

Т. В. Митрофанова¹, Е. А. Деревянных²

О ПОЛЕ ХАРАКТЕРИСТИК И ЛИНИЯХ РАЗРЫВА НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

¹ Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева,
г. Чебоксары, Россия

² Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые вопросы теории кручения анизотропных однородных и неоднородных стержней. Анизотропия тел и конструкций является одним из важных свойств, обусловленных технологическими характеристиками и конструктивными решениями и т.д. Учет анизотропии материала актуален при решении различных технологических задач. В работе построено поле характеристик и линии разрыва напряжений трансляционно-анизотропных призматических однородного и составного стержней. Полученные результаты могут быть применены при решении новых задач теории предельного состояния. В частности, результаты могут быть применены при расчетах несущей способности конструкций и позволяют учитывать влияние анизотропии при определении предельных усилий при кручении.

Ключевые слова: анизотропия, кручение, предельное состояние, поле характеристик, линии разрыва, напряжение, стержень.

УДК: 539.374

Кручение изотропных цилиндрических и призматических идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1], [2], [3]. Кручение анизотропных и неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [4], [5].

Исследуем кручение трансляционно-анизотропных призматических стержней в случае, когда боковая поверхность стержня свободна от касательных усилий.

Предельное условие для напряжений в случае трансляционной идеальнопластической анизотропии запишем в виде

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = k_0^2, \quad k_1, k_2, k_0 = \text{const}, \quad (1)$$

© Митрофанова Т.В., Деревянных Е.А., 2018

Митрофанова Татьяна Валерьевна

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, г. Чебоксары, Россия,

Деревянных Евгения Анатольевна

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 10.04.2018

где τ_{xz} , τ_{yz} — касательные напряжения.

В дальнейшем перейдем к безразмерным величинам и отнесем все величины, имеющие размерность напряжений, к величине k_0 . Сохраним обозначения для τ_{xz} , τ_{yz} , k_1 , k_2 . Условие (1) примет вид

$$(\tau_{xz} - k_1)^2 + (\tau_{yz} - k_2)^2 = 1. \quad (2)$$

Соотношение (2) перепишем в виде

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - 2(k_1\tau_{xz} + k_2\tau_{yz}) - (1 - k_1^2 - k_2^2) = 0. \quad (3)$$

Положим

$$\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \quad \tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta, \quad \frac{\tau_{yz}}{\tau_{xz}} = \operatorname{tg} \theta. \quad (4)$$

Из (3), (4) найдем

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)(k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta) - (1 - k_1^2 - k_2^2) = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем положим

$$\rho = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \quad \frac{k_1}{\rho} = \cos \mu, \quad \frac{k_2}{\rho} = \sin \mu, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{k_2}{k_1}. \quad (6)$$

Согласно (6) соотношение (5) примет вид

$$k^2(\theta) - 2k(\theta)\rho \cos(\theta - \mu) - (1 - \rho^2) = 0. \quad (7)$$

Из (7) найдем

$$k(\theta)_{1,2} = \rho \cos(\theta - \mu) \pm \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}. \quad (8)$$

В (8) следует ограничиться верхним знаком, таким образом величина $k(\theta)$, характеризующая анизотропию материала, принимает вид

$$k(\theta) = \rho \cos(\theta - \mu) + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2(\theta - \mu)}. \quad (9)$$

Из уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

и выражений (4) получим

$$\left(\frac{dk}{d\theta} \cos \theta - k(\theta) \sin \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{dk}{d\theta} \sin \theta + k(\theta) \cos \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (11)$$

где, согласно (9),

$$\frac{dk}{d\theta} = -\rho \sin(\theta - \mu) - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\rho^2 \sin 2(\theta - \mu)}{\sqrt{2 - \rho^2(1 - \cos 2(\theta - \mu))}}. \quad (12)$$

Уравнение (12) имеет решение [1]

$$y = \frac{\frac{dk}{d\theta} \sin \theta + k(\theta) \cos \theta}{\frac{dk}{d\theta} \cos \theta - k(\theta) \sin \theta} x + C, \quad \theta, C = \text{const}. \quad (13)$$

