Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 1 (35). С. 39–46

М. А. Артемов[1], *Е. С. Барановский*[1], *Э. В. Сёмка*[2], *Ю. Н. Третьякова*[1]

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

[1] *Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*

[2] *Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия*

Аннотация. Рассматриваются известные альтернативные формы записи условий пластичности Треска. Отмечается, что особенности представления условия пластичности Треска через основные инварианты тензора напряжений являются общими для кусочно-линейных условий пластичности. Обсуждается подход к определению эквивалентных напряжений и пластических деформаций. Предложены иные инвариантные определения эквивалентных напряжений и деформаций.

Ключевые слова: условие пластичности, пластический потенциал, обобщенный ассоциированный закон пластического течения, математическая теория пластичности, эквивалентные напряжения, эквивалентные деформации.

УДК: 539.214

Введение. Математическая теория пластичности является основой многих инженерных направлений. Фундаментальный вклад в эту науку внесли многие отечественные и зарубежные ученые. Полное перечисление всех исследователей, занимающихся математической теорией пластичности, вряд ли уместно в рамках небольшой заметки, поэтому сошлемся лишь на некоторые книги по теории пластичности, содержащие обширную библиографию [1–15].

© Артемов М. А., Барановский Е. С., Сёмка Э. В., Третьякова Ю. Н., 2018

Артемов Михаил Анатольевич
`e-mail:` artemov_m_a@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Барановский Евгений Сергеевич
`e-mail:` esbaranovskii@gmail.com, кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.
Сёмка Элеонора Викторовна
`e-mail:` semka_elya@mail.ru, преподаватель, Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», г. Воронеж, Россия.
Третьякова Юлия Николаевна
`e-mail:` ulia_tretyakova1993@mail.ru, аспирант, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия.

Поступила 17.01.2018

Несмотря на то, что математическая теория пластичности является вполне развитой и достаточно содержательной наукой, всегда можно найти вопросы, требующие уточнения. В настоящей заметке рассматриваются два вопроса: об альтернативных формах записи условия пластичности Треска и об определении эквивалентных напряжений и деформаций. Такой выбор обусловлен тем, что условие пластичности Треска и его модификации используются во многих последних публикациях. Кроме того, условие пластичности Треска, имея много общего с кусочно-линейными условими пластичности общего вида, все-таки выделяется из них, что проявляется как в вопросах теории, так и при решении прикладных задач. Рассматриваемые альтернативные формы записи условия пластичности Треска также присущи всем кусочно-линейным условиям пластичности. Выбор эквивалентов для тензорных величин нередко встречается в ряде работ, связанных с решением задач упрочняющегося упругопластического тела, например [16–18]. На наш взгляд, рассмотрение этих и ряда других вопросов математической и прикладной теории пластичности целесообразно обсуждать.

Альтернативные формы записи условия пластичности Треска. В силу исторических причин из всех кусочно-линейных условий пластичности особо выделяют условие Треска [19]

$$\max\{|\sigma_1-\sigma_2|,\, |\sigma_2-\sigma_3|,\, |\sigma_3-\sigma_1|\} = 2k. \tag{1}$$

Равенство (1) имеет альтернативную форму записи [9–11]

$$|\sigma_1-\sigma_2| + |\sigma_2-\sigma_3| + |\sigma_3-\sigma_1|\} = 4k.$$

Хотя эта форма записи условия пластичности Треска не содержит условия выбора, тем не менее при использовании ассоциированного закона пластического течения необходимо явно выделять отдельные режимы пластичности.

В ряде работ, например, [8–11], следуя Леви [20], в качестве условия пластичности Треска, записанного через основные инварианты девиатора напряжений, предлагается соотношение

$$4(J_2-k^2)(J_2-4k^2)^2 - 27J_3^2 = 0, \tag{2}$$

которое следует из равенства [21]

$$\big((\sigma_1-\sigma_2)^2-4k^2\big)\big((\sigma_2-\sigma_3)^2-4k^2\big)\big((\sigma_3-\sigma_1)^2-4k^2\big) = 0. \tag{3}$$

На неэквивалентность равенств (2) и (3) условию Треска указывается, например, в работах [22, 23].

Используя процедуру аналогичную получению записи (2) из (3), можно найти соотношения в основных инвариантах, рассматривая другие кусочно-линейные условия пластичности.

К выбору эквивалентных напряжений и деформаций. Обсудим вопрос о выборе эквивалентных (или эффективных) напряжений и деформаций.

