

Н. В. Минаева, Д. В. Сабьинин

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия

Аннотация. Рассмотрена упругопластическая труба из неоднородного материала под действием внутреннего и внешнего гидростатических давлений. Контуры поперечного сечения близки к круговым. Неоднородность материала и отклонения формы сечения от канонической характеризуются функциями, известными с точностью до малых параметров. Найдено условие, определяющее границу области сходимости метода возмущений. Получено решение, описывающее напряженно-деформированное состояние трубы, с точностью до величин второго порядка малости.

Ключевые слова: упругость, пластичность, толстостенная труба, сходимость, метод малого параметра.

УДК: 539.3

Рассмотрим неоднородную упругопластическую толстостенную трубу, находящуюся под воздействием внутреннего и внешнего давлений. Отличие ее поперечного сечения от кругового кольца и неоднородность материала характеризуются функциями f_i .

Пусть функции $r = a + f_1(\theta)$ и $r = b + f_2(\theta)$ описывают в полярной системе координат внутренний и внешний контуры поперечного сечения трубы, а функция $r = r_s(\theta)$ – контур, отделяющий упругую зону от пластической.

Следуя [12]–[14], будем полагать, что для материала трубы в случае плоской задачи потенциал деформации имеет в следующий вид

$$w = \frac{1}{8G}[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau^2],$$

где G – модуль сдвига, σ_r , σ_θ , τ – компоненты тензора напряжений.

Поступила 10.03.2018

© Минаева Н. В., Сизикова А. А. 2017

Минаева Надежда Витальевна

e-mail: minaeva@yandex.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия,

Сабьинин Денис Викторович

e-mail: minaeva@yandex.ru, магистрант факультета УиТС Воронежского государственного университета инженерных технологий, г. Воронеж, Россия.

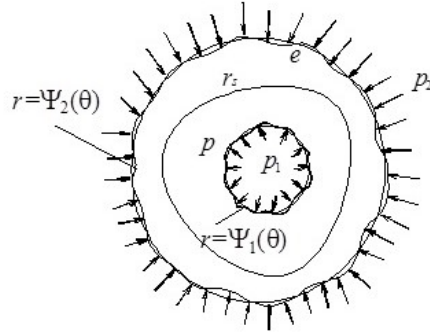


Рис. 1. Сечение трубы в нагруженном состоянии

Пусть материал характеризуется функцией

$$G = G_0 + G_1(r, \theta); \quad G_0 = \text{const}$$

В упругой области (е) в случае плоской деформации напряженно-деформированное состояние тела будет описываться решением следующей задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho^e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^e}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^e - \sigma_\theta^e}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau^e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^e}{\partial \theta} + \frac{2\tau^e}{\rho} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u^e}{\partial \rho} + \frac{\partial v^e}{\partial \theta} + u^e &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^e - \sigma_\theta^e &= 4(1 + f_3) \frac{\partial u^e}{\partial \rho} \\ \tau^e &= (1 + f_3) \left(\frac{\partial v^e}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^e}{\partial \theta} - \frac{v^e}{\rho} \right) \\ \sigma_n^e|_{\rho=\Psi_2(\theta)} &= -q_2; \quad \tau_n^e|_{\rho=\Psi_2(\theta)} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\rho = \frac{r}{b}$, $q_2 = \frac{p_2}{G_0}$, $f_3(\rho, \theta) = \frac{G_1(b\rho, \theta)}{G_0}$; все величины, имеющие размерность напряжений отнесены к модулю сдвига G_0 , функция $\Psi_2(\theta)$ описывает внешний контур поперечного сечения трубы в деформированном состоянии.

В пластической области (р) напряженно-деформированное состояние характеризуется решением следующей задачи [1-3,7]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\rho^p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^p}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p}{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial \tau^p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^p}{\partial \theta} + \frac{2\tau^p}{\rho} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u^p}{\partial \rho} + \frac{\partial v^p}{\partial \theta} + u^p &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p)^2 + 4(\tau^p)^2 &= 8k^2(1 + f_3) \\ 4 \frac{\partial u^p}{\partial \rho} \tau^p - \left(\frac{\partial v^p}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^p}{\partial \theta} - \frac{v^p}{\rho} \right) (\sigma_\rho^p - \sigma_\theta^p) &= 0 \end{aligned}$$

$$\sigma_n^p|_{\rho=\Psi_1(\theta)} = -q_1; \quad \tau_n^p|_{\rho=\Psi_1(\theta)} = 0, \quad q_1 = \frac{p_1}{G_0}, \quad (4)$$

где функция $\Psi_1(\theta)$ описывает внутренний контур поперечного сечения трубы в деформированном состоянии.