Линеаризуем соотношения (9) и (12). Примем,

$$k_1 = \delta k'_1, \quad k_2 = \delta k'_2. \quad (14)$$

Тогда $\rho = \delta\bar{\rho}$, где $\bar{\rho} = \sqrt{(k'_1)^2 + (k'_2)^2}$. Из (9) получим следующее соотношение:

$$k(\theta) = \delta\bar{\rho}\cos(\theta - \mu) + 1 - \frac{1}{2}\delta^2\bar{\rho}^2\sin^2(\theta - \mu) + \dots$$

Ограничиваясь первым приближением, имеем

$$\begin{aligned} k(\theta) &= 1 + \delta\bar{\rho}\cos(\theta - \mu), \\ \frac{dk}{d\theta} &= -\delta\bar{\rho}\sin(\theta - \mu). \end{aligned} \quad (15)$$

Подставив (15) в выражение (13), после преобразований получим

$$y = -\frac{\cos\theta + \delta\bar{\rho}\cos(2\theta - \mu)}{\sin\theta \left(1 + \delta\frac{\bar{\rho}\sin(2\theta - \mu)}{\sin\theta}\right)}x + C, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} &\left(1 + \delta\frac{\bar{\rho}\sin(2\theta - \mu)}{\sin\theta}\right)^{-1} = \\ &= 1 - \delta\frac{\bar{\rho}\sin(2\theta - \mu)}{\sin\theta} + \delta^2\frac{\bar{\rho}^2\sin^2(2\theta - \mu)}{\sin^2\theta} - \delta^3\frac{\bar{\rho}^3\sin^3(2\theta - \mu)}{\sin^3\theta} + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (17) в (16) и ограничившись первым приближением, имеем

$$y = \left(-\operatorname{ctg}\theta + \delta\bar{\rho}\frac{\sin(2\theta - \mu)\cos\theta - \cos(2\theta - \mu)\sin\theta}{\sin^2\theta}\right)x + C.$$

Таким образом, уравнение характеристик имеет вид

$$y = \left(-\operatorname{ctg}\theta + \delta\frac{\bar{\rho}\sin(\theta - \mu)}{\sin^2\theta}\right)x + C. \quad (18)$$

Рассмотрим кручение стержня, поперечное сечение которого есть прямоугольник $ABCD$. Тогда уравнения характеристик имеют вид

$$\begin{aligned} AB(\theta = 0) : \quad & x = C_1, \\ BC\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) : \quad & y = \delta\bar{\rho}\cos\mu x + C_2, \\ CD(\theta = \pi) : \quad & x = C_3, \\ AD\left(\theta = \frac{3\pi}{2}\right) : \quad & y = -\delta\bar{\rho}\cos\mu x + C_4. \end{aligned} \quad (19)$$

Пусть $\mu = 0$, тогда из последнего выражения (6) имеем $k_2 = 0$, $\delta\bar{\rho} = k_1$ и уравнения характеристик (19) примут вид

$$\begin{aligned} AB : \quad & x = C_1, \\ BC : \quad & y = k_1x + C_2, \\ CD : \quad & x = C_3, \\ DC : \quad & y = -k_1x + C_4. \end{aligned}$$

На рис. 1 построено поле характеристик. Жирными линиями показаны линии разрыва напряжений.

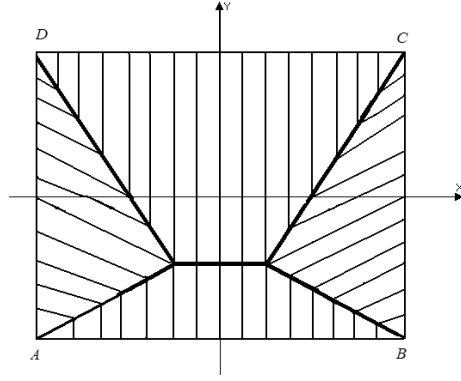


Рис. 1.

Пусть $\mu = \pi/6$ (рис. 2), тогда из последнего выражения (6) имеем $k_1 = \sqrt{3}k_2$, $\delta\bar{\rho} = 2k_2$ и уравнения характеристик примут вид

$$\begin{aligned} AB : & \quad x = C_1, \\ BC : & \quad y = \sqrt{3}k_2x + C_2, \\ CD : & \quad x = C_3, \\ DC : & \quad y = -\sqrt{3}k_2x + C_4. \end{aligned}$$

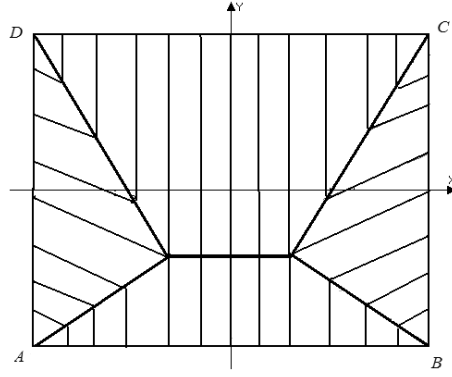


Рис. 2.

Пусть $\mu = \pi/4$ (рис. 3), тогда из последнего выражения (6) имеем $k_1 = \sqrt{2}k_2$, $\delta\bar{\rho} = \sqrt{3}k_2$ и уравнения характеристик примут вид

$$\begin{aligned} AB : & \quad x = C_1, \\ BC : & \quad y = \frac{\sqrt{6}}{2}k_2x + C_2, \\ CD : & \quad x = C_3, \\ DC : & \quad y = -\frac{\sqrt{6}}{2}k_2x + C_4. \end{aligned}$$

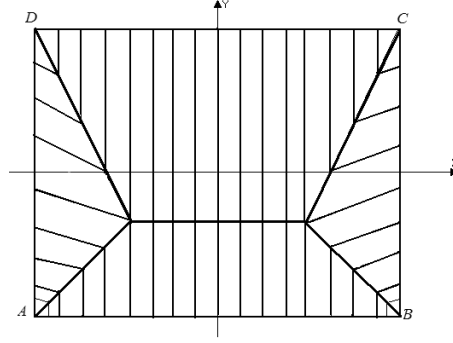


Рис. 3.

Пусть $\mu = \pi/3$ (рис. 4), тогда из последнего выражения (6) имеем $k_2 = \sqrt{3}k_1$, $\delta\bar{\rho} = 2k_1$ и уравнения характеристик примут вид

$$\begin{aligned} AB : x &= C_1, \\ BC : y &= k_1x + C_2, \\ CD : x &= C_3, \\ DC : y &= -k_1x + C_4. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что поле характеристик и линии разрыва при $\mu = \pi/3$ совпадают с полем характеристик и линиями разрыва при $\mu = 0$.

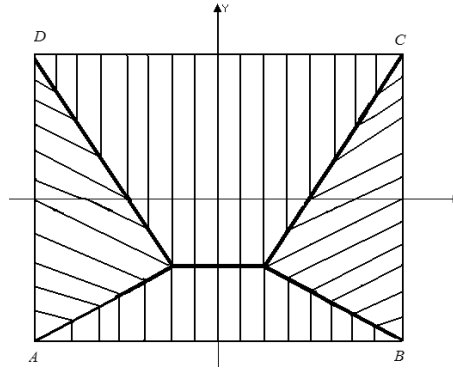


Рис. 4.

Пусть $\mu = \pi/2$ (рис. 5), тогда из последнего выражения (6) имеем $k_1 = 0$, $\delta\bar{\rho} = k_2$ и уравнения характеристик примут вид

$$\begin{aligned} AB : x &= C_1, \\ BC : y &= C_2, \\ CD : x &= C_3, \\ DC : y &= C_4. \end{aligned}$$

Мы получили, что в этом случае поле характеристик и линии разрыва совпадают с полем характеристик и линиями разрыва изотропного прямоугольного стержня [3].

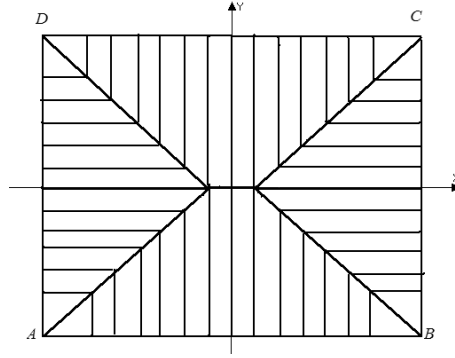


Рис. 5.

Рассмотрим составной прямоугольный анизотропный призматический стержень, разделенный на две области линией неоднородности AB , параллельной одной из сторон прямоугольного сечения (рис. 6).

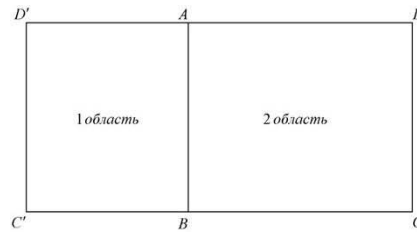


Рис. 6.

Условие пластичности в каждой области имеет вид

$$(\tau_{xz} - k_{i1})^2 + (\tau_{yz} - k_{i2})^2 = k_{i0}^2, \quad k_{i1}, k_{i2}, k_{i0} = \text{const}, \quad (20)$$

при этом $k_{20} > k_{10}$, $i = 1, 2$.

Построим линии разрыва напряжений в каждой области. Отметим, что на линии неоднородности AB должно выполняться условие сопряжения векторов касательных напряжений, в остальном построение аналогично вышеприведенному.

На рис. 7 дано построение поля характеристик и линий разрыва напряжений в каждой области в случае кручения при $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

На рис. 8 дано построение поля характеристик и линий разрыва напряжений в каждой области в случае $\mu_1 = \mu_2 = \pi/4$.

Таким образом, построены поля характеристик и линии разрыва напряжений в случае кручения анизотропного однородного и составного прямоугольного анизотропного призматического стержней.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.

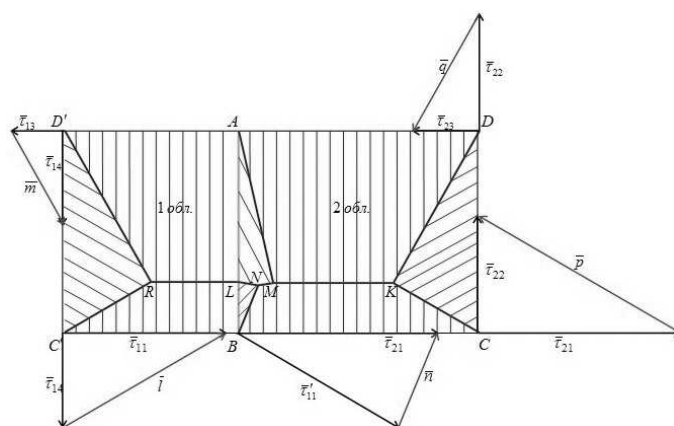


Рис. 7.

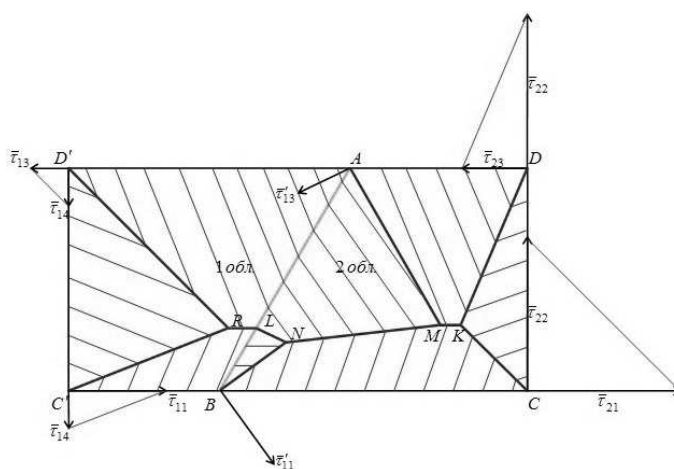


Рис. 8.

[3] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.

[4] Козлова Л. С., Миронов Б. Г. Предельное состояние призматических стержней при кручении // Науч.-информ. вестник докторантов, аспирантов, студентов. 2009. