

Р. И. Непершин

## СДАВЛИВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ СФЕРЫ ПЛОСКИМИ ШТАМПАМИ

*Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия*

**Аннотация.** Приведено моделирование пластического сдавливания жесткопластической сферы плоскими штампами при условии полной пластичности на ребре призмы Треска. Рассчитываются линии скольжения, напряжения и скорости пластического течения с учетом контактного трения, изменения границ пластической области и формы сферы. Результаты работы представляют интерес для оценки предельной нагрузки и формоизменения сферы при больших перемещениях штампов.

**Ключевые слова:** сжатие сферы, плоский штамп, идеальная пластичность, осевая симметрия, условие полной пластичности, линии скольжения, напряжения, скорости течения, контактное трение.

УДК: 539. 374

**Введение.** Первая задача осесимметричного пластического течения идеально пластического тела при давлении плоского кругового штампа и вдавливании жесткой сферы в пластическое полупространство при условии полной пластичности решена А.Ю. Ишлинским [1-3]. В последующих работах Р. Шилда [4,5] получены уравнения кинематики пластического течения, ассоциированные с ребром условия пластичности Треска, показана непрерывность скоростей на жесткопластических границах, и получены сингулярные поля скоростей в окрестности оси симметрии для гладкого плоского штампа и штампа с максимальным контактным трением.

В [6] решение А.Ю. Ишлинского о вдавливании гладкой сферы дополнено расчетами поля скоростей пластического течения с проверкой положительности диссипативной функции. В [7-10] задача А.Ю. Ишлинского о вдавливании плоского кругового штампа и сферы рассматривалась с учетом контактного трения и изменения формы свободной границы пластической области. Показано, что искривление свободной пластической границы в процессе вдавливания жесткой гладкой сферы незначительно влияет на среднее контактное давление, полученное А.Ю. Ишлинским для прямолинейной свободной границы.

---

© Непершин Р. И., 2018

*Непершин Ростислав Иванович*

**e-mail:** nepershin\_ri@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва, Россия.

Поступила 15.01.2018

В настоящей работе представлено моделирование обратной задачи о пластическом сдавливании жесткопластической сферы плоскими штампами при изменении границы контакта и свободной пластической границы деформируемой сферы с учетом контактного трения. Свободная пластическая граница принимается прямолинейной и вычисляется из условия несжимаемости с последующими вычислениями линий скольжения, напряжений, скоростей перемещений и контролем положительности диссипативной функции. Предположение о линейности свободной границы пластической области подтверждается практически линейной формой смещения этой границы по расчетному полю скоростей при малом перемещении штампов.

Результаты моделирования представляют интерес для оценки предельной нагрузки на жесткопластическую сферу по пластическому отпечатку и пластического формирования сферы в диск, сжимаемый жесткими штампами.

**Форма деформируемой сферы.** При сжатии жесткопластической сферы плоскими штампами образуются круговые границы контакта с выдавливанием материала на свободную поверхность сферы. Свободная пластическая граница выдавливаемого материала, определяющая область двухмерного пластического течения, принимается прямолинейной с непрерывной касательной к недеформируемой части сферы. Это предположение подтверждается ниже практически линейным смещением свободной границы пластической области по расчетному полю скоростей при малом перемещении штампов на различных стадиях деформирования сферы.

Изменение формы сферы с увеличением радиуса контакта, длины и угла наклона свободной границы пластической области при сжатии сферы определяется условием пластической несжимаемости материала в координатах  $r, z$  с началом отсчета в центре неподвижной сферы. В этих координатах расчетная область имеет плоскость симметрии  $z = 0$ . Вследствие осевой симметрии задача рассматривается в первом квадранте плоскости  $r, z$  (рис. 1). Радиус  $R$  недеформированной сферы принимается за характерный размер. При перемещении  $s$  штампа относительно начальной точки контакта с недеформированной сферой (показана штриховой линией) образуется граница контакта с радиусом  $r_A$  и свободная граница  $AB$  длиной  $l$  касательная к недеформируемой сфере с углом наклона  $\alpha$  к границе плиты. Деформируемый сегмент сферы с высотой  $1 - \cos \alpha$  принимает форму усеченного конуса с высотой  $h$ . Из условия пластической несжимаемости следует равенство объема сегмента сферы и усеченного конуса, приводящее к кубическому уравнению для  $h$  при заданном угле  $\alpha$

$$h^3 - 3h(h \cos \alpha - \sin^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha. \quad (1)$$

Переменные  $r_A, l$  и  $s$  связаны с  $\alpha$  и  $h$  соотношениями

$$r_A = \sin \alpha - l \cos \alpha, \quad l = h / \sin \alpha, \quad s = 1 - h - \cos \alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2)$$

При  $\alpha = 0$  и  $s = 0$  уравнение (1) имеет решение  $h = 0$ . При  $\alpha = \pi/2$  из уравнения (1) находим  $h = 2/3$  и  $s = 1/3$ . При  $0 < \alpha < \pi/2$  уравнение (1) решаем по формулам Кардано для переменной  $l = h / \sin \alpha$ , так как при малых углах  $\alpha$  левая и правая части в уравнении (1) стремятся к нулю. Кубическое уравнение для переменной  $l$  имеет вид

$$l^3 + al^2 + bl = c, \quad (3)$$

где

$$a = -3 \operatorname{tg} \alpha, \quad b = 3 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad c = (1 - \cos \alpha)^2 (2 + \cos \alpha) / (\sin \alpha \cos^2 \alpha).$$

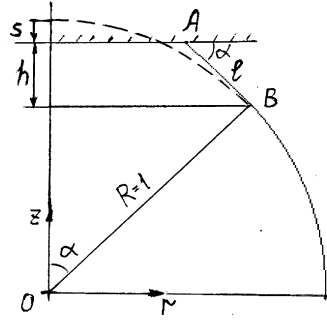


Рис. 1. Сдавливание жесткопластической сферы плоским штампом

Подстановка  $l = u + \operatorname{tg} \alpha$  приводит уравнение (3) к виду  $u^3 = c - \operatorname{tg}^3 \alpha$  с одним действительным корнем для переменной  $u$ , и решение уравнений (3) и (1) имеет вид

$$l = (c - \operatorname{tg}^3 \alpha)^{1/3} + \operatorname{tg} \alpha, \quad h = l \sin \alpha, \quad (4)$$

где  $c$  — правая часть уравнения (3). При  $\alpha = \pi/2$  и  $s = 1/3$  сфера деформируется в цилиндр, сжимаемый плоскими штампами с отношением диаметра к высоте цилиндра  $D/H = 3/2$ . При  $s > 1/3$  происходит сжатие цилиндра с увеличением отношения  $D/H$ , которое исследовано в [11]. При больших отношениях  $D/H$  при сжатии тонкого диска среднее давление  $q$  на границах контакта определяется отношением  $D/H$  и коэффициентом пластического трения  $\mu$

$$q = 1 + 1/3\mu D/H, \quad 0 < \mu < 0.5. \quad (5)$$

**Линии скольжения.** Осесимметричное пластическое течение при сдавливании сферы плоскими штампами происходит сдвигом материального элемента по двум плоскостям скольжения при условии полной пластичности на ребре призмы Треска. В пространстве главных напряжений, отнесенных к напряжению текучести  $\sigma_Y = 1$ , при положительной радиальной скорости  $V_r$  условие полной пластичности имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = \sigma_1, \quad (6)$$

где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  — главные напряжения в плоскости  $r, z$  и  $\sigma_3 = \sigma_\theta$  — нормальное напряжение в окружном направлении. Дифференциальные уравнения равновесия осесимметричной задачи пластичности при условии (6) относятся к гиперболическому типу с характеристиками, совпадающими с ортогональными линиями скольжения  $\xi, \eta$  на плоскости  $r, z$  [3]

$$dz/dr = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{для } \xi, \quad dz/dr = -\operatorname{ctg} \varphi \quad \text{для } \eta, \quad (7)$$

где  $\varphi$  — угол наклона касательной к линии скольжения  $\xi$  с осью  $r$ . Вдоль линий скольжения касательные напряжения максимальны  $\tau = 1/2$ , а нормальные напряжения  $\sigma = 1/2(\sigma_1 - \sigma_2)$  и угол  $\varphi$  удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$d\sigma - d\varphi = (dr + dz)/2r \quad \text{вдоль } \xi, \quad d\sigma + d\varphi = (dr - dz)/2r \quad \text{вдоль } \eta. \quad (8)$$

Уравнения (7) и (8) при заданных статических граничных условиях представляют замкнутую систему для координат  $r, z$  и переменных  $\sigma$  и  $\varphi$ . Напряжения в цилиндрических координатах определяются по формулам

$$\sigma_r = \sigma - \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_z = \sigma + \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad \sigma_\theta = \sigma + \frac{1}{2}, \quad \tau_{rz} = \frac{1}{2} \cos 2\varphi. \quad (9)$$

При расчете линий скольжения и скоростей перемещений в пластической области за характерный размер принимаем радиус контакта  $r_A = 1$  с началом координат  $r, z$  в центре границы контакта (рис. 2). Линии скольжения определяются граничными условиями сжатия вдоль границы  $AB$  с длиной  $l$  и углом наклона  $\alpha$

$$\sigma_2 = -1, \quad \sigma_1 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma = -\frac{1}{2}, \quad \varphi = \pi/4 - \alpha, \quad (10)$$

контактным трением  $\mu$  на границе скольжения  $AF$

$$\varphi = \gamma - \pi/2, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu), \quad 0 < \mu < \frac{1}{2} \quad (11)$$