К (1)-(4) следует добавить условия сопряжения решения задач (1), (2) и (3),(4) при $\rho = \rho_s(\theta)$ ($\rho_s = r_s/b$).

Пусть $f_i(\theta)$ заданы с точностью до малых параметров, т.е. $f_1 = \varepsilon_1\varphi_1(\theta)$, $f_2 = \varepsilon_2\varphi_2(\theta)$, $f_3 = \varepsilon_3\varphi_3(\rho, \theta)$, . Будем искать решение методом возмущений в виде степенных рядов:

$$\sigma_\rho^p = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \sigma_\rho^{lmn p} \varepsilon_1^l \varepsilon_2^m \varepsilon_3^n, \quad \sigma_\theta^p = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \sigma_\theta^{lmn p} \varepsilon_1^l \varepsilon_2^m \varepsilon_3^n, \dots \quad v^e = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} v^{lmn e} \varepsilon_1^l \varepsilon_2^m \varepsilon_3^n \quad (5)$$

Функцию, описывающую границу пластической зоны также ищем в виде:

$$\rho_s = \sum_{l,m,n=0}^{\infty} \rho_s^{lmn} \varepsilon_1^l \varepsilon_2^m \varepsilon_3^n \quad \rho_s^{000} = \rho_s^0. \quad (6)$$

Ряды (5), (6) будут сходящимися, если выполняются условия, содержащиеся в критерии аналитичности по малым параметрам в окрестности $\varepsilon_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$) [11]. Основным из них является требование непрерывной зависимости решения задачи (1)-(4) от f_i при $f_i = 0$. Для проведения исследования этой проблемы, согласно критерию непрерывной зависимости решения от исходных данных [4,9,11], необходимо рассмотреть вспомогательную задачу относительно функций $\zeta_i(\rho, \theta)$, полученную из (1)-(4). Эти функции определяются следующим образом

$$\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \zeta_1, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \zeta_2, \quad \tau = \tau^0 + \zeta_3, \quad u = u^0 + \zeta_4, \quad v = v^0 + \zeta_5 \quad (7)$$

Чтобы условия непрерывной зависимости были удовлетворены, нужно, чтобы линейризованная однородная задача для $\zeta_i(\rho, \theta)$ имела только тривиальное решение.

В (7) $\sigma_\rho^0, \dots, v^0$ является решением задачи (1)-(4) при $f_3(\rho, \theta) = f_2(\theta) = f_1(\theta) = 0$. Оно имеет вид [9]

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^{0p} &= 2\eta \ln \rho + C_1; & \sigma_\theta^{0p} &= 2\eta(1 + \ln \rho) + C_1; \\ \sigma_\rho^{0e} &= -\eta(\rho_s^0)^2 \rho^{-2} + C_2; & \sigma_\theta^{0e} &= \eta(\rho_s^0)^2 \rho^{-2} + C_2; \\ \tau^{0p} &= \tau^{0e} = 0; & v^{0p} &= v^{0e} = 0; \\ u^{0p} &= u^{0e} = \eta(\rho_s^0)^2 \rho^{-1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= -q_1 - 2\eta \ln \left[\alpha + \frac{\eta}{2\alpha} (\rho_s^0)^2 \right] \\ C_2 &= \eta - q_2 + 2\eta \ln \rho_s^0 - 2\ln \left[\alpha (\rho_s^0)^{-1} + \frac{\eta}{2\alpha} \rho_s^0 \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{2}{G_0} k^2}; \quad \alpha = \frac{a}{b}; \quad \text{sign} \eta = \text{sign}(q_1 - q_2)$$

Величина ρ_s^0 находится из уравнения

$$\eta + q_2 - q_1 - 2\eta \ln \left[\alpha (\rho_s^0)^{-1} + \frac{\eta}{2\alpha} \rho_s^0 \right] - \eta (\rho_s^0)^2 \left[1 + \frac{\eta}{2} (\rho_s^0)^2 \right]^{-2} \quad (10)$$