Для упругопластических тел в качестве эквивалентного напряжения можно выбирать, например, функцию пластичности или пластический потенциал.

Рассмотрим кусочно-линейное условие пластичности общего вида

$$F = \max_{i=1\div n}\{\alpha_i\sigma_1 + \beta_i\sigma_2 + \gamma_i\sigma_3\} = k, \tag{4}$$

где α_i, β_i, γ_i — константы.

Если для получения определяющего уравнения, устанавливающего связь пластических деформаций и напряжений, выбрать ассоциированный закон пластического течения (закон нормальной связи), то приращения компонент пластических деформаций будут удовлетворять соотношениям:

$$\frac{d\varepsilon_1^p}{\alpha_i} = \frac{d\varepsilon_2^p}{\beta_i} = \frac{d\varepsilon_3^p}{\gamma_i}. \tag{5}$$

Примем, что элементарная работа напряжений на приращениях пластических деформаций

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sigma_{ij}\, d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{\text{eq}}\, d\varepsilon_{\text{eq}}^p, \quad \sigma_{\text{eq}} = F. \tag{6}$$

Тогда, используя гипотезу естественного состояния [4] для процесса активного нагружения и учитывая (4), (5), получаем

$$\varepsilon_{\text{eq}}^p = \frac{\varepsilon_1^p}{\alpha_i} = \frac{\varepsilon_2^p}{\beta_i} = \frac{\varepsilon_3^p}{\gamma_i}. \tag{7}$$

Если выбирается кусочно-линейная функция пластичности, учитывающая трансляционное упрочнение,

$$F = \max_{i=1\div n} \left\{ \alpha_i(\sigma_1 - c\varepsilon_1^p) + \beta_i(\sigma_2 - c\varepsilon_2^p) + \gamma_i(\sigma_3 - c\varepsilon_3^p) \right\} = k, \tag{8}$$

то, полагая

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{eff}} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sigma_{\text{eq}}^{\text{eff}}\, d\varepsilon_{\text{eq}}^p, \quad \boldsymbol{\sigma}^{\text{eff}} = \boldsymbol{\sigma} - c\boldsymbol{\varepsilon}^p, \quad \sigma_{\text{eq}}^{\text{eff}} = F$$

и учитывая (8), приходим к определению (7).

Равенство (6) для определения эквивалентной пластической деформации, когда рассматривается режим $|\sigma_1 - \sigma_2| = k$ условия пластичности Треска, было использовано, например, в работах [16–18].

Если пластический потенциал определяется гладкой функцией $F(\boldsymbol{\sigma})$, тогда согласно ассоциированному закону течения

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$d\lambda = \sqrt{\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}}}.$$

Принимая, что

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \sqrt{\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}}} = \sigma_{\text{eq}} d\varepsilon_{\text{eq}}^p,$$

определяем

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}}}, \quad d\varepsilon_{\text{eq}}^p = \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p}. \tag{10}$$

Для режимов кусочно-линейных условий пластичности (4)

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \alpha_i \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \beta_i \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \gamma_i \mathbf{n} \otimes \mathbf{n},$$

где $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — собственные векторы тензора напряжений. Тогда

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{F}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}}.$$

Учитывая (5), получаем

$$\sigma_{\text{eq}} d\varepsilon^p_{\text{eq}} = \frac{F d\varepsilon^p_{\text{eq}}}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}} = F\frac{d\varepsilon^p_1}{\alpha_i} = F\frac{d\varepsilon^p_2}{\beta_i} = F\frac{d\varepsilon^p_3}{\gamma_i}.$$

Для условия пластичности Мизеса

$$F = \sqrt{\operatorname{tr} \boldsymbol{s}^2} = k,$$

принимая (10), имеем

$$\sigma_{\text{eq}} = F, \qquad d\varepsilon^p_{\text{eq}} = \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p}.$$

Для тензора второй валентности свертка

$$J = d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

определяет квадратичный инвариант. Инвариант $\sqrt{J}$ (с точностью до числового множителя) часто выбирается для оценки величины тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$. Величина $\sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p}$ является одной из инвариантных норм матрицы тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^p$.

Отметим, что мера упрочнения (параметр Одквиста, накопленная пластическая деформация) была предложена в [24]

$$q = \int \sqrt{2 d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p}.$$

Для определения $\varepsilon^p_{\text{eq}}$ можно использовать процедуру построения изотропных скалярнозначных функций [25]. Если f — изотропная скалярнозначная однородная функция, то из (9) следует, что

$$d\lambda^m = \frac{f(d\boldsymbol{\varepsilon}^p)}{f(\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma})}.$$

Например, когда

$$\operatorname{tr} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \neq 0,$$

из условия (9) следует, что

$$d\lambda = \frac{\operatorname{tr} d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\operatorname{tr}(\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma})},$$

поэтому, принимая, что

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \frac{\operatorname{tr} d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{\operatorname{tr}(\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma})} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{\text{eq}} d\varepsilon^p_{\text{eq}},$$

определяем

$$d\varepsilon^p_{\text{eq}} = |\operatorname{tr} d\boldsymbol{\varepsilon}^p|, \qquad \sigma_{\text{eq}} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \partial F/\partial \boldsymbol{\sigma}}{\operatorname{tr}(\partial F/\partial \boldsymbol{\sigma})}.$$

В общем случае, принимая

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sigma_{\text{eq}} d\varepsilon^p_{\text{eq}},$$

и

$$d\varepsilon^p_{\text{eq}} = \sqrt{d\boldsymbol{\varepsilon}^p \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p},$$

получаем

$$\sigma_{\text{eq}} \neq F.$$

Для упругопластического тела вполне уместно полагать, что

$$\sigma_{\text{eq}} = F.$$

Поэтому для определения $\varepsilon^p_{\rm eq}$ вместо равенства

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \sigma_{\rm eq} d\varepsilon^p_{\rm eq},$$

можно выбирать иной подход, например, $\varepsilon^p_{\rm eq}$ определять как функцию инвариантов тензора пластических деформаций.

Вопрос определения $d\varepsilon^p_{\rm eq}$ при рассмотрении сингулярных точек поверхности пластичности не обсуждается.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильюшин А. А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.: ГИТТЛ, 1948. 376 с.

[2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

[3] Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.

[4] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

[5] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.

[6] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

[7] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. 355 p.

[8] Prager W., Hodge P. G. Theory of Perfectly Plastic Solids. New York: Wiley, 1951. 264 p.

[9] Malvern L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. New Jersey: Prentice-Hall, 1969. 713 p.

[10] Lubliner J. Plasticity Theory. New York: Macmillan, 1990. 528 p.

[11] Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Burlington: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.

[12] Zyczkowski M. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publ., 1981. 714 p.

[13] Mendelson A. Plasticity: Theory and Application. New York. London: Macmillan 1968. 353 p.

[14] Jones R. M. Deformation Theory of Plasticity. Blacksburg: Bull Ridge Publ., 2009. 615 p.

[15] Chen W. F., Zhang H. Structural Plasticity — Theory, Problems, and CAE Software. New York: Springer, 1991. 250 p.

[16] Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supcrcritical Interference // Acta Mechanica. 1986. Vol. 61. P. 1–14.

[17] Mack W., Gamer U. Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflachenformigen Warmequelle // Forschung im Ingenieurwesen. 1985. Vol. 51, № 5. P. 160–164.

[18] Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The Strain Hardening Rotating Hollow Shaft Subject to a Positive Temperature Gradient // Acta Mechanica. 2007. Vol. 194. P. 191–211.

[19] Tresca H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides soumis a de fortes pressions // Comptes Rend. Acad. Sci. Paris. 1864. Vol. 59. P. 754–758.

[20] Levy M. Memoire sur les equations generales des mouvements interieurs des corps solids ductiles au dela des limites, ou l'elasticite pourrait les ramener a leur premier etat // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1870. Vol. 70. P. 1323–1325.

[21] Reuss A. Vereintachte Berechnung der plastischen Formanderungsgeschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 13. P. 365–360.

[22] Артемов М. А., Барановский Е. С., Якубенко А. П. Альтернативные формы записи кусочно-линейных условий пластичности и их обобщения // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. 2015. № 1. С. 71–82. 1

[23] Артемов М. А., Барановский Е. С. Математическое моделирование пластического состояния тел. Плоская деформация // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 2 (24). С. 72–87.

[24] Odqvist F. K. G. Die Verfestigung von flußeisenähnlichen Körpern // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 13. P. 360–363.

[25] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.

M. A. Artemov, E. S. Baranovskii, E. V. Semka, Yu. N. Tretyakova

ON SOME ASPECTS OF THE PLASTICITY THEORY

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Military Educational and Scientific Center of the Air Force "N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russia

Abstract. We consider alternative forms of Tresca's yield condition. It is noted that features of the representation of Tresca's condition by the principal invariants of the stress tensor are common for piece-wise linear conditions of plasticity. The approach to determining equivalent stresses and plastic deformations is discussed. Different invariant definitions of equivalent stresses and deformations are proposed.

Keywords: yield condition, plastic potential, associated flow rule, mathematical theory of plasticity, equivalent stress, equivalent strain.

REFERENCES

[1] Il'yushin A. A. Plastichnost'. CH. 1. Uprugoplasticheskie deformacii. M.: GITTL, 1948. 376 s.(in Russian)

[2] Ivlev D. D. Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 232 s.(in Russian)

[3] Sokolovskij V. V. Teoriya plastichnosti. M.: Vysshaya shkola, 1969. 608 s.(in Russian)

[4] Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti. M.: Nauka, 1969. 420 s.(in Russian)

[5] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teoriya plastichnosti. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. 528 s.(in Russian)

[6] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Fizmatlit, 2001. 704 s.(in Russian)

[7] Hill R. The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford: Clarendon Press, 1950. 355 p.

[8] Prager W., Hodge P. G. Theory of Perfectly Plastic Solids. New York: Wiley, 1951. 264 p.

[9] Malvern L. E. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. New Jersey: Prentice-Hall, 1969. 713 p.

[10] Lubliner J. Plasticity Theory. New York: Macmillan, 1990. 528 p.

[11] Chakrabarty J. Theory of Plasticity. Burlington: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006. 882 p.

Artemov Mikhail Anatolievich

e-mail: artemov_m_a@mail.ru, Head of the Chair, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Baranovskii Evgenii Sergeevich

e-mail: esbaranovskii@gmail.com, Associate Professor, Cand. Sci. Phys. & Math., Voronezh State University, Voronezh, Russia

Semka Eleonora Viktorovna

e-mail: semka_elya@mail.ru, Lecturer, Military Educational and Scientific Center of the Air Force "N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy", Voronezh, Russia

Tretyakova Yuliya Nikolaevna

e-mail: ulia_tretyakova1993@mail.ru, Postgraduate student, Voronezh State University, Voronezh, Russia

[12] Zyczkowski M. Combined Loadings in the Theory of Plasticity. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publ., 1981. 714 p.

[13] Mendelson A. Plasticity: Theory and Application. New York. London: Macmillan 1968. 353 p.

[14] Jones R. M. Deformation Theory of Plasticity. Blacksburg: Bull Ridge Publ., 2009. 615 p.

[15] Chen W. F., Zhang H. Structural Plasticity — Theory, Problems, and CAE Software. New York: Springer, 1991. 250 p.

[16] Gamer U. The Elastic-Plastic Shrink Fit with Supcrcritical Interference // Acta Mechanica. 1986. Vol. 61. P. 1–14.

[17] Mack W., Gamer U. Die Spannungsverteilung in der elastisch-plastischen Kreisscheibe infolge einer kreisflachenformigen Warmequelle // Forschung im Ingenieurwesen. 1985. Vol. 51, № 5. P. 160–164.

[18] Eraslan A. N., Arslan E., Mack W. The Strain Hardening Rotating Hollow Shaft Subject to a Positive Temperature Gradient // Acta Mechanica. 2007. Vol. 194. P. 191–211.

[19] Tresca H. Memoire sur l'ecoulement des corps solides soumis a de fortes pressions // Comptes Rend. Acad. Sci. Paris. 1864. Vol. 59. P. 754–758.

[20] Levy M. Memoire sur les equations generales des mouvements interieurs des corps solids ductiles au dela des limites, ou l'elasticite pourrait les ramener a leur premier etat // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1870. Vol. 70. P. 1323–1325.

[21] Reuss A. Vereintachte Berechnung der plastischen Formanderungs-geschwindingkeiten bei Voraussetzung der Schubspannungsfliesbedingung // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 13. P. 365–360.

[22] Artemov M. A., Baranovskij E. S., YAkubenko A. P. Al'ternativnye formy zapisi kusochno-linejnyh uslovij plastichnosti i ih obobshcheniya // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika. 2015. № 1. S. 71–82.(in Russian) 1

[23] Artemov M. A., Baranovskij E. S. Matematicheskoe modelirovanie plasticheskogo sostoyaniya tel. Ploskaya deformaciya // Vestnik CHuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2015. № 2 (24). S. 72–87.(in Russian)

[24] Odqvist F. K. G. Die Verfestigung von flußeisenähnlichen Körpern // Z. Angew. Math. Mech. 1933. Vol. 13. P. 360–363.

[25] Lur'e A. I. Nelinejnaya teoriya uprugosti. M.: Nauka, 1980. 512 s.(in Russian)