Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 1 (35). С. 57–62

Е. А. Микишанина

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В УПРУГО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ

Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. Рассматривается двумерная стационарная задача фильтрации жидкости, описывающая проникание жидкости через упругую пористую плиту, в рамках гипотезы о зависимости коэффициента фильтрации среды от первого инварианта тензора напряжений. Аналитически методом Чарного определяется давление жидкости внутри плиты, строятся графики давления в тестовом примере.

Ключевые слова: упруго-пористая плита, фильтрация, коэффициент фильтрации, напряжения, метод Чарного.

УДК: 532.685

Введение. Решение двумерной задачи стационарной фильтрации в пористой среде с переменным коэффициентом фильтрации $k(x_1, x_2)$ (или проницаемостью $k_\text{п}(x_1, x_2) = \mu k(x_1, x_2 \backslash \rho$, ρ, μ - плостность и вязкость жидкости соответственно) сводится к определению функции давления $P(x_1, x_2)$ из дифференциального уравнения [1]

$$\nabla \cdot (k(x_1, x_2) \cdot \nabla P(x_1, x_2)) = 0. \tag{1}$$

Среда считается слабо деформируемой, изотропной, подчиняется обобщенному закону Гука, фильтрация подчиняется линейному закону Дарси.

Решение подобных задач, но с постоянным коэффициентом фильтрации, приводилось автором ранее в работах [2,3]. Однако, при возникновении на границе среды гидравлического напора, будет изменяться поровое пространство, что повлечет за собой изменение проницаемости и коэффициента фильтрации.

Аналитическое решение краевой задачи для уравнения (1) довольно трудоемко. В случае, если коэффициент фильтрации зависит только от одной переменной, например, $k = k(x_1)$, аналитическое решение задачи значительно упрощается.

Коэффициент фильтрации. Представляя поровое пространство в виде капилярных трубок малого радиуса [4], зависимость между средним радиусом поры a,

Микишанина Евгения Арифжановна
`e-mail:` evaeva_84@mail.ru, старший преподаватель, Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова, г. Чебоксары, Россия

Поступила 30.01.2018

коэффициентом фильтрации k и вязкостью жидкости μ примет вид

$$a^2 = \frac{8\mu k}{\rho g}. \tag{2}$$

В силу того, что при возникновении в среде напряжений в результате внешнего распределенного силового воздействия, количество пор остается постоянным, относительное изменение поперечного сечения трубки определится следующим образом:

$$\frac{a^2 - a_0^2}{a_0^2} = \frac{1-2\nu}{E} J_1(\sigma),$$

где E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона, $J_1(\sigma) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ - первый инвариант тензора напряжений, a_0, a - средний радиус недеформированной и деформированной поры соответственно.

Следовательно, с учетом (2)для коэффициента фильтрации справедливо

$$k = k_0 \left(1 + \frac{1-2\nu}{E} J_1(\sigma)\right), \tag{3}$$

где k_0, k - коэффициенты фильтрации недеформированной и деформированной сред соответственно.

Постановка задачи. Пусть оси декартовой системы координат ориентированы как показано на рисунке 1. Сделаем следующие допущения. Плита $-\infty < x < +\infty$, $0 \le y \le 1$, $-h/2 \le z \le h/2$ (рисунок 1) под действием приложенных моментов терпит чистый цилиндрический изгиб в плоскости Oyz, R – заданный радиус кривизны нейтральной «линии» сечения $z = 0$.

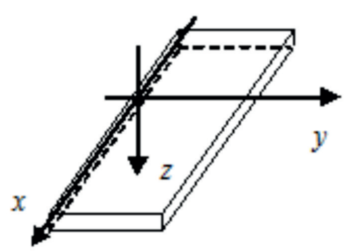

Рис. 1. Плита

Пренебрегая напряжением $\sigma_{z,z}$ в силу его малости по сравнению с напряжениями $\sigma_{x,x} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)R} z$, $\sigma_{y,y} = \frac{E}{(1-\nu^2)R} z$, скорректированный коэффициент фильтрации согласно формуле (3) можно записать в виде:

$$k = k_0 \left(1 + Az\right), \tag{4}$$

где $A = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)R}$.

Пусть на поверхности $z = -h/2$ задано давление жидкости $p_0(y)$, а границы $y = 0$ и $y = 1$ являются для жидкости непроницаемыми. Считая радиус кривизны большим, а изгиб малым, двумерную краевую задачу фильтрации через плиту в поперечном сечении можно записать в виде

$$\nabla \cdot ((1 + Az) \cdot \nabla P(y, z)) = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} P(y, -h/2) = p_0(y), \quad P(y, h/2) = 0, \\ \tfrac{\partial P}{\partial y}(0, z) = \tfrac{\partial P}{\partial y}(1, z) = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Далее воспользуемся методом Чарного [5].

Аналитическое решение. Для решения задачи (5) с граничными условиями (6) введем новые переменные:

$$\tilde{z} = 1 + Az, \quad \tilde{y} = Ay. \tag{7}$$

Преобразование (7) переводит отрезки $[0, 1]$, $[-h/2, h/2]$ в отрезки $[0, A]$, $[1 - Ah/2, 1 + Ah/2]$ соответственно. Тогда уравнение (5) и граничные условия (6) в новых переменных примут вид

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{z}}\frac{\partial P}{\partial \tilde{z}} = 0. \tag{8}$$

$$\begin{gathered} P(\tilde{y}, 1 - \tfrac{Ah}{2}) = p(\tilde{y}), \quad P(\tilde{y}, 1 + \tfrac{Ah}{2}) = 0, \\ \tfrac{\partial P}{\partial \tilde{y}}(0, \tilde{z}) = \tfrac{\partial P}{\partial \tilde{y}}(A, \tilde{z}) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Уравнение (8) является уравнением Лапласа в цилиндрических координатах в осисимметричном случае.

Разделяя переменные в искомой функции $P(\tilde{y}, \tilde{z}) = Y(\tilde{y}) \cdot Z(\tilde{z})$ перепишем уравнение (8) в виде

$$Y''Z + YZ'' + \frac{1}{\tilde{z}}Z'Y = 0.$$

Последнее дифференциальное уравнение после разделения переменных сведется к решению двух дифференциальных уравнений

$$Y'' \pm \lambda^2 Y = 0, \quad Z'' + \frac{1}{\tilde{z}}Z' \mp \lambda^2 Z = 0. \tag{10}$$

При $\lambda = 0$ решение уравнений (10) примет вид

$$Y = a_0 + a_1\tilde{y}, \quad Z = b_0 + b_1 \ln \tilde{z}.$$

Решение дифференциальных уравнений

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0, \qquad Z'' + \frac{1}{\tilde{z}}Z' + \lambda^2 Z = 0.$$

имеет вид

$$Y = A_\lambda e^{\lambda\tilde{y}} + B_\lambda e^{-\lambda\tilde{y}}$$

$$Z = C_\lambda J_0(\lambda\tilde{z}) + D_\lambda Y_0(\lambda\tilde{z}),$$

где J_0, Y_0 - функции Бесселя 1 и 2 рода нулевого порядка вещественного аргумента, $\lambda \in R \backslash \{0\}$.

Решение дифференциальных уравнений

$$Y'' + \lambda^2 Y = 0, \qquad Z'' + \frac{1}{\tilde{z}}Z' - \lambda^2 Z = 0.$$

имеет вид

$$Y = A_\lambda \cos(\lambda\tilde{y}) + B_\lambda \sin(\lambda\tilde{y})$$

$$Z = C_\lambda I_0(\lambda\tilde{z}) + D_\lambda K_0(\lambda\tilde{z}),$$

где I_0, K_0 - функции Бесселя 1 и 2 рода нулевого порядка мнимого аргумента, $\lambda \in R\backslash\{0\}$. С учетом граничных условий (9) искомая функция запишется в виде

$$P(\tilde{y},\tilde{z}) = b_0 + b_1 \ln\tilde{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n I_0\left(\frac{\pi n\tilde{z}}{A}\right) + D_n K_0\left(\frac{\pi n\tilde{z}}{A}\right)\right)\cos\left(\frac{\pi n\tilde{y}}{A}\right). \qquad (11)$$

Раскладывая граничную функцию $p(\tilde{y})$ в ряд по косинусам и используя граничные условия (9), получим выражения для постоянных:

$$b_1 = \frac{p_0}{\ln\left(\frac{2-Ah}{2+Ah}\right)}, \quad b_0 = \frac{-p_0\ln\left(\frac{2+Ah}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2-Ah}{2+Ah}\right)}.$$

$$C_n = \frac{-p_n K_0\left(\pi n\frac{2+Ah}{2A}\right)}{I_0\left(\pi n\frac{2+Ah}{2A}\right)K_0\left(\pi n\frac{2-Ah}{2A}\right) - I_0\left(\pi n\frac{2-Ah}{2A}\right)K_0\left(\pi n\frac{2+Ah}{2A}\right)}$$

$$D_n = \frac{p_n I_0\left(\pi n\frac{2+Ah}{2A}\right)}{I_0\left(\pi n\frac{2+Ah}{2A}\right)K_0\left(\pi n\frac{2-Ah}{2A}\right) - I_0\left(\pi n\frac{2-Ah}{2A}\right)K_0\left(\pi n\frac{2+Ah}{2A}\right)}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим функцию давления в виде:

$$P(y,z) = \frac{p_0\ln\left(\frac{2+2Az}{2+Ah}\right)}{\ln\left(\frac{2-Ah}{2+Ah}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n I_0\left(\frac{\pi n(1+Az)}{A}\right) + D_n K_0\left(\frac{\pi n(1+Az)}{A}\right)\right)\cos\left(\pi n y\right),$$

где постоянные C_n, D_n определятся из предыдущих формул.

Числовой пример. Через однородно-изотропную тонкую плиту (коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$) в виде полосы $-\infty < x < +\infty$, $-1 \le y \le 1$, $-h/2 \le z \le h/2$, $h = 0.1$, подверженную чистому цилиндрическому изгибу с заданным радиусом кривизны $R = 20$ в плоскости Oyz происходит установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости, которая оказывает на верхней поверхности плиты давление $p_0 = 1 + y^2$. Грани $y = -1$ и $y = 1$ непроницаемы. Определить давление жидкости внутри плиты и на ее границах.

Скорректированный коэффициент фильтрации примет вид

$$k = k_0(1 + 0.0375z).$$

Разложение граничной функции в ряд по косинусам на итервале (-1,1) имеет вид

$$p_0 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos(\pi n y).$$

На рисунке 2 представлены графики функции давления жидкости (с точностью до двадцати членов ряда Фурье). Учитывая симметричность функции давления, кривые построены при $y \in [0,1]$ на каждой прямой $z = -0.05$ (1), $z = -0.025$ (2), $z = 0$ (3), $z = 0.025$ (4), $z = 0.05$ (5). Линии (1) и (5) соответствуют граничным условиям.

Заключение. В работе была решена двумерная задача фильтрации жидкости через тонкую плиту с переменной проницаемостью (или переменным коэффициентом фильтрации) аналитическим методом Чарного. Переменность коэффициента фильтрации связана с возникающими в среде напряжениями. Решение задачи строилось в рамках гпотезы о линейной зависимости коэффициента фильтрации с первым инвариантом тензора напряжений.

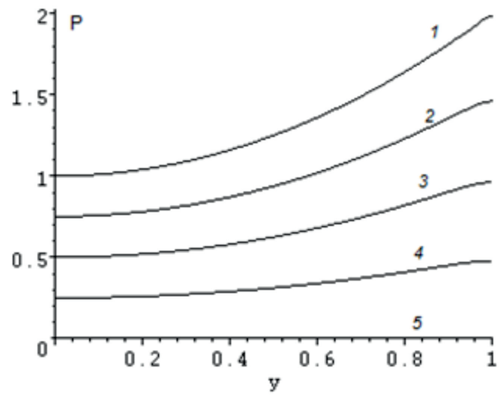

Рис. 2. Функция давления

ЛИТЕРАТУРА

[1] Голубев Г. В., Тумашев Г. Г. Фильтрация несжиемой жидкости в неоднородной пористой среде. Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1972. 195 с.

[2] Микишанина Е. А., Терентьев А. Г. Фильтрация через упруго-пористую плиту // Научный журнал "Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. №4(30). С. 33–40.

[3] Микишанина Е. А., Терентьев А. Г. Об определении напряженного состояния упруго-пористой среды // Ученые записки Казан. ун-та. Серия: физ.-мат. науки. 2017. Т.159. № 2. С. 204–215.

[4] Kozeny J. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss- und Kanal-versickerung // Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1931. H.3. P. 28-31.

[5] Чарный И. А. Приток к скважинам в пласте с переменной проницаемостью и мощностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. №2. С. 180–188.

E. A. Mikishanina

THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF FLUID FILTRATION IN AN ELASTIC-POROUS MEDIUM WITH VARIABLE PERMEABILITY

Chuvash state University named I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia

Abstract. A two-dimensional stationary problem of fluid filtration is considered, which describes the liquid penetration through an elastic porous plate, within the framework of the hypothesis of the dependence of the medium filtration coefficient on the first invariant of the stress tensor. Analytically, the pressure of the liquid inside the plate is determined by the Charny method, the pressure graphs in the test example are constructed.

Keywords: elastic-porous plate, filtration, filtration coefficient, voltage, method of Charny.

REFERENCES

[1] Golubev G. V., Tumashev G. G. Fil'traciya neszhiemoj zhidkosti v neodnorodnoj poristoj srede. Kazan' : Izd-vo Kazan. un-ta, 1972. 195 s. (in Russian)

[2] Mikishanina E. A., Terent'ev A. G. Fil'traciya cherez uprugo-poristuyu plitu // Nauchnyj zhurnal "Vestnik CHGPU im. I. YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2016. №4(30). S. 33–40. (in Russian)

[3] Mikishanina E. A., Terent'ev A. G. Ob opredelenii napryazhennogo sostoyaniya uprugo-poristoj sredy // Uchenye zapiski Kazan. un-ta. Seriya: fiz.-mat. nauki. 2017. T.159. № 2. S. 204–215. (in Russian)

[4] Kozeny J. Grundwasserbewegung bei freiem Spiegel, Fluss- und Kanal-versickerung // Wasserkraft und Wasserwirtschaft. 1931. H.3. P. 28-31.

[5] CHarnyj I. A. Pritok k skvazhinam v plaste s peremennoj pronicaemost'yu i moshchnost'yu // Izv. AN SSSR. MZHG. 1967. №2. S. 180–188.

Mikishanina Evgeniya Arifzhanovna

`e-mail:` evaeva_84@mail.ru, senior lecturer, Chuvash state University name I. N. Ulyanov, Cheboksary, Russia