В результате проведенных исследований найдено одно из соотношений, при котором вспомогательная задача допускает нетривиальное решение, т.е. нарушается непрерывная зависимость решения задачи (1)-(4) от f_i при $f_i = 0$:

$$\Delta = \eta(\rho_s^0)^4 \left\{ \eta(\rho_s^0)^2 \alpha^{-2} - 1 - \frac{\eta}{2}(\rho_s^0)^2 - \frac{\eta}{2}(\rho_s^0)^{-2} + 2\eta \ln \frac{\alpha}{\rho_s^0} + \left[(\rho_s^0)^{-1} + \frac{\eta}{2} \rho_s^0 \right]^4 \right\} = 0 \quad (11)$$

Обозначим через q_* наибольший отрицательный корень системы уравнений (10) и (11) при $q_2 = 0$, $\kappa = -\frac{k}{G}$, а через q_{**} – наименьший положительный корень этой системы уравнений при $q_2 = 0$, $\kappa = \frac{k}{G}$. Тогда условия существования нетривиального решения вспомогательной задачи запишутся так

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= q_* \\ q_1 - q_2 &= q_{**} \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, если точка с координатами q_1 , q_2 находится внутри полосы, определяемой прямыми (12), то решение задачи (1)-(4) непрерывно зависит от функций f_i при $f_i = 0$. Например, для $\alpha = 0,8$ получено $q_* \approx -0,502$, $q_{**} \approx 0,034$. На рис. 2 для этого частного случая изображена область непрерывной зависимости от f_i , и, как следствие, аналитичности по ε_i , решения исходной задачи (1)-(4).

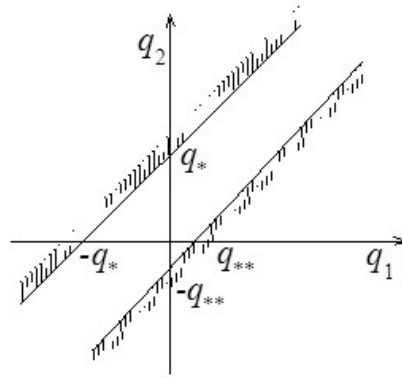


Рис. 2. Область непрерывной зависимости

Пусть параметры внешнего воздействия таковы, что соответствующая им точка принадлежит указанной области. Тогда, учитывая, что (8), (9) задают компоненты нулевого приближения, ряды (5), (6) будут сходящимися. В соответствии с методом малого параметра, для первого приближения были получены следующие задачи:

1. Для компонент с индексом «100»

Для пластической области

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_\rho^{100p}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^{100p}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{100p} - \sigma_\theta^{100p}}{\rho} = 0 \\
& \frac{\partial \tau^{100p}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{100p}}{\partial \theta} + \frac{2\tau^{100p}}{\rho} = 0 \\
& \frac{\partial u^{100p}}{\partial \rho} + \frac{\partial v^{100p}}{\partial \theta} + u^{100p} = 0 \\
& (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p})(\sigma_\rho^{100p} - \sigma_\theta^{100p}) = 0 \\
& 4 \frac{\partial u^{0p}}{\partial \rho} \tau^{100p} - \left(\frac{\partial v^{100p}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{100p}}{\partial \theta} - \frac{v^{100p}}{\rho} \right) (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$

$$\begin{aligned}
& \sigma_\rho^{100p} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0p}}{\partial \rho} \left[\left(1 - \frac{u^0(\alpha)}{\alpha} \right) \varphi_1 + u^{100p}(\alpha, \theta) \right] = 0 \\
& \tau^{100p} + \frac{\sigma_\rho^{100p} - \sigma_\theta^{100p}}{\rho} \left[\left(1 - \frac{u^0(\alpha)}{\alpha} \right) \frac{d\varphi_1}{d\theta} + \frac{\partial u^{100p}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} \right] = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

Для упругой области:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sigma_\rho^{100e}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau^{100e}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_\rho^{100e} - \sigma_\theta^{100e}}{\rho} = 0 \\
& \frac{\partial \tau^{100e}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_\theta^{100e}}{\partial \theta} + \frac{2\tau^{100e}}{\rho} = 0 \\
& \frac{\partial u^{100e}}{\partial \rho} + \frac{\partial v^{100e}}{\partial \theta} + u^{100e} = 0 \\
& \sigma_\rho^{100e} - \sigma_\theta^{100e} = 4 \frac{\partial u^{100e}}{\partial \rho} \\
& \tau^{100e} = \frac{\partial v^{100e}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{100e}}{\partial \theta} - \frac{v^{100e}}{\rho}
\end{aligned} \tag{15}$$

