форму клиновидной области и состоит из двух разных сред с начальными углами раствора  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно (рис.2). Предположим, что такой слой свободно растекается между параллельно сближающимися жесткими шероховатыми плитами. Подобная задача, в условиях симметрии области, в постановке «модели идеальной жидкости» решена в [5].

Выберем неподвижную систему координат  $oxy$ , в которой в начальный момент  $t = t_0$  указанная область задается углом  $\beta_2 \geq 0$ . При этом уравнения границ растекающейся области в начальный момент заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : y &= k_1 x, \quad k_1 > 0, \\ \Gamma_2 : y &= k_2 x, \quad k_2 \leq 0, \\ \Gamma_{12} : y &= k_0 x, \end{aligned}$$

где  $k_1, k_2, k_0$  определяются через  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\beta_2$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_2 &= -k_2, \\ \operatorname{tg} (\alpha_2 - \beta_2) &= k_0, \\ \operatorname{tg} [\alpha_1 + (\alpha_2 - \beta_2)] &= k_1. \end{aligned}$$

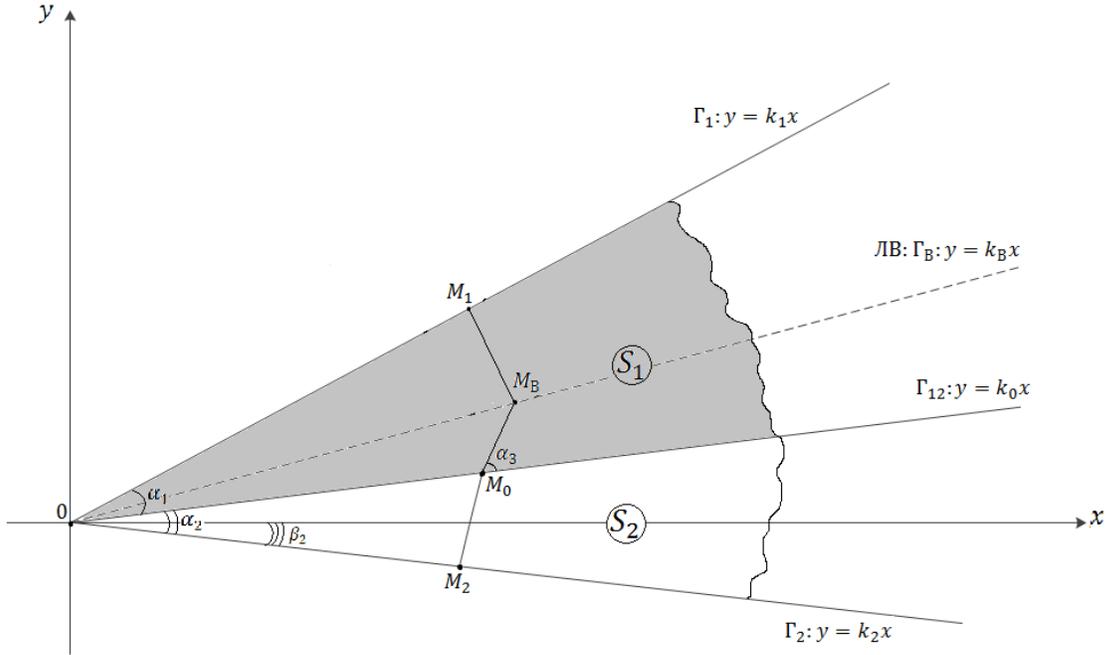


Рис. 2. О растекании в клиновидной области пластического слоя, состоящего из двух разных сред

Выпишем основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости (в размерных величинах, ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tau_{sk}}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= 0, \end{aligned}$$

а также условия на неизвестной границе раздела двух сред  $\Gamma_{12} (y = \varphi_0(x, t), t > t_0)$ , которая в начальный момент задана уравнением  $\varphi_0(x, t_0) = k_0x$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= p_2, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= v, \end{aligned}$$

и на неизвестных свободных границах  $\Gamma_m (y = \varphi_m(x, t), t > t_0, m = 1, 2)$ , которые в начальный момент также известны ( $\varphi_m(x, t_0) = k_mx$ ):

$$\begin{aligned} p &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} &= v. \end{aligned}$$

Здесь  $p, u, v$  – контактное давление и скорости течения;  $\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk} (k = 1, 2)$  – предел текучести пластического материала в области  $S_1$  и  $S_2$  соответственно, причем

для определенности положим, что  $\sigma_{s1} \leq \sigma_{s2}$ ;  $h = h(t)$  – известный закон изменения толщины слоя;  $\lambda(t) = \ln(h_0/h(t))$  – степень деформации;  $h_0 = h(t_0)$ . Пусть  $L_0$  – характерное значение линейного размера слоя. Вводя безразмерные величины:

$$\varepsilon = h_0/L_0, \quad \delta = \sigma_{s1}/\sigma_{s2} \geq 1, \quad p_0 = \sigma_{s1}/\varepsilon, \quad v_0 = -(dh(t_0)/dt)/\varepsilon,$$

перепишем соотношения задачи в безразмерных величинах:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_1, \quad (20)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (21)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad \text{в } S_2 \quad (22)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad \text{в } S_1 \cup S_2, \quad (23)$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad \text{на } \Gamma_{12}, \quad (25)$$

$$\bar{p} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad \text{на } \Gamma_k (k = 1, 2). \quad (27)$$

Задача решается в безразмерных величинах. Для удобства записи черточки над безразмерными величинами ниже опускаем. Как известно [1], внутри области течения существует линия ветвления течения, образованная пересечением двух различных линий тока и на которой  $u^2 + v^2 = 0$ . С другой стороны, при  $h = h(t)$  линиями тока служат прямые, ортогональные к контуру свободно растекающегося пластического слоя. Пусть  $M_0(x_0, y_0)$  – некоторая точка на линии раздела двух сред  $\Gamma_{12}$ . Для определенности положим, что:

$$\sigma_{s1} \sin \alpha_1 \geq \sigma_{s2} \sin \alpha_2. \quad (28)$$

Предположение (28) означает лишь, что линия ветвления течения в начальный момент  $t = t_0$  располагается в области  $S_1$ . Поэтому продолжим линию тока, исходящую из области  $S_2$ , в область  $S_1$ , отсчитывая от точки  $M_0 \in \Gamma_{12}$ . Для этого найдем угол преломления  $\pi/2 - \alpha_3$  линии тока в точке  $M_0$  [5]:

$$\frac{dp(s)}{ds} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \cos \alpha_3,$$

$$\delta \cos \alpha_3 = \sin \alpha_2, \quad (29)$$

где  $s$  – параметр длины дуги вдоль линии  $\Gamma_{12}$ . Формула (29) означает, что при пересечении линии раздела двух пластических сред линия тока преломляется, причем угол

преломления увеличивается при прохождении в «менее плотную» среду (аналогия с оптикой). Из (29) следует, что все линии тока входят в область  $S_2$  под постоянным углом к оси  $ox$ . Теперь, зная линию тока, исходящую из точки  $M_0 \in \Gamma_{12}$ , можем найти на ней точку  $M_B(x_B, y_B)$  ветвления течения из следующего условия:

$$\frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{1}{\delta} (OM_0 \sin \alpha_2) + \frac{2}{\sqrt{3}h} (M_0M_B) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1x_B - y_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} \quad (30)$$

В (30) справа стоит выражение для контактного давления в точке  $M_B$ , найденного вдоль другой линии тока, исходящей от контура  $\Gamma_1$ , причем величина:

$$s = \frac{|k_1x_B - y_B|}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{k_1x_B - y_B}{\sqrt{1+k_1^2}},$$

есть расстояние от точки  $M_B$  до границы  $\Gamma_1$ .

Находим оставшиеся в (30) величины:

$$OM_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = x_0 \sqrt{1+k_0^2}.$$

Уравнение прямой  $M_0M_B$ :

$$y_0 - y = \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3)(x - x_0), \quad (31)$$

где  $\beta_0 \equiv \operatorname{arctg} k_0 \geq 0$ .

Из (29) получаем:

$$k_5 \equiv \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg} \beta_0 + \operatorname{tg} \alpha_3}{1 - \operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \alpha_3} = \frac{k_0 \sin \alpha_2 + \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}{\sin \alpha_2 - k_0 \sqrt{\delta^2 - \sin^2 \alpha_2}}. \quad (32)$$

С другой стороны:

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}[(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_2] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) + \operatorname{tg} \beta_2}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) \operatorname{tg} \beta_2} = \frac{k_0 - k_2}{1 + k_0 k_2};$$

$$\sin \alpha_2 = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2}} = \frac{k_0 - k_2}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} > 0. \quad (33)$$

Подставим (33) в (32) и найдем  $k_5$  в зависимости от  $k_2$ ,  $k_0$  и  $\delta$ :

$$k_5 = \frac{k_0(k_0 - k_2) + \sqrt{\delta^2(1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{(k_0 - k_2) - k_0 \sqrt{\delta^2(1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}. \quad (34)$$

В частности, при  $\delta = 1$  (т.е. пластическая среда – однородная) из (34) и (31) соответственно получаем:

$$k_5 = -\frac{1}{k_2}, \quad M_0M_B = \sqrt{(y_B - y_0)^2 + (x_B - x_0)^2} = |x_B - x_0| \sqrt{1 + k_5^2}, \quad (35)$$

где учтено, что

$$y_B = y_0 + k_5(x_B - x_0) = k_0 x_0 + k_5(x_B - x_0).$$

Подставим (33), (34), (35) в (30):

$$\frac{1}{\delta} \left( x_0 \sqrt{1 + k_0^2} \right) \sin \alpha_2 + |x_B - x_0| \sqrt{1 + k_5^2} = \frac{k_1 x_B - (y_0 + k_5(x_B - x_0))}{\sqrt{1 + k_1^2}}.$$

Разрешим последнее соотношение относительно  $x_B$  ( $x_B \geq x_0$ ):

$$x_B = x_0 \frac{f_1(k_1, k_2, k_0, \delta)}{f_2(k_1, k_2, k_0, \delta)}, \quad (36)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv -\frac{1}{\delta} \sqrt{1 + k_0^2} \sin \alpha_2 + \sqrt{1 + k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \\ &= -\frac{1}{\delta} \frac{\sqrt{1 + k_0^2} (k_0 - k_2)}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} + \sqrt{1 + k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1 + k_1^2}}; \\ f_2 &\equiv \sqrt{1 + k_5^2} - \frac{k_1 - k_5}{\sqrt{1 + k_1^2}}. \end{aligned}$$

Как видно из (35), (36), линия ветвления (ЛВ) в момент  $t = t_0$  есть прямая:

$$y_B = k_B x_B, \quad k_B \equiv \frac{f_1 k_5 + f_2 (k_0 - k_5)}{f_1}. \quad (37)$$

В частности, при  $\delta = 1$  формула (37) упрощается:

$$k_B = \frac{k_2 \sqrt{1 + k_1^2} + k_1 \sqrt{1 + k_2^2}}{\sqrt{1 + k_1^2} + \sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$\arctg k_B - \arctg k_2 = \arctg k_1 - \arctg k_B = \frac{1}{2} (\arctg k_1 - \arctg k_2).$$

Последняя формула означает, что для однородного пластического слоя линия ветвления равноотстоит от линий свободных контуров  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Если дополнительно принять, что  $k_2 = -k_1$  то получаем:

$$k_B = 0,$$

т.е. линия ветвления совпадает с осью  $ox$ .

Получим теперь зависимости для контактного давления и скорости течения в начальный момент. Рассмотрим сперва область  $S_{1B}$ , ограниченную линиями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_B$ . Линия тока, проходящая через точку  $M(x, y) \in S_{1B}$ :

$$y - y_B = -\frac{1}{k_1} (x - x_B).$$

Последнее условие, с учетом (37), разрешается относительно  $x_B$ :

$$x_B = \frac{k_1 y + x}{k_1 k_B + 1}$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x - y)}{\sqrt{1 + k_1^2}}, \\
 V(x, y) &= \frac{d\lambda}{dt} |x_B - x| \sqrt{1 + \frac{1}{k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x) \sqrt{1 + k_1^2}}{k_1} = \\
 &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{\sqrt{1 + k_1^2}}{k_1 k_B + 1} (y - k_B x), \\
 u &= -V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = -V \sin \beta_1 = -\frac{V k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = \\
 &= -\frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 (y - k_B x)}{k_1 k_B + 1}, \\
 v &= V \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = V \cos \beta_1 = \frac{V}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x)}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1}, \quad (38)
 \end{aligned}$$

где  $\beta_1 \equiv \arctg k_1 > 0$ .

Рассмотрим теперь область  $S_{B0}$ , ограниченную линиями  $\Gamma_B$  и  $\Gamma_{12}$ . Линия тока, проходящая через точку  $M(x, y) \in S_{B0}$ , имеет вид:

$$y - y_B = k_5 (x - x_B).$$

Разрешим последнее условие относительно  $x_B$ :

$$x_B = \frac{y - k_5 x}{k_B - k_5}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= p(M_B) + \frac{2}{\sqrt{3}h} (M_B M) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1 + k_1^2}} + \\
 &+ \frac{2}{\sqrt{3}h} \sqrt{(y - y_B)^2 + (x - x_B)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}h} \left( \frac{y - k_5 x}{k_B - k_5} \right) \frac{(k_1 - k_B)}{\sqrt{1 + k_1^2}} + \\
 &\frac{2}{\sqrt{3}h} \left( \frac{y - k_B x}{k_B - k_5} \right) \sqrt{1 + k_5^2}, \quad (39) \\
 V(x, y) &= \frac{d\lambda}{dt} (M_B M) = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} = \\
 &= \frac{d\lambda}{dt} |x - x_B| \sqrt{1 + k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) \sqrt{1 + k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_5^2} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5}, \\
 u &= -V \cos(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V}{\sqrt{1 + k_5^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5}, \\
 v &= -V \sin(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V \operatorname{tg}(\alpha_3 + \beta_0)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha_3 + \beta_0)}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) k_5 = \\
 &= -\frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5}. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим, наконец, область  $S_{B2}$ , ограниченную линиями  $\Gamma_{12}$  и  $\Gamma_2$ . Линия тока, проходящая через точку  $M(x, y) \in S_{B2}$ , имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k_2}(x - x_0).$$

Разрешим последнее условие относительно :

$$x_0 = \frac{k_2 y + x}{k_2 k_0 + 1}.$$

Тогда,

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{|k_2 x - y|}{\sqrt{1 + k_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{-k_2 x + y}{\sqrt{1 + k_2^2}}.$$

Скорость течения в точке  $M_0$  допускает разрыв. Найдем скорость в точке  $M_0$ , со стороны рассматриваемой части области течения, используя непрерывность нормальной скорости, а также условие (39):

$$V(M_{02}) = V(M_{01}) \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2} = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_5^2} \frac{y_0 - k_B x_0 \sin \alpha_3}{k_B - k_5 \cos \alpha_2}.$$

С другой стороны, согласно (29) и (33),

$$\begin{aligned} \cos \alpha_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha_2}} = \frac{1 + k_0 k_2}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \\ \sin \alpha_3 &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} = \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2} \sin^2 \alpha_2} = \\ &= \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta \sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}, \end{aligned}$$

В результате,

$$V(M_{02}) = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_5^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_2 k_0 + 1)} x_0,$$

$$\begin{aligned} V(x, y) &= V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (M_0 M) = V(M_{02}) + \\ &+ \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (x_0 - x) \frac{\sqrt{1 + k_2^2}}{-k_2} = \\ &= \frac{d\lambda}{dt} \psi(x, y), \end{aligned}$$

$$\psi \equiv \frac{1}{k_2 k_0 + 1} \left[ \psi_1 - \sqrt{1 + k_2^2} (y - k_0 x) \right],$$

$$\psi_1 \equiv \sqrt{1 + k_5^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_2 k_0 + 1)} (k_2 y + x),$$

$$u(x, y) = -V(M) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \beta_2 \right) = -V(M) \sin \beta_2 = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi k_2}{\sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$v(x, y) = -V(M) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_2\right) = -V(M) \cos \beta_2 = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi}{\sqrt{1+k_2^2}}. \quad (41)$$

Итак, нашли распределение  $p, u, v$  во всей области течения в начальный момент. Покажем, что линии  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$  остаются прямыми. Допустим, что они остаются прямыми, то есть их можно задать уравнениями:

$$\Gamma_1 : y = k_1(t) x, \quad (42)$$

$$\Gamma_2 : y = k_2(t) x, \quad (43)$$

$$\Gamma_{12} : y = k_0(t)x.$$

Подставим (42) в кинематические условия (27):

$$\Gamma_1 : \dot{k}_1 x - k_1 \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1},$$

в которой использованы формулы (38) относительно скоростей, а  $y = k_1 x$ . Или:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \dot{k}_1 - \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1^2(k_1 - k_B)}{k_1 k_B + 1} &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{(k_1 - k_B)}{k_1 k_B + 1}, \\ \Gamma_1 : \frac{dk_1}{d\lambda} &= \frac{(k_1 - k_B)(1 + k_1^2)}{k_1 k_B + 1}. \end{aligned} \quad (44)$$

Аналогично получаем дифференциальное уравнение относительно  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_2 : \dot{k}_2 x + k_2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi k_2}{\sqrt{1+k_2^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi}{\sqrt{1+k_2^2}},$$

где  $\psi$  определяется из (41), в которой  $y = k_2 x$ :

$$\psi(x) = \psi_0 x,$$

$$\psi_0 \equiv \frac{1}{k_2 k_0 + 1} \left[ \psi_2 - \sqrt{1+k_2^2} (k_2 - k_0) \right],$$

$$\psi_2 \equiv \sqrt{1+k_2^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2(1+k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta(k_2 k_0 + 1)} (k_2^2 + 1),$$

или

$$\Gamma_2 : \frac{dk_2}{d\lambda} = -\psi_0 \sqrt{1+k_2^2}. \quad (45)$$

В частности, при  $\delta = 1$  и  $k_2 = -k_1$  формулы (44) и (45) упрощаются:

$$\Gamma_1 : \frac{dk_1}{d\lambda} = k_1 (1 + k_1^2),$$

$$\Gamma_2 : \frac{dk_2}{d\lambda} = k_2 (1 + k_2^2), \quad \psi_0 = -k_2 \sqrt{1+k_2^2},$$

т.е. получили известное дифференциальное уравнение задачи о растекании однородного пластического слоя, занимающей область формы клина.

И, наконец, третье дифференциальное уравнение (25) относительно  $\Gamma_{12}$ :

$$\Gamma_{12} : \dot{k}_0 x - k_0 \frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5},$$

где использованы формулы (40) для скоростей, в которых  $y = k_0x$ . Или,

$$\Gamma_{12} : \frac{dk_0}{d\lambda} = \frac{(k_0 - k_B)(k_0 - k_5)}{k_B - k_5}. \quad (46)$$

Система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка (44), (45), (46) в общем случае решается численными методами. В результате получаем законы (42) изменения границ пластических областей в процессе растекания. Таким образом, мы представили в полном виде точное решение несимметричной задачи о растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев, в «модели идеальной жидкости». **5. Заключение.** 1. В работе обсуждается краевая задача течения в тонком пластическом слое, которая в общей, первоначальной постановке впервые нашла применение в работах автора – все предыдущие исследователи ограничивались упрощенной ее постановкой. 2. Представлено в полном виде точное решение несимметричной задачи о растекании пластического слоя, составленного из двух клиньев, в модели «идеальной жидкости». Показано, что границы этих клиньев остаются прямыми в процессе растекания. Выведены уравнения для эволюции их границ. Установлено, что линия ветвления течения остается прямой в процессе растекания. Получена формула для нахождения линии ветвления течения. Проверено, что полученное решение не удовлетворяет одному из динамических условий на границе раздела двух пластических сред в виде (16), (18). Отметим, что ранее (в задаче о растекании пластического слоя в области с неподвижными границами) было показано, что полученные на основе упрощенной модели решения не согласуются с результатами эксперимента [6]. 3. Для решения задач течения в тонком пластическом слое в общей постановке предлагается известный метод погранслоя, разработанный применительно к указанным задачам в работах автора [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ильюшин А. А. Труды (1946-1966). Т.2. Пластичность. М. : Физматлит, 2004. 480с.
- [2] Prandtl L.// ZAMM. 1923. №3(6). P.401–406.
- [3] Кийко И. А. Теория пластического течения. М.: МГУ, 1978. 75 с.
- [4] Белов Н. А. , Кадымов В.А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами// Изв.РАН. МТТ. 2011. №1. С.46–58.
- [5] Кадымов В. А. Математическое моделирование контактных задач пластического течения, 2016. 129 с.
- [6] Кадымов В. А., Сосенушкин Е. Н., Белов Н. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора// Изв.МАМИ. 2013. №2(16). Т.2. С. 206–212.

V. A. Kadymov

**CONTACT BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE  
PIECEWISE-HOMOGENEOUS PLASTIC LAYER SPREADING ON A PLANE**

*Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia*

**Abstract.** In the middle of last century A. Il'yushin suggested an efficient two-dimensional, averaged on the layer thickness, mathematical theory of the thin plastic layer flow between two converging rigid plates, formulated the boundary-value problem for «viscous fluid» regarding three unknown functions, two components of velocity and contact pressure. Besides he pointed out the possibility of simplification of the formulation of boundary-value problem till the flow for «ideal fluid». It should be noted, that all successive researchers used the same approach. The flows of plastic layer, which are impossible to describe with the help of «ideal fluid» model, are being considered. For their correct description it is necessary to use the model of «viscous fluid», or the simplified theory of boundary layer, which for indicated problems is developed in the works of the author.

**Keywords:** : the thin plastic layer; the boundary value problem; a free flow in the plane.

**REFERENCES**

- [1] Il'yushin A. A. Trudy (1946-1966). T.2. Plastichnost'. M. : Fizmatlit, 2004. 480s. (in Russian)
- [2] Prandtl L.// ZAMM. 1923. №3(6). P.401–406.
- [3] Kijko I. A. Teoriya plasticheskogo techeniya. M.: MGU, 1978. 75 s. (in Russian)
- [4] Belov N. A. ., Kadymov V.A. O kraevoy zadache techeniya plasticheskogo sloya mezhdru sblizhayushchimisya zhestkimi plitami// Izv.RAN. MTT. 2011. №1. S.46–58. (in Russian)
- [5] Kadymov V. A. Matematicheskoe modelirovanie kontaknyh zadach plasticheskogo techeniya, 2016. 129 s. (in Russian)
- [6] Kadymov V. A., Sosenushkin E. N., Belov N. A. Eksperimental'nye issledovaniya po plasticheskoy osadke mezhdru nepodvizhnymi stenkami tonkih polos v forme pryamougol'nika i sektora// Izv.MAMI. 2013. №2(16). T.2. S. 206–212. (in Russian)

---

*Kadimov Vagid Ahmedovich,*  
e-mail: vkadymov@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow State University of Humanities and Economics, Moscow, Russia.