

А. Н. Прокудин, С. В. Фирсов

РАСЧЕТ ПОЛЗУЧЕСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА СО СВОБОДНЫМИ КОНЦАМИ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Исследуется процесс установившейся ползучести во вращающемся цилиндре со свободными концами. Предполагается, что в цилиндре имеет место осевая симметрия и обобщенная плоская деформация. Приведена постановка задачи на основе степенного закона на ползучести. Сформулированная система дифференциальных уравнений решается методом конечных разностей. Получены численные зависимости напряжений и деформаций в цилиндре от времени.

Ключевые слова: упругость, ползучесть, вращающийся цилиндр, метод конечных разностей

УДК: 539.3

Введение. Способность материала необратимо деформироваться даже при постоянных во времени нагрузках называется ползучестью. Серьезный интерес к этому явлению возник в середине XX-го века при анализе работы паровых турбин [1, 2]. Под действием центробежных сил в дисках и лопатках турбин возникают напряжения, которые приводят к медленному накоплению деформаций ползучести. В результате этого сокращается срок службы турбины. Ползучесть характерна в той или иной степени для всех материалов. С увеличением температуры ползучесть материалов становится более выраженной, при этом многие материалы, например, лед, бетон, полимеры и композиты проявляют заметные свойства ползучести даже при комнатной температуре.

К настоящему времени опубликовано множество работ по изучению и моделированию явления ползучести, в т.ч. монографии [1–6]. Расчеты на ползучесть широко применяются при анализе конструкций и сооружений на длительную прочность. С другой стороны явление ползучести оказалось полезным в технологических процессах формирования, поскольку в этом случае возможно достижение значительных деформаций

© Прокудин А. Н., Фирсов С. В., 2018

Прокудин Александр Николаевич

e-mail: prokudin@imim.ru, кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Фирсов Сергей Викторович

e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, аспирант, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №007-00285-18-00

Поступила 10.02.2018

при относительно небольших и постоянных нагрузках, что приводит к существенной экономии энергии по сравнению с пластическим формованием [2].

Для построения математической модели процесса ползучести предполагается существование потенциала ползучести [4–6], конкретный вид которого определяется из экспериментов по одноосной деформации. Следует отметить, что определяющие соотношения теории ползучести являются достаточно сложными для изучения и их точные решения известны лишь в некоторых простейших случаях, например [7].

В настоящей работе изучается процесс ползучести во вращающемся цилиндре со свободными концами. Этой задаче и близкой к ней задачам о вращающемся цилиндре с закрепленными концами о вращающемся диске посвящено множество публикаций. В известной монографии Ю.Н. Работнова [1] исследуется неустановившаяся ползучесть вращающегося изотропного цилиндра с использованием экспоненциального закона ползучести. Влияние начальной анизотропии материала на процесс ползучести во вращающемся полом цилиндра анализировалось в работах [8, 9]. Установлено, что использование ортотропного материала может повысить срок службы цилиндра. В рамках теории больших деформаций данная задача решена в [10, 11]. Следует отметить, что в работах [8–11] используется степенной закон ползучести, а также предполагается, что напряжения в цилиндре не зависят от времени. Неустановившаяся ползучесть цилиндра под действием сил инерции, внутреннего и внешнего давления с учетом анизотропии и упрочнения исследовалась в работе [12]. В ней определены закономерности развития ползучести и релаксации напряжений в цилиндре для разных вариантов анизотропии. В последние годы публикуется большое количество работ, посвященных ползучести в функционально-градиентных материалах, отметим из них лишь наиболее близкие к теме данной работы [13–17].

Постановка задачи. Рассмотрим полый цилиндр бесконечной длины с внутренним и внешним радиусом a и b соответственно. Цилиндр вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью $\omega(t)$. Введем цилиндрическую систему координат r, ϕ, z , ось Z которой совпадает с образующей цилиндра. Предполагаем, что имеет место осевая симметрия и обобщенная плоская деформация, в этом случае вектор перемещений имеет две ненулевые компоненты: u_r и u_z . В дальнейшем компоненту u_r будем обозначать кратко u . Для удобства перейдем к безразмерной радиальной координате:

$$\beta = r/b, \delta = a/b, \delta \leq \beta \leq 1.$$

Для компонент тензора упругих деформаций введем обозначение e_{ij} , а для деформаций ползучести — p_{ij} . Предполагаем, что полные деформации состоят из упругих деформаций и деформаций ползучести:

$$e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad e_{\phi\phi} + p_{\phi\phi} = \frac{u}{\beta}, \quad e_{zz} + p_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{const} \quad (1)$$

Напряжения (в безразмерном виде) связаны с упругими деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)e_{rr} + \nu e_{\phi\phi} + \nu e_{zz}) \\ \sigma_{\phi\phi} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + (1-\nu)e_{\phi\phi} + \nu e_{zz}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{\sigma_y} \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu e_{rr} + \nu e_{\phi\phi} + (1-\nu)e_{zz}) \end{aligned} \quad (2)$$

где E — Модуль Юнга, σ_y — предел текучести, ν — коэффициент Пуассона.

Из последних соотношений можно получить:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi}) + \frac{E}{\sigma_y} e_{zz} \quad (3)$$

При этом суммарная осевая сила, действующая на цилиндр равна нулю:

$$2\pi \int_{\delta}^1 \beta \sigma_{zz} d\beta = 0. \quad (4)$$

Единственное нетривиальное уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{\beta} = -\Omega\beta, \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_y}. \quad (5)$$

Выразим напряжения через перемещения и деформации ползучести с помощью соотношений (1) и (2), подставим в уравнение равновесия и получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial u_r}{\partial \beta} - \frac{1}{\beta^2} u = & - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{\sigma_y}{E} \Omega \beta + \\ & + \frac{\partial p_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\nu}{(1-\nu)} \left(\frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial \beta} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\beta} \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} (p_{rr} - p_{\phi\phi}). \end{aligned} \quad (6)$$

Скорости деформаций ползучести определяются законом [3]:

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (7)$$

где C — потенциал ползучести.

Запишем потенциал ползучести в соответствии со степенным законом ползучести:

$$C = B\Sigma^n, \quad (8)$$

где B, n — параметры материалы, определяемые экспериментально, Σ — эквивалентное напряжение.

Эквивалентное напряжение Σ примем в следующей форме:

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_{rr} - \sigma)^2 + (\sigma_{\phi\phi} - \sigma)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma)^2}, \quad (9)$$

где $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$.

Введем безразмерные величины: $\tau = t/T, X = (BT\sigma_y^{n-1})/2$, тогда для потенциала (8) можно получить выражения для скоростей деформаций ползучести:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} = \frac{\partial p_{rr}}{\partial \tau} &= Xn\Sigma^{n-2} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{\phi\phi} = \frac{\partial p_{\phi\phi}}{\partial \tau} &= Xn\Sigma^{n-2} (2\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{zz} = \frac{\partial p_{zz}}{\partial \tau} &= Xn\Sigma^{n-2} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}). \end{aligned} \quad (10)$$

здесь T — длительность процесса.

Для определения напряжений в цилиндре помимо перемещений и деформаций ползучести также необходимо знать полную осевую деформацию. Воспользуемся соотношениями (2)–(4) и после преобразований получим:

$$e_{rr} + p_{rr} = \frac{2}{(1 - \delta^2)} \left(\frac{\nu}{1 - \nu} \int_{\delta}^1 \beta (p_{rr} + p_{\phi\phi}) d\beta + \int_{\delta}^1 \beta p_{zz} d\beta - \frac{\nu}{1 - \nu} (u_r(1) - \delta u_r(\delta)) \right). \quad (11)$$

Система уравнений (1), (2), (6), (10) и (11) описывает процесс установившейся ползучести во вращающемся цилиндре. Полученная система уравнений сводится к уравнениям теории упругости, если предположить, что деформации ползучести в среде не накапливаются. Также, если предположить, что полная осевая деформация равна нулю $e_{zz} + p_{zz} = \partial u_z / \partial z = 0$, то получим задачу о развитии ползучести во вращающемся цилиндре с закрепленными концами (плоское деформированное состояние).

Перейдем к формулировке начальных и граничных условий. В начальный момент времени $\tau = 0$ деформации ползучести в цилиндре отсутствуют:

$$p_{rr} = p_{\phi\phi} = p_{zz} = 0. \quad (12)$$

На внутренней поверхности трубы используются два варианта граничных условий. Первый — цилиндр с жестким включением:

$$u|_{\beta=\delta} = 0. \quad (13)$$

Второй вариант — полый цилиндр:

$$\sigma_{rr}|_{\beta=\delta} = 0. \quad (14)$$

Внешняя поверхность трубы свободна от напряжений:

$$\sigma_{rr}|_{\beta=1} = 0. \quad (15)$$

Численная схема. Для численного решения поставленной начально-краевой задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных воспользуемся методом конечных разностей [18]. Построим в области деформирования $\delta \leq \beta \leq 1$ равномерную сетку из N узлов. Шаг сетки $\Delta\beta$ вычисляется, как: $\Delta\beta = (1 - \delta)/(n - 1)$, а координаты i -го узла: $\beta_i = \delta + i\Delta\beta$. Для аппроксимации пространственных производных некоторой неизвестной функции $y(\beta, \tau)$ воспользуемся конечно-разностными операторами 2-го порядка точности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(\beta, \tau)}{\partial \beta^2} &\cong \frac{y(\beta + \Delta\beta, \tau) - 2y(\beta, \tau) + y(\beta - \Delta\beta, \tau)}{\Delta\beta^2}, \\ \frac{\partial y(\beta, \tau)}{\partial \beta} &\cong \frac{y(\beta + \Delta\beta, \tau) - y(\beta - \Delta\beta, \tau)}{2\Delta\beta}. \end{aligned} \quad (16)$$

В граничных узлах сетки также используются односторонние шаблоны:

$$\begin{aligned} \beta = \delta : \frac{\partial y(\beta, \tau)}{\partial \beta} &\cong \frac{-y(\beta + 2\Delta\beta, \tau) + 4y(\beta + \Delta\beta, \tau) - 3y(\beta, \tau)}{2\Delta\beta}, \\ \beta = 1 : \frac{\partial y(\beta, \tau)}{\partial \beta} &\cong \frac{y(\beta - 2\Delta\beta, \tau) - 4y(\beta - \Delta\beta, \tau) + 3y(\beta, \tau)}{2\Delta\beta}. \end{aligned} \quad (17)$$

Весь процесс деформирования разобьем на K равных шагов продолжительностью $\Delta\tau$. В уравнения (10) входит производная по времени, для ее аппроксимации воспользуемся явной схемой:

$$\frac{p_{ii}(\beta, \tau + \Delta\tau) - p_{ii}(\beta, \tau)}{\Delta\tau} \cong \dot{p}_{ii}(\beta, \tau) \quad (18)$$

Заметим, что в этом случае первый временной шаг соответствует численному решению упругой задачи. Определенные интегралы из уравнения (11) вычисляются с помощью метода трапеций.

Результаты расчетов. Для проведения расчетов использовались следующие параметры материала: $\rho = 7700$ кг/м³, $E = 210$ ГПа, $\sigma_y = 250$ МПа, $\nu = 0.3$, $n = 3$, $B = 4.1 \cdot 10^{-22}$ с⁻¹ · Па⁻ⁿ. Размеры цилиндра: $a = 0.02$ м., $b = 0.1$ м. Длительность процесса деформирования $T = 1000$ с. Параметры сетки: $N = 2500$, $K = 1000$. Скорость вращения цилиндра: $\omega = 500$ рад/с.

На рис. 1–2 представлены графики эквивалентных напряжений в цилиндре с жестким включением (13) и поломом цилиндре (14) для моментов времени $\tau = 0.0, 0.5, 1.0$. Аналогичные графики для деформаций ползучести $p_{rr}, p_{\phi\phi}$ представлены на рис. 3, 4. Проведенные расчеты показали, что в процессе деформирования напряжения в цилиндре перераспределяются от начального упругого решения и к некоторому моменту времени τ_0 стабилизируются. В результате этого накопление деформаций ползучести происходит с постоянной скоростью $\dot{p}_{ii}(\beta, \tau_0)$ и дальнейшие вычисления можно значительно упростить, в частности для деформаций ползучести принять: $p_{ii}(\beta, \tau_0 + \Delta\tau) = p_{ii}(\beta, \tau_0) + \Delta\tau \cdot \dot{p}_{ii}(\beta, \tau_0)$. Видим, что деформирование полого цилиндра происходит более интенсивно, чем цилиндра с жестким включением, при этом стабилизация напряженного состояния в поломом цилиндре также происходит быстрее.

Интересно сравнить полученные результаты с расчетами для цилиндра с закрепленными концами ($\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$). Анализ показал, что в свободном цилиндре имеют место более высокие напряжения и скорости деформаций ползучести, в особенности это характерно для цилиндра с жестким включением. Для него эквивалентные напряжения к концу процесса выше приблизительно в два раза.

Для оценки точности используемого алгоритма построим точное решение для упрощенной постановки задачи. Далее воспользуемся идеями работы [8], где впервые было получено решение для ортотропного цилиндра. Положим, что в цилиндре имеет место плоская деформация, а упругие деформации и напряжения не зависят от времени, тогда:

$$\begin{aligned} \dot{p}_{rr} &= \frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{Xn\Sigma^{n-2}}{2} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{\phi\phi} &= \frac{v}{\beta} = \frac{Xn\Sigma^{n-2}}{2} (2\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \dot{p}_{zz} &= 0 = \frac{Xn\Sigma^{n-2}}{2} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}). \end{aligned} \quad (19)$$

где v — скорости.

Из последнего уравнения можно найти:

$$\sigma_{zz} = \frac{(\sigma_{rr} + \sigma_{\phi\phi})}{2} \quad (20)$$

Решение уравнения несжимаемости $\dot{p}_{rr} + \dot{p}_{\phi\phi} + \dot{p}_{zz} = 0$:

$$v = \frac{C}{\beta}; \dot{p}_{rr} = -\frac{C}{\beta^2}; \dot{p}_{\phi\phi} = \frac{C}{\beta^2}. \quad (21)$$

где C — константа интегрирования.

Далее из уравнений (19)–(21) найдем:

$$\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{rr} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{C}{Xn}\right)^{\frac{1}{n-1}} \beta^{-\frac{2}{n-1}} \quad (22)$$

Подставим найденное выражение в уравнение равновесия (5), решая которое получим:

$$\sigma_{rr} = -\frac{n-1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n}{n-1}} \left(\frac{C}{Xn}\right)^{\frac{1}{n-1}} \beta^{-\frac{2}{n-1}} - \frac{1}{2}\Omega\beta^2 + D \quad (23)$$

где D — константа интегрирования.

С помощью граничных условий (13)–(15) можно найти значения констант C, D и получить окончательные выражения для напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{zz}$ и скоростей деформаций ползучести $\dot{p}_{rr}, \dot{p}_{\phi\phi}$. Сравнение результатов полученных с помощью численного алгоритма для случая плоской деформации и по формулам (21), (23) показало, что в ходе процесса деформирования напряжения и скорости деформаций ползучести стремятся к аналитическому решению задачи (19) с высокой степенью точности.

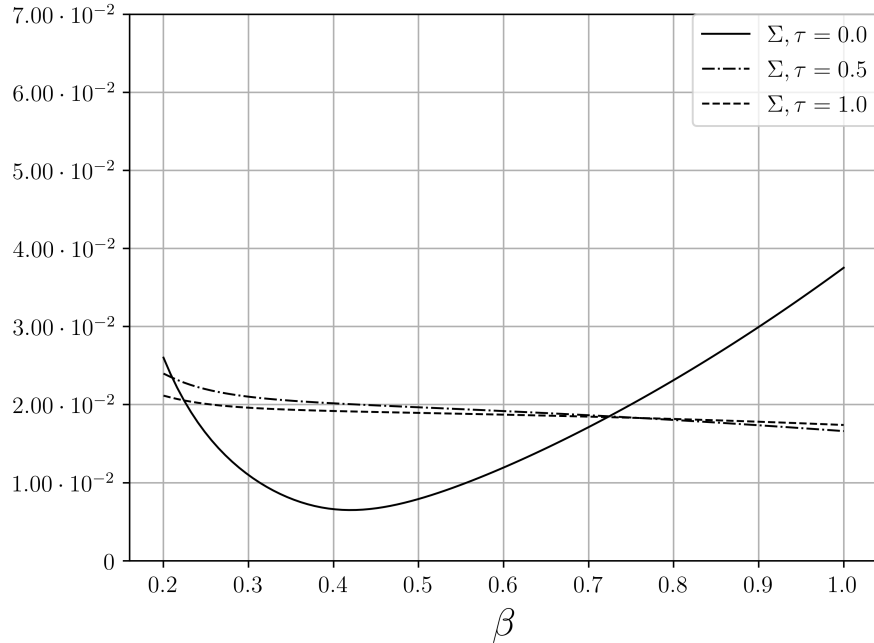
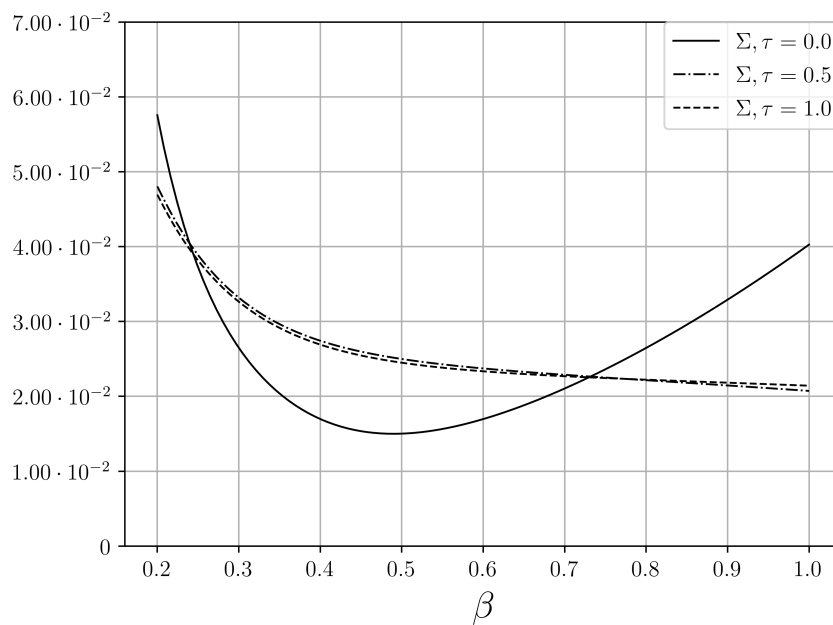
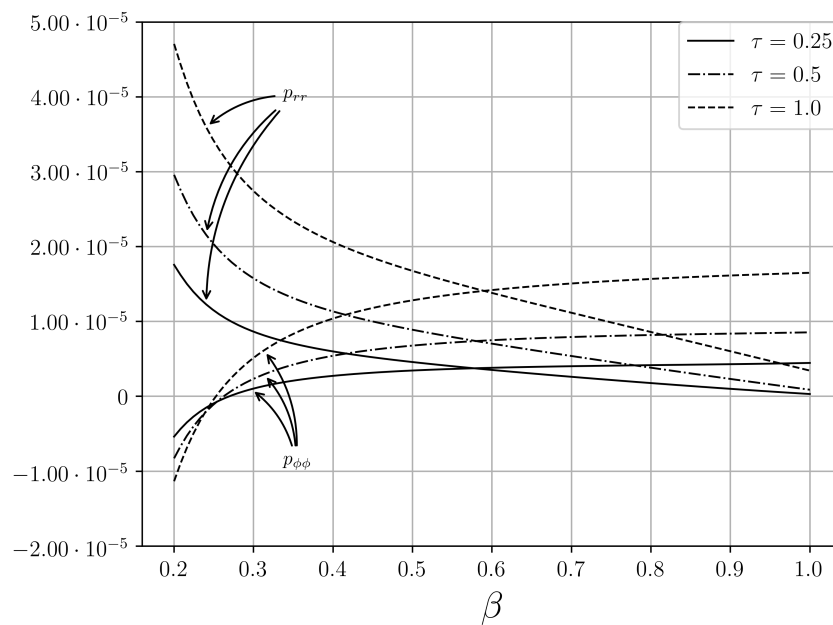


Рис. 1. Эквивалентное напряжение Σ в цилиндре с жестким включением

Рис. 2. Эквивалентное напряжение Σ в полем цилиндреРис. 3. Деформации ползучести p_{rr} и $p_{\phi\phi}$ в цилиндре с жестким включением

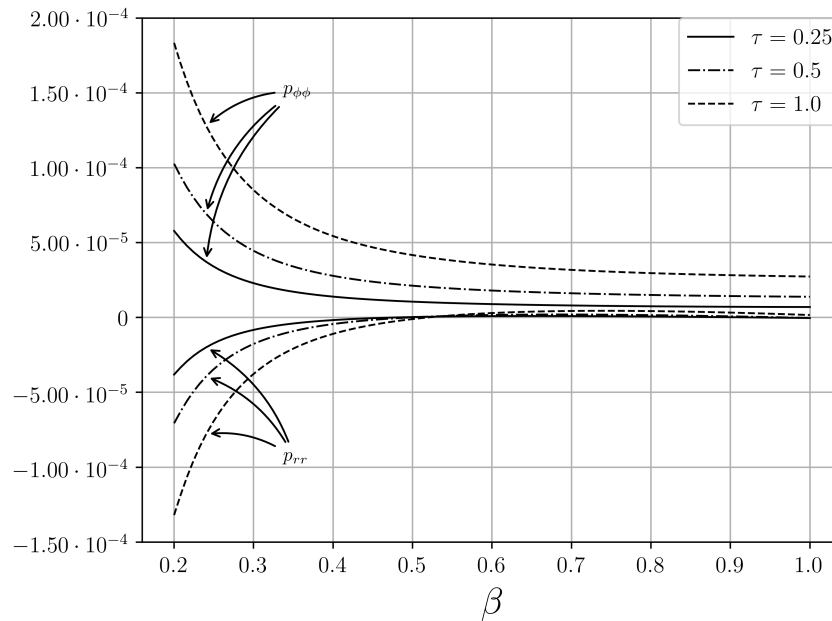


Рис. 4. Деформации ползучести p_{rr} и $p_{\phi\phi}$ в полем цилиндре

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
- [2] Локощенко А. М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
- [3] Odqvist F. K. G. Mathematical theory of creep and creep rupture. Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 p.
- [4] Betten J. Creep mechanics. Berlin: Springer, 2008. 367 p.
- [5] Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and creep of metals. Berlin: Springer-Verlag, 2011. 434 p.
- [6] Naumenko K., Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 220 p.
- [7] Kobelev V. Some basic solutions for nonlinear creep // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. № 19–20. P. 3372–3381.
- [8] Bhatnagar N. S., Arya V. K., Debnath K. K. Creep Analysis of Orthotropic Rotating Cylinder // Journal of Pressure Vessel Technology. 1980. Vol. 102. № 4. P. 371–377.
- [9] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of an internally pressurised orthotropic rotating cylinder // Nuclear Engineering and Design. 1984. Vol. 83. № 3. P. 379–388.
- [10] Rimrott F. P. J., Luke J. R. Large Strain Creep of Rotating Cylinders // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1961. Vol. 41. № 12. P. 485–500.
- [11] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of orthotropic rotating cylinders considering finite strains // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1986. Vol. 21. № 1. P. 61–71.

- [12] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Analysis of an orthotropic thick-walled cylinder under primary creep conditions // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 1986. Vol. 23. № 3. P. 165–185.
- [13] Singh T., Gupta V. K. Modeling Steady State Creep in Functionally Graded Thick Cylinder Subjected to Internal Pressure // *Journal of Composite Materials*. 2010. Vol. 44. № 11. P. 1317–1333.
- [14] Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder // *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. № 2. P. 747–758.
- [15] Mangal S. K., Kapoor N., Singh T. Steady-State Creep Analysis of Functionally Graded Rotating Cylinder // *Strain*. 2013. Vol. 49. № 6. P. 457–466.
- [16] Nejad M. Z., Hoseini Z., Niknejad A., Ghannad M. Steady-State Creep Deformations and Stresses in FGM Rotating Thick Cylindrical Pressure Vessels // *Journal of Mechanics*. 2015. Vol. 31. № 1. P.1–6.
- [17] Bose T., Rattan M. Effect of thermal gradation on steady state creep of functionally graded rotating disc // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2018. Vol. 67. № Supplement C. P. 169–176.
- [18] LeVeque R. J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations steady-state and time-dependent problems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 342 p.

A. N. Prokudin, S. V. Firsov

CREEP ANALYSIS OF ROTATING CYLINDER WITH FREE ENDS

Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. The process of steady-state creep in rotating cylinder with free ends is investigated. Axial symmetry and generalized plane strain in cylinder are assumed. Piecewise linear potential and power creep law are used in problem statement. Finite difference method is utilized to solve governing system of differential equations. Dependences of stresses and strains in cylinder on the time are examined.

Keywords: elasticity, creep, rotating cylinder, finite difference method

REFERENCES

- [1] Rabotnov Yu. N.. Creep of structural elements. M.: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian)
- [2] Lokoshchenko A. M. Modeling of creep and long-term strength of metals. M.: MGIU, 2007. 264 p. (in Russian)
- [3] Odqvist F. K. G. Mathematical theory of creep and creep rupture. – Oxford: Clarendon Press, 1974. 200 p.
- [4] Betten J. Creep mechanics. Berlin: Springer, 2008. 367 p.
- [5] Rusinko A., Rusinko K. Plasticity and creep of metals. Berlin: Springer-Verlag, 2011. 434 p.
- [6] Naumenko K., Altenbach H. Modeling of Creep for Structural Analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. 220 p.
- [7] Kobelev V. Some basic solutions for nonlinear creep // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. № 19–20. P. 3372–3381.
- [8] Bhatnagar N. S., Arya V. K., Debnath K. K. Creep Analysis of Orthotropic Rotating Cylinder // Journal of Pressure Vessel Technology. 1980. Vol. 102. № 4. P. 371–377.
- [9] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of an internally pressurised orthotropic rotating cylinder // Nuclear Engineering and Design. 1984. Vol. 83. № 3. P. 379–388.
- [10] Rimrott F. P. J., Luke J. R. Large Strain Creep of Rotating Cylinders // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1961. Vol. 41. № 12. P. 485–500.
- [11] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Creep analysis of orthotropic rotating cylinders considering finite strains // International Journal of Non-Linear Mechanics. 1986. Vol. 21. № 1. P. 61–71.
- [12] Bhatnagar N. S., Kulkarni P. S., Arya V. K. Analysis of an orthotropic thick-walled cylinder under primary creep conditions // International Journal of Pressure Vessels and Piping. 1986. Vol. 23. № 3. P. 165–185.

Prokudin Aleksandr Nikolaevich

e-mail: prokudin@imim.ru, Candidate of Engineering Sciences, Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia,

Firsov Sergey Viktorovich

e-mail: firsov.s.new@yandex.ru, Postgraduate student, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

[13] Singh T., Gupta V. K. Modeling Steady State Creep in Functionally Graded Thick Cylinder Subjected to Internal Pressure // *Journal of Composite Materials*. 2010. Vol. 44. № 11. P. 1317–1333.

[14] Singh T., Gupta V. K. Effect of anisotropy on steady state creep in functionally graded cylinder // *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. № 2. P. 747–758.

[15] Mangal S. K., Kapoor N., Singh T. Steady-State Creep Analysis of Functionally Graded Rotating Cylinder // *Strain*. 2013. Vol. 49. № 6. P. 457–466.

[16] Nejad M. Z., Hoseini Z., Niknejad A., Ghannad M. Steady-State Creep Deformations and Stresses in FGM Rotating Thick Cylindrical Pressure Vessels // *Journal of Mechanics*. 2015. Vol. 31. № 1. P.1–6.

[17] Bose T., Rattan M. Effect of thermal gradation on steady state creep of functionally graded rotating disc // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2018. Vol. 67. № Supplement C. P. 169–176.

[18] LeVeque R. J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations steady-state and time-dependent problems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 342 p.