при $\rho = 1 + u^{0e}(1)$

$$\begin{aligned}
& \sigma_\rho^{100e} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0e}}{\partial \rho} u^{100e}(1, \theta) = 0 \\
& \tau^{100e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho} \frac{\partial u^{100e}(1, \theta)}{\partial \theta} = 0
\end{aligned} \tag{16}$$

Условия сопряжения решений задач (13)-(14) и (15)-(16) будут такими (при $\rho = \rho_s^0$)

$$\begin{aligned}
& \sigma_\rho^{100e} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0e}}{\partial \rho} \rho_s^{100} = \sigma_\rho^{100p} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0p}}{\partial \rho} \rho_s^{100} \\
& \tau^{100e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho} \frac{\partial \rho_s^{100}}{\partial \theta} = \tau^{100p} + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho} \frac{\partial \rho_s^{100}}{\partial \theta} \\
& \sigma_\theta^{100e} + \frac{\partial \sigma_\theta^{0e}}{\partial \rho} \rho_s^{100} = \sigma_\theta^{100p} + \frac{\partial \sigma_\theta^{0p}}{\partial \rho} \rho_s^{100} \\
& u^{100e} + \frac{du^{0e}}{d\rho} \rho_s^{100} = u^{100p} + \frac{du^{0p}}{d\rho} \rho_s^{100} \\
& v^{100e} = v^{100p}
\end{aligned} \tag{17}$$

2. Для $\sigma_\rho^{010p}, \dots, v^{010e}$ система уравнений, а также условия сопряжения имеют вид аналогичный (13), (15) и (17). Граничные условия будут такими при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{010p} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0p}}{\partial \rho} u^{010p}(\alpha, \theta) &= 0 \\ \tau^{010p} + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho} \frac{\partial u^{010p}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

при $\rho = \alpha + u^{0e}(1)$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{010e} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0e}}{\partial \rho} [(1 + c_2)\varphi_2 + u^{010e}(1, \theta)] &= 0 \\ \tau^{010e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho} \left[(1 + c_2) \frac{d\varphi_2}{d\theta} + \frac{\partial u^{010e}(1, \theta)}{\partial \theta} \right] &= 0 \\ c_2 &= -\frac{\kappa}{2}(\rho_s^0)^2\end{aligned}$$

3. Для $\sigma_\rho^{001p}, \dots, v^{001e}$ уравнения равновесия и условия сопряжения также аналогичны (13), (15), (17). Реологические соотношения примут вид: для пластической зоны

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001p} - \sigma_\theta^{001p} &= \eta\varphi_3 \\ 4 \frac{\partial u^{0p}}{\partial \rho} \tau^{001p} - \left(\frac{\partial v^{001p}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{001p}}{\partial \theta} - \frac{v^{001p}}{\rho} \right) (\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}) &= 0\end{aligned}$$

для упругой области:

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001e} - \sigma_\theta^{001e} &= 4 \left(\frac{\partial u^{001e}}{\partial \rho} + \varphi_3 \frac{du^{0e}}{d\rho} \right) \\ \tau^{001e} &= \frac{\partial v^{001e}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u^{001e}}{\partial \theta} - \frac{v^{001e}}{\rho}\end{aligned}$$

Граничные условия для соответствующих задач будут такими при $\rho = \alpha + u^{0p}(\alpha)$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001p} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0p}}{\partial \rho} u^{001p}(\alpha, \theta) &= 0 \\ \tau^{001p} + \frac{\sigma_\rho^{0p} - \sigma_\theta^{0p}}{\rho} \frac{\partial u^{001p}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

при $\rho = 1 + u^{0e}(1)$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001e} + \frac{\partial \sigma_\rho^{0e}}{\partial \rho} u^{001e}(1, \theta) &= 0 \\ \tau^{001e} + \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{\rho} \frac{\partial u^{001e}(1, \theta)}{\partial \theta} &= 0\end{aligned}$$

Следуя [5,10], было найдено решение задач первого приближения для $\varphi_i = \cos \theta$ ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{100p} = \sigma_\theta^{100p} = M_1 \frac{1}{\rho} \cos \theta; \quad \tau^{100p} &= M_1 \frac{1}{\rho} \sin \theta; \\ u^{100p} &= - \left(M_2 + M_3 \ln \rho + \frac{1}{2} M_1 c_2 \rho^{-2} \right) \cos \theta; \\ v^{100p} &= \left(M_2 + M_3 (1 + \ln \rho) - \frac{1}{2} M_1 c_2 \rho^{-2} \right) \sin \theta;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{100e} &= (M_4\rho^{-3} + M_5\rho) \cos \theta; & \sigma_\theta^{100e} &= (-M_4\rho^{-3} + 3M_5\rho) \cos \theta; \\ \tau_\rho^{100e} &= (M_4\rho^{-3} + M_5\rho) \sin \theta; & \rho_s^{100} &= M_6 \cos \theta; \\ u^{100e} &= -\frac{1}{4} (M_4\rho^{-3} + M_5\rho^2 + M_6) \cos \theta; & v^{100e} &= -\frac{1}{4} (M_4\rho^{-3} - 3M_5\rho^2 - M_6) \sin \theta;\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}M_1 &= 2(\rho_s^0)^2 M_5; & M_3 &= (\rho_s^0)^2 M_5; & M_4 &= (\rho_s^0)^4 M_5; \\ M_6 &= 4(\rho_s^0)^2 \ln \rho_s^0 + 4M_2; & M_5 &= \frac{4\kappa c_2(1 + c_2\alpha^{-2})}{\Delta} \\ M_2 &= \frac{\kappa(1 + c_2\alpha^{-2})[(1 + c_2)(\rho_s^0)^4 + 4c_2(\rho_s^0)^2 \ln \rho_s^0 + (1 - c_2)^4 + c_2]}{\Delta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{010p} &= \sigma_\theta^{010p} = N_1 \frac{1}{\rho} \cos \theta; & \tau^{010p} &= N_1 \frac{1}{\rho} \sin \theta; \\ u^{010p} &= -(N_2 + N_3 \ln \rho + \frac{1}{2} N_1 c_2 \rho^{-2}) \cos \theta; \\ v^{010p} &= (N_2 + N_3(1 + \ln \rho) - \frac{1}{2} N_1 c_2 \rho^{-2}) \sin \theta; \\ \sigma_\rho^{010e} &= (N_4\rho^{-3} + N_5\rho) \cos \theta; & \sigma_\theta^{010e} &= (-N_4\rho^{-3} + 3N_5\rho) \cos \theta; \\ \tau_\rho^{010e} &= (N_4\rho^{-3} + N_5\rho) \sin \theta; & \rho_s^{010} &= N_6 \cos \theta; \\ u^{010e} &= -\frac{1}{4} (N_4\rho^{-2} + N_5\rho^2 + N_6) \cos \theta; & v^{010e} &= -\frac{1}{4} (N_4\rho^{-2} - 3N_5\rho^2 - N_6) \sin \theta;\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}N_1 &= 2(\rho_s^0)^2 N_5; & N_3 &= (\rho_s^0)^2 N_5; & N_4 &= (\rho_s^0)^4 N_5; \\ N_6 &= 4(\rho_s^0)^2 \ln \rho_s^0 + 4N_2; & N_5 &= \frac{\kappa^2(1 + c_2)}{\Delta} \\ N_2 &= \frac{\kappa(\rho_s^0)^2(1 + c_2)(1 + c_2\alpha^{-2} - \kappa \ln \alpha)}{\Delta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^{001p} &= (L_1\rho^{-1} - \eta) \cos \theta; & \sigma_\theta^{001p} &= (L_1\rho^{-1} - 2\eta) \cos \theta; \\ \tau_\rho^{001p} &= (L_1\rho^{-1} - \eta) \sin \theta; \\ u^{001p} &= -(L_2 + L_3 \ln \rho + \frac{1}{2} L_1 c_3 \rho^{-2} + 4c_3 \rho^{-1}) \cos \theta; \\ v^{001p} &= (-L_2 + L_3(1 + \ln \rho) - \frac{1}{2} L_1 c_3 \rho^{-2}) \sin \theta; \\ \sigma_\rho^{001e} &= (L_4\rho^{-3} + L_5\rho - \frac{8}{3} c_3 \rho^{-2}) \cos \theta; & \sigma_\theta^{001e} &= (-L_4\rho^{-3} + 3L_5\rho) \cos \theta; \\ \tau_\rho^{001e} &= (L_4\rho^{-3} + L_5\rho - \frac{8}{3} c_3 \rho^{-2}) \sin \theta; & \rho_s^{001} &= L_6 \cos \theta; \\ u^{001e} &= -\frac{1}{4} (L_4\rho^{-2} + L_5\rho^2 + L_6 - \frac{32}{3} c_3 \rho^{-1}) \cos \theta; \\ v^{001e} &= -\frac{1}{4} (L_4\rho^{-2} - 3L_5\rho^2 - L_6) \sin \theta;\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}L_1 &= 2(\rho_s^0)^2 L_5; & L_3 &= (\rho_s^0)^2 L_5; & L_4 &= (\rho_s^0)^4 L_5; \\ L_6 &= 4(\rho_s^0)^2 \ln \rho_s^0 + 4L_2; & L_5 &= \frac{\Delta_5}{\Delta} & L_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \Delta_2 &= \left[2(\rho_s^0)^2 \ln \alpha - \frac{(\rho_s^0)^2}{\eta} (1 + 2c_3\alpha^{-2}) \right] \Delta_5 + \\ &+ \left[\frac{1}{2} (\alpha - 6c_3\alpha^{-1}) + \frac{11}{12} \eta \rho_s^0 \ln \alpha - \frac{8}{3} \rho_s^0 (1 + 2c_3\alpha^{-2}) \right] \Delta \\ \Delta_5 &= c_3 \left[2\alpha + \frac{8}{3} - 11\rho_s^0 + \frac{c_3}{3} (16 - \rho_s^0 - 36\alpha^{-1} - 64\alpha^{-2}) + \right. \\ &+ \left. \frac{\eta \rho_s^0}{3} (11 \ln \alpha - 11 \ln \rho_s^0 + \frac{5}{2}) \right]; & c_3 &= -\frac{1}{2} \eta (\rho_s^0)^2\end{aligned}$$