и условием симметрии  $\tau_{rz} = 0$  на оси  $z$  в точке  $G$

$$\varphi = -\pi/4, \quad r = 0. \quad (12)$$

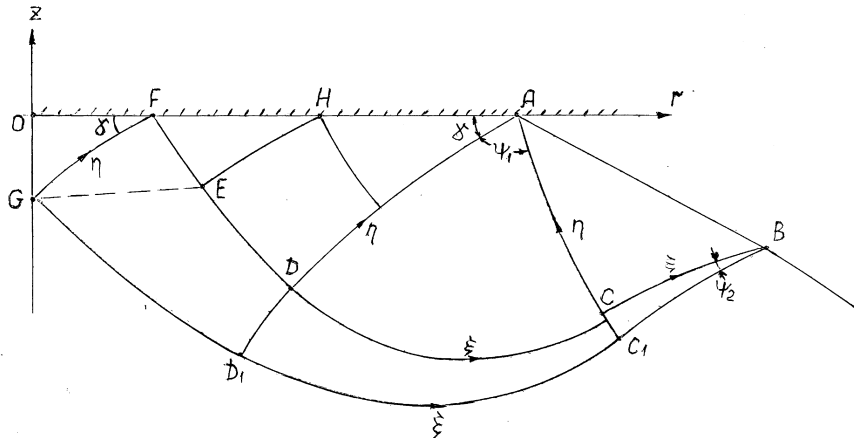


Рис. 2. Пластическая область при сдавливании сферы плоским штампом

Линии скольжения и распределение напряжений в пластической области вычисляются численным интегрированием уравнений (7) и (8) с граничными условиями (10) — (12) с использованием конечно-разностной аппроксимации и вычислительных процедур решения краевых задач Коши, Гурса и смешанного типа, приведенных в [10,11]. В области  $ABC$  решается задача Коши от границы  $AB$  с координатами узловых точек  $r = 1 + i\Delta l \cos \alpha$ ,  $z = -i\Delta l \sin \alpha$ ,  $\Delta l = l/N$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  и граничными условиями (10). Используется циклическая процедура с возобновлением значений  $r, z, \sigma, \varphi$  переменного массива **AB** и передачей их в переменные массивы **ETA** и **KSI**

линий скольжения  $AC$  и  $BC$ . Затем решается задача Гурса для центрированных линий скольжения с вырожденными  $\xi$  и  $\eta$  линиями скольжения в точках  $A$  и  $B$ . В этих точках  $\sigma$  и  $\varphi$  находятся из уравнений (8) при равенстве нулю правых частей.

В области  $ACD$  решается задача Гурса от линии скольжения  $AC$  и точки  $A$  с увеличением угла веера  $\phi_1$  в точке  $A$  с малым шагом  $\Delta\varphi$  до значения

$$\phi_1 = 3\pi/4 - \alpha - \gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2} \arccos(2\mu),$$

ограниченного углом  $\gamma$ , и возобновлением данных массивов **ETA** и **KSI** на линиях скольжения, проходящих через точки  $A$  и  $C$ . Затем вычисляются линии скольжения в области  $ADEH$  от линии скольжения  $AD$  решением смешанной задачи с условиями (11) на контактной границе и определением точки  $E$  по условию  $\varphi = -\pi/4$ . От точки  $E$  вычисляется траектория  $EG$  главного напряжения  $\sigma_1$  до малой окрестности оси симметрии  $r = \varepsilon$  при приближенном выполнении граничного условия (12). В области  $EHFG$  продолжается решение смешанной задачи от  $\eta$  линии скольжения  $EH$  с граничными условиями (11). В области  $BCDEGD_1C_1$  решается задача Гурса от  $\xi$  линии скольжения  $BCDE$  с вырожденной  $\eta$  линией скольжения в точке  $B$  при увеличении угла веера  $\phi_2$  с малым шагом  $\Delta\varphi$  до выполнения условия  $r \leq \varepsilon$  в точке  $G$ . Координаты траектории  $EG$  находятся решением элементарной задачи Гурса по значениям  $r, z, \sigma, \varphi$  в ближайших к  $EG$  точках  $\eta$  линий скольжения, где  $\varphi < -\pi/4$ , и  $\xi$  линий скольжения, где  $\varphi > -\pi/4$ .

Несущая способность жесткой зоны сферы со свободной границей в точке  $B$  определяется неравенством  $\varphi < \pi/4$ , которое выполняется для всех значений  $r_A, l$  и  $\alpha$  определяющих пластическую область.

В FORTRAN-программе выполняется передача значений  $r, z, \sigma, \varphi$  в переменные массивы **KSI** и **ETA** с выводом на экран монитора узловых точек линий скольжения для контроля вычислительного процесса. По второй формуле (9) вычисляется давление  $p = -\sigma_z$  в точках контактной границы  $AF$ . После вычисления линий скольжения сохраняются значения  $r, z, \sigma, \varphi$  на жесткопластических границах  $BC_1D_1G$  и  $GF$  необходимые для последующего расчета поля скоростей. Нормальные и касательные напряжения на линии скольжения  $BC_1D_1G$  используются для вычисления среднего давления  $q$

$$q = -2 \int_G^B (\sigma \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi) r ds. \quad (13)$$

Для приближения к оси симметрии с точностью  $\varepsilon \approx 0.02$  сетка линий скольжения вычисляется при задании 20 – 30 точек на границе  $AB$  с шагом  $\Delta\varphi = 0.02 - 0.03$  центрированных вееров в точках  $A$  и  $B$ , с числом точек на линии скольжения  $BC_1D_1G$  более 100. При этом число узловых точек сетки линий скольжения достигает нескольких тысяч. При детальном анализе напряженного состояния напряжения (9) могут вычисляться на любой линии скольжения, определяемой переменными массивами **KSI** и **ETA**.

**Поле скоростей.** После вычисления линий скольжения определяются кинематические граничные условия для скоростей перемещений на жесткопластических границах и на границе контакта пластической области с плоскими штампами. Проекция вектора скорости  $V_\xi$  и  $V_\eta$  на линии скольжения  $\xi$  и  $\eta$  удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$dV_\xi - V_\eta d\varphi = -\frac{1}{2}(V_\xi dr - V_\eta dz)/r \quad \text{вдоль } \xi, \quad (14)$$

$$dV_\eta + V_\xi d\varphi = -\frac{1}{2}(V_\xi dz + V_\eta dr)/r \quad \text{вдоль } \eta. \quad (15)$$

Проекции вектора скорости на оси  $r, z$  определяются формулами

$$V_r = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad V_z = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi. \quad (16)$$

В рассматриваемой задаче задана скорость штампа  $V_z = -1$ ,  $V_r = 0$  при  $r = 0$  и неподвижная жесткая область сферы ниже жесткопластической границы  $BC_1D_1G$  (рис. 2). Вследствие непрерывности скоростей на жесткопластических границах  $BC_1D_1G$  и  $FG$ , пересекающих ось симметрии [3], из уравнений (16) следуют граничные условия для скоростей  $V_\xi, V_\eta$

$$V_\xi = V_\eta = 0 \quad \text{на } BC_1D_1G, \quad (17)$$

$$V_\xi = -\sin \varphi, \quad V_\eta = -\cos \varphi \quad \text{на } FG, \quad (18)$$

$$V_\xi = V_\eta \operatorname{tg} \varphi \quad \text{на } AF. \quad (19)$$

Вследствие скачка скорости на оси симметрии в точке  $G$  возникает полярная особенность поля скоростей, которая при  $\varphi = -\pi/4$  имеет вид [5]

$$V_r = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \psi}/\pi, \quad V_z = \operatorname{arccos}(\operatorname{tg} \psi)/\pi - 1, \quad -\pi/4 \leq \psi \leq \pi/4. \quad (20)$$

В случае гладкого штампа при  $\mu = 0$  граница  $FG$  стягивается к центру  $O$  с полярной особенностью скоростей в окрестности этой точки [4]

$$V_r = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\cos 2\psi}{\cos \psi}}, \quad V_z = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\cos 2\psi}{\sin \psi}}, \quad -\pi/4 \leq \psi \leq 0. \quad (21)$$

Условие совместности полей напряжений и скоростей для идеально пластического тела [3] требует проверки положительности диссипативной функции пластического течения, которое для направлений главных напряжений и скоростей деформаций имеет вид

$$D = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 \geq 0, \quad (22)$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3 = V_r/r$  – главные скорости деформаций. Подстановка соотношений (10) в (22) и условие несжимаемости  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$  приводят к неравенствам  $-\varepsilon_2 \geq 0$ ,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_3 \geq 0$  из которых следует неравенство

$$\Gamma + V_r/r \geq 0, \quad (23)$$

где  $\Gamma$  – максимальная скорость сдвига вдоль линий скольжения

$$\Gamma = \frac{\partial V_\xi}{\partial s_\eta} - V_\eta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\eta} + \frac{\partial V_\eta}{\partial s_\xi} + V_\xi \frac{\partial \varphi}{\partial s_\xi}, \quad (24)$$

которая находится при интегрировании уравнений (14) и (15). Скорости  $V_\xi, V_\eta$  находятся численным интегрированием уравнений (14), (15) с граничными условиями

(17) – (19) при вычислении линий скольжения в обратном направлении от жесткопластических границ  $BC_1D_1G$  и  $FG$  с граничным условием (11) на  $AF$ . При этом в уравнениях (14) и (15) координаты  $r, z$  и углы  $\varphi$  известны, и конечно-разностная аппроксимация этих уравнений приводит к линейной системе уравнений для скоростей  $V_\xi, V_\eta$  [10], которые вычисляются в процедуре решения элементарных задач Гурса и смешанного типа.

Массивы данных **KSI** и **ETA** на жесткопластических границ  $BC_1D_1G$  и  $FG$  дополняются значениями скоростей (17), (18). Затем вычисляются линии скольжения, скорости и проверяется неравенство (23) при решении задачи Гурса в области  $D_1DFG$ , задачи смешанного типа в области  $ADF$ , задачи Гурса в области  $ADD_1C_1C$ , задачи Гурса в области  $CC_1B$  и задачи Гурса в области  $ABC$  до свободной границы  $AB$ . В узловых точках линий скольжения определяются скорости (16) и выводятся на экран монитора в виде годографа на плоскости  $V_r, V_z$ .

**Численные результаты.** На рис. 3 и 4 показаны линии скольжения и годограф скоростей при перемещении штампа  $s = 0.0248$  с радиусом контакта  $r_A = 0.312$ , длиной  $l = 0.179$  и углом наклона свободной границы пластической области  $\alpha = 0.4987$  при  $\mu = 0.2$ . Сетка линий скольжения вычислена с числом узлов  $N = 21$  на свободной границе  $AB$  и угловым шагом  $\Delta\varphi = 0.024$  веера линий скольжения в точке  $A$  с углом  $\phi_1 = 1.287$ . Граничные условия (12) выполняются с точностью  $r_G = 0.001$  в окрестности оси симметрии для углового шага  $\Delta\varphi = 0.012$  веера линий скольжения в точке  $B$  с углом  $\phi_2 = 0.144$ . Узловые точки сетки линий скольжения и скорости  $V_r, V_z$  этих точек на плоскости годографа изображаются пикселями на экране монитора.

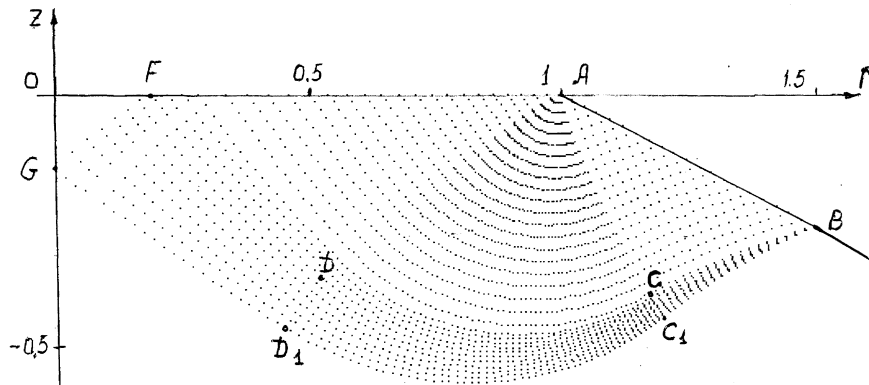


Рис. 3. Линии скольжения при сдавливании сферы при  $s = 0.0248$ ,  $\mu = 0.2$

Полярная особенность (20) поля скоростей в окрестности оси симметрии около точки  $G$  показана на годографе штриховой линией. Жесткопластические границы  $BG$  и  $GF$  линий скольжения на годографе скоростей стягиваются в точки. На ближайших к этим границам линиях скольжения напряжения  $\sigma$  и углы  $\varphi$  непрерывны и близки вследствие малых элементов сетки линий скольжения. Но полярная особенность поля скоростей в окрестности точки  $G$  приводит к быстрому изменению скоростей при переходе к пластической области в узкой полосе жесткопластических границ  $BG$ ,  $GF$  и вдоль линии скольжения  $FB$ . В этих полосах быстрое изменение скоростей

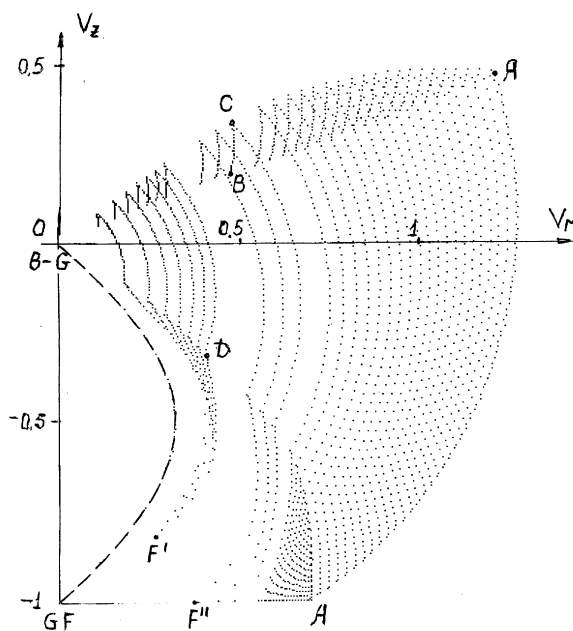


Рис. 4. Годограф скоростей

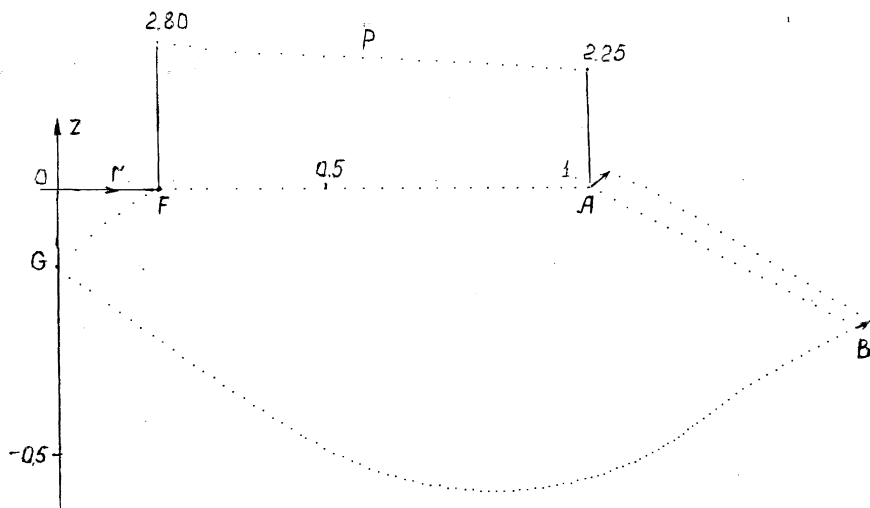


Рис. 5. Жесткопластические границы, контактное давление и смещение свободной границы  $AB$  при  $s = 0.0248$ ,  $\Delta s = 0.05$  и  $\mu = 0.2$



происходит по касательной к указанным линиям скольжения при высокой скорости максимального сдвига  $\Gamma$ . Переход полосы с максимальной скоростью сдвига в точке  $F$  от линии скольжения  $GF$  к линии скольжения  $FB$  показан на годографе точками  $F'$  и  $F''$  в окрестности точки  $F$ . Поле скоростей с границей скольжения  $AF$  изображается на годографе областью  $ADF$ . Остальная часть пластической области изображается на годографе  $\xi$  линиями, стягивающимися к точке  $O$ , с максимальными скоростями в особой точке  $A$ .  $\eta$ -линия скольжения  $ACC_1$ , на которой кривизна  $\xi$  линий скольжения меняет знак (рис. 3), изображается на годографе точками возврата  $\xi$  линий скольжения с полем скоростей областей  $ABC$  и  $BCC_1$ . Граница  $AB$  на годографе прямолинейна с углом наклона  $\approx \pi/4 - \alpha$  с линейным возрастанием вектора скорости от точки  $B$  к точке  $A$ . Диссипативная функция положительна во всей пластической области с положительными значениями обоих слагаемых в неравенстве (23).

На рис. 5 показано распределение давления на границе контакта, жесткопластические границы и смещение границы  $AB$  пластической области при малом перемещении штампа  $\Delta s = 0.05$ . Угол наклона смещенной прямолинейной границы  $AB$  увеличивается на  $\Delta\alpha = 0.05$ . Нормальное давление на контактной границе скольжения  $AF$  возрастает от 2.254 в точке  $A$  до 2.804 в точке  $F$  при среднем давлении  $q = 2.451$  на границе контакта  $OA$ , вычисленном по интегралу (13) на жесткопластической границе  $BG$ .

На рис. 6 и 7 показаны линии скольжения и годограф скоростей, на рис. 8 показана жесткопластическая граница с распределением контактного давления и смещением свободной границы пластической области при перемещении штампа  $\Delta s = 0.05$ , вычисления проводились для параметров  $r_A$ ,  $l$  и  $\alpha$  соответствующих рис. 3-5 при гладкой границе контакта с плитой  $\mu = 0$ . В этом случае жесткая область в центре штампа отсутствует. Точка  $G$  жесткопластической границы  $BG$  совпадает с началом координат  $O$  с точностью 0.001 для линий скольжения, определяемых углами центрированных вееров  $\phi_1 = 1.082$  в точке  $A$  и  $\phi_2 = 0.047$  в точке  $B$  с угловым шагом  $\Delta\varphi = 0.0233$ . На годографе скоростей штриховой линией показана полярная особенность (21), которая порождает быстрое изменение скоростей по касательной к жесткопластической границе  $BG$  в узкой полосе с ближайшей к ней  $\xi$  линией скольжения с высокими значениями максимальной скорости сдвига  $\Gamma$ . Диссипативная функция положительна во всей пластической области. Пластическая область с границей скольжения  $AG$  отображается на годографе областью  $ADG$ . Остальная часть пластической области на годографе определяется центрированными веерами линий скольжения в точках  $A$  и  $B$ , и изменением знака кривизны  $\xi$  линий скольжения на  $\eta$ -линии скольжения  $ACC_1$ , которая отображается точками возврата  $\xi$  линий скольжения на годографе скоростей.

Контактное давление возрастает от 2.095 в точке  $A$  до 3.193 на оси симметрии (рис. 8). Среднее давление  $q = 2.319$  снижается по сравнению с шероховатым штампом при  $\mu = 0.2$ . Линейное возрастание скоростей от точки  $B$  к точке  $A$  на годографе приводит к линейной смещенной границе  $AB$  при малом перемещении штампа  $\Delta s = 0.05$ , за исключением малой окрестности точки  $B$ .

Пластическое деформирование сферы в зависимости от перемещения штампа  $s$  приведено в табл.1. При  $s = 1/3$  радиус контакта  $r_A$  равен радиусу начальной сферы. Граница  $l$  пластической области вертикальна при  $\alpha = \pi/2$ . Деформированная сфера принимает форму цилиндра с отношением  $D/H = 1.5$ .

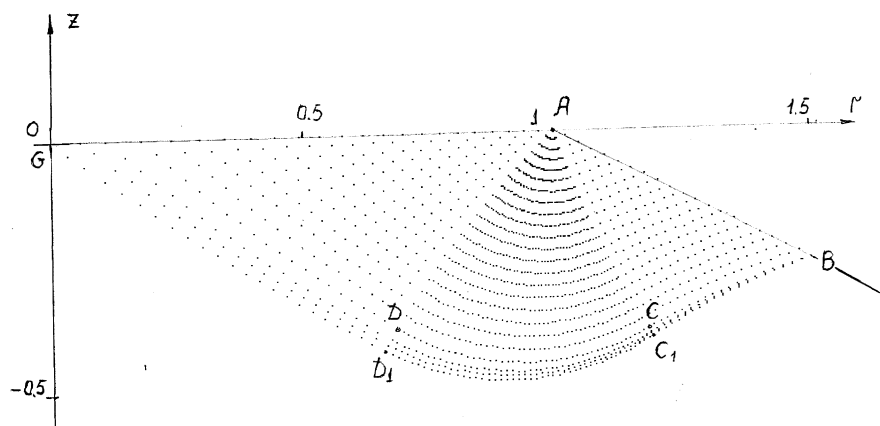


Рис. 6. Линии скольжения при сдавливании сферы при  $s = 0.0248$ ,  $\mu = 0$

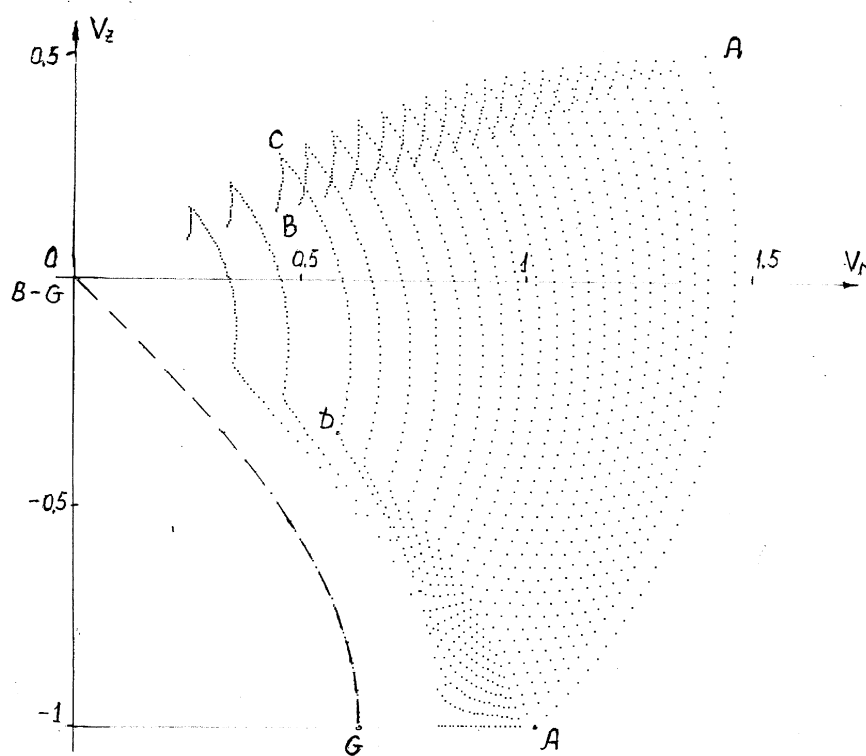


Рис. 7. Годограф скоростей для линий скольжения

В табл. 2 приведены зависимости среднего давления  $q$  от перемещения штампа  $s$  рассчитанные по интегралам (13) для линий скольжения, вычисленных для коэффициентов трения  $\mu = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ . При увеличении  $s$  угол  $\alpha$  наклона границы  $l$

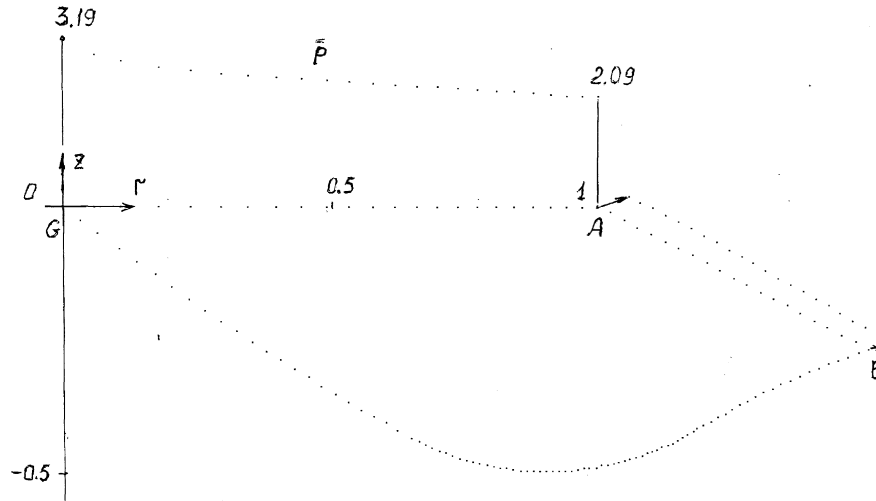


Рис. 8. Жесткопластические границы, контактное давление и смещение свободной границы  $AB$  при  $s = 0.0248$ ,  $\Delta s = 0.05$  и  $\mu = 0$

Таблица 1. Пластическое деформирование сферы

$s$	$r_A$	$l$	$\alpha$	$s$	$r_A$	$l$	$\alpha$
0.001	0.055	0.032	0.087	0.100	0.550	0.336	0.873
0.004	0.110	0.065	0.174	0.121	0.606	0.372	0.960
0.009	0.165	0.097	0.262	0.145	0.661	0.410	1.047
0.016	0.220	0.130	0.349	0.170	0.717	0.449	1.135
0.025	0.275	0.163	0.436	0.198	0.772	0.489	1.222
0.036	0.330	0.196	0.524	0.228	0.829	0.531	1.309
0.049	0.385	0.230	0.611	0.261	0.885	0.574	1.396
0.064	0.440	0.265	0.698	0.296	0.942	0.619	1.484
0.081	0.495	0.300	0.785	0.333	1.000	0.667	1.571

пластической области увеличивается. Угол  $\phi_1$  верха линий скольжения и давление в точке  $A$  уменьшаются, что приводит к снижению среднего давления  $q$ . Увеличение коэффициента трения  $\mu$  в указанном интервале приводит к небольшому увеличению давления  $q$ . При  $s > 1/3$  происходит пластическое сжатие тонкого диска с увеличением отношения  $D/H$  и среднего давления (5). Сила сопротивления пластическому деформированию сферы монотонно возрастает вследствие увеличения радиуса контакта  $r_A$ .

**Заключение.** Получено полное решение задачи о сжатии жесткопластической сферы плоскими штампами при условии полной пластичности Треска и изменении формы сферы с линейной границей пластической области. Результаты решения представляют интерес для оценки несущей способности сферы по пластическому отпечатку и для моделирования конечного формоизменения сферы при больших перемещениях штампа.

Таблица 2. Давление на штамп

$\mu$	0.05	0.1	0.15	0.2	$\mu$	0.05	0.1	0.15	0.2
s	q				s	q			
0.001	2.811	2.847	2.876	2.898	0.100	1.912	1.944	1.972	2.002
0.004	2.715	2.746	2.777	2.805	0.121	1.810	1.838	1.870	1.900
0.009	2.615	2.648	2.679	2.707	0.145	1.705	1.734	1.767	1.798
0.016	2.517	2.550	2.580	2.607	0.170	1.600	1.628	1.663	1.695
0.025	2.417	2.453	2.482	2.508	0.198	1.495	1.525	1.559	1.592
0.036	2.319	2.351	2.380	2.408	0.228	1.385	1.420	1.457	1.489
0.049	2.218	2.250	2.278	2.306	0.261	1.278	1.316	1.352	1.384
0.064	2.116	2.150	2.178	2.204	0.296	1.171	1.211	1.248	1.280
0.081	2.013	2.046	2.073	2.104	0.333	1.070	1.109	1.145	1.179

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ишлинский А. Ю. Осесимметрическая задача пластичности и проба Бринелля // ПММ. 1944. Т. 8. Вып. 3. С. 201–224.
- [2] Ишлинский А. Ю. Прикладные задачи механики. Т. 1. – М. : Наука, 1986. 359 с.
- [3] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М. : Физматлит, 2001. 704 с.
- [4] Shield R. T. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. A 233. N 1193. P. 267–287.
- [5] Eason G. and Shield R. T. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // Z. Angew. Math. Phys. 1960. 11. N 1. P. 33–43.
- [6] Ивлев Д. Д., Непершин Р. И. Внедрение гладкого сферического штампа в жесткопластическое полупространство // Изв. АН СССР, МТТ. 1974. № 4. С. 159–166.
- [7] Непершин Р. И. О внедрении гладкого сферического штампа в идеально пластическое полупространство // ДАН РАН. 2003. Т. 389. № 5. С. 616–620.
- [8] Непершин Р. И. Давление плоского круглого штампа на идеально пластическое полупространство с учетом контактного трения // Изв. РАН, МТТ. 2005. № 5. С. 150–158.
- [9] Непершин Р. И. Внедрение сферического штампа в идеально пластическое полупространство при наличии контактного трения // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 3. С. 490–503.
- [10] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. – Moscow: MSTU STANKIN, 2016. 310 p.
- [11] Druyanov B. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam : Elsevier, 1994. 426 p.

R. I. Nepershin

## COMPRESSION OF THE RIGID-PLASTIC SPHERE BY THE FLAT DIES

*Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia*

**Abstract.** Computer simulation of the rigid-plastic sphere compression by the flat dies is presented for the full plasticity regime on the rib of Tresca prism. The slip lines, stresses and velocities plastic flow fields are calculated with contact friction, the sphere form and the plastic region boundaries variation considerations. The results of the problem solution can be used for the limit force estimation of the sphere plastic compression, and for the sphere plastic forming simulation with large displacements of the dies.

**Keywords:** sphere plastic compression, flat dies, ideal plasticity, axial symmetry, full plasticity, slip lines, stresses, velocities, contact friction

## REFERENCES

- [1] Ishlinskij A. YU. Osesimmetricheskaya zadacha plastichnosti i proba Brinellya // PMM. 1944. T. 8. Vyp. 3. S. 201–224. (in Russian)
- [2] Ishlinskij A. YU. Prikladnye zadachi mekhaniki. T. 1. – M. : Nauka, 1986. 359 s. (in Russian)
- [3] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M. : Fizmatlit, 2001. 704 s. (in Russian)
- [4] Shield R. T. On the plastic flow of metals under condition of axial symmetry // Proc. Roy. Soc. London. 1955. A 233. N 1193. P. 267–287.
- [5] Eason G. and Shield R. T. The plastic indentation of a semi-infinite solid by perfectly rough circular punch // Z. Angew. Math. Phys. 1960. 11. N 1. P. 33–43.
- [6] Ivlev D. D., Nepershin R. I. Vnedrenie gladkogo sfericheskogo shtampa v zhestko-plasticheskoe poluprostranstvo // Izv. AN SSSR, MTT. 1974. № 4. S. 159–166. (in Russian)
- [7] Nepershin R. I. O vnedrenii gladkogo sfericheskogo shtampa v ideal'no plasticheskoe poluprostranstvo // DAN RAN. 2003. T. 389. № 5. S.616–620. (in Russian)
- [8] Nepershin R. I. Davlenie ploskogo kruglogo shtampa na ideal'no plasticheskoe poluprostranstvo s uchetom kontaktnogo treniya // Izv. RAN, MTT. 2005. № 5. S. 150–158. (in Russian)
- [9] Nepershin R. I. Vnedrenie sfericheskogo shtampa v ideal'no plasticheskoe poluprostranstvo pri nalichii kontaktnogo treniya // PMM. 2006. T. 70. Vyp. 3. S. 490–503. (in Russian)
- [10] Nepershin R. I. Applied Problems of Plasticity. – Moscow: MSTU STANKIN, 2016. 310 p. (in Russian)
- [11] Druyanov B. A., Nepershin R. I. Problems of Technological Plasticity. Amsterdam : Elsevier, 1994. 426 p. (in Russian)

---

*Nepershin Rostislav Ivanovich* ,  
e-mail: nepershin\_ri@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Moscow State Technological University STANKIN, Moscow, Russia.