Итак, с точностью до величин первого порядка малости решение задачи (1)–(4), характеризующее напряженно-деформированное состояние трубы, имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\sigma_\rho^p &= \sigma_\rho^{0p} + \sigma_\rho^{100p} \varepsilon_1 + \sigma_\rho^{010p} \varepsilon_2 + \sigma_\rho^{001p} \varepsilon_3; \\ v^p &= v^{100p} \varepsilon_1 + v^{010p} \varepsilon_2 + v^{001p} \varepsilon_3; \\ \sigma_\rho^e &= \sigma_\rho^{0e} + \sigma_\rho^{100e} \varepsilon_1 + \sigma_\rho^{010e} \varepsilon_2 + \sigma_\rho^{001e} \varepsilon_3; \\ v^e &= v^{100e} \varepsilon_1 + v^{010e} \varepsilon_2 + v^{001e} \varepsilon_3,\end{aligned}\tag{18}$$

так как остаточные члены рядов будут величинами второго порядка малости. Граница пластической зоны также с точностью до величин первого порядка малости будет описываться следующей функцией

$$\rho_s = \rho_s^{100} \varepsilon_1 + \rho_s^{010} \varepsilon_2 + \rho_s^{001} \varepsilon_3\tag{19}$$

Поскольку решение задачи (1)–(4) при указанных выше условиях являются аналитическими функциями, то (5), (6) совпадают с рядами Тейлора ($\varepsilon_i = 0$ ($i = 1, 2, 3$)). Следовательно, в качестве оценки погрешности решения (18), (19) можно использовать одну из оценок ряда Тейлора.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Григорьев О. Д. Некоторые задачи теории пластичности неоднородных тел. Новосибирск: НИИВТ, 1969.
- [2] Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. О выпучивании толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. №8. С. 149–152.
- [3] Захарова Т. Л., Ивлев Д. Д. Приближённое решение плоских задач для идеальных упругопластических неоднородных тел // ПМТФ. 1997. №5. С. 165–172.
- [4] Зачепа В. Р., Сапронов Ю. И. Локальный анализ фредгольмовых уравнений. Воронеж: Изд-во Воронежск. госунивер., 2002. 185 с.
- [5] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [6] Ильюшин А. А. Пластичность. М.: Гостехиздат, 1948. 576 с.
- [7] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 701 с.
- [8] Ишлинский А. Ю. Рассмотрение вопросов об устойчивости равновесия упругих тел с точки зрения математической теории упругости // Укр. матем. журнал. 1954. Т. 6. №2. С. 140–146.
- [9] Колмогоров А. Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 542 с.
- [10] Максимов С. Б., Немировский Ю. В. Некоторые свойства уравнений и метода малого параметра в плоских задачах теории идеальной пластичности // Изв. РАН. МТТ. 1986. №5. С.101–107.
- [11] Минаева Н. В. Метод возмущений в механике деформируемых тел. М. : Научная книга, 2002. 156 с.
- [12] Минаева Н. В., Костырин Н. Б., Мяснянкин Ю. М. О напряженно-деформированном состоянии упругопластических тел, близких к однородным // Изв. РАН МТТ. 2004. №5. С. 150–159.
- [13] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.

- [14] Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М.: Гостехиздат, 1947. 396 с.

N. V. Minaeva, D. V. Sabyinin

THE INVESTIGATION OF STATE OF INHOMOGENEOUS ELASTIC PLASTIC TUBE BY SMALL PARAMETER METHOD

Voronezh State University, Voronezh State University of Engineering Technologies

Abstract. We considered the elastic-plastic tube made of non-uniform material under the action of internal and external hydrostatic. The contours of the cross section are close to circular. The inhomogeneous material and the deviation of the section shape from the canonical characterizes by of the functions known to small parameters. We found a condition defining the boundary of the convergence region of the perturbation method. We obtained a solution describing the stress-strain state of the tube up to the first order of terms.

Keywords: elastic-plastic, thick-walled tube, convergence, method of small parameter.

REFERENCES

- [1] Grigor'ev O. D. Nekotorye zadachi teorii plastichnosti neodnorodnyh tel. Novosibirsk: NIIVT, 1969.(in Russian)
- [2] Ershov L. V., Ivlev D. D. O vypuchivanii tolstostennoj trubyy, nahodyashchejsya pod dejstviem vnutrennego davleniya // Izv. AN SSSR. OTN. 1957. №8. S. 149–152.(in Russian)
- [3] Zaharova T. L., Ivlev D. D. Priblizhynnoe reshenie ploskih zadach dlya ideal'nyh uprugoplasticheskikh neodnorodnyh tel // PMTF. 1997. №5. S. 165–172.(in Russian)
- [4] Zachepa V. R., Sapronov YU. I. Lokal'nyj analiz fredgol'movyh uravnenij. Voronezh: Izd-vo Voronezhsk. gosuniver., 2002. 185 s.(in Russian)
- [5] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s.(in Russian)
- [6] Il'yushin A. A. Plastichnost'. M.: Gostekhizdat, 1948. 576 s.(in Russian)
- [7] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D.. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Fizmatlit, 2001. 701 s.(in Russian)
- [8] Ishlinskij A. YU. Rassmotrenie voprosov ob ustojchivosti ravnovesiya uprugih tel s točki zreniya matematicheskoy teorii uprugosti // Ukr. matem. zhurnal. 1954. T. 6. №2. S. 140–146.(in Russian)
- [9] Kolmogorov A. N., Fomin S.V. EHlementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza. M.: Nauka, 1976. 542 s.(in Russian)
- [10] Maksimov S. B., Nemirovskij YU. V. Nekotorye svojstva uravnenij i metoda malogo parametra v ploskih zadachah teorii ideal'noj plastichnosti // Izv. RAN. MTT. 1986. №5. С.101–107.(in Russian)

- [11] Minaeva N. V. Metod vozmushchenij v mekhanike deformiruemyh tel. M. : Nauchnaya kniga, 2002. 156 s.(in Russian)
- [12] Minaeva N. V., Kostyrin N. B., Myasnyankin YU. M. O napryazhenno-deformirovannom sostoyanii uprugoplasticheskikh tel, blizkih k odnorodnym // Izv. RAN MTT. 2004. №5. S. 150–159.(in Russian)
- [13] Ol'shak V., Ryhlevskij YA.,Urbanovskij Teoriya plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964.(in Russian)
- [14] Filonenko-Borodich M. M. Teoriya uprugosti. M.: Gostekhizdat, 1947. 396 s.(in Russian)

Minaeva Nadezhda Vitalevna

e-mail: minaeva@yandex.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Voronezh State University, Voronezh, Russia

Sabynin Denis Viktorovich

e-mail: minaeva@yandex.ru, graduate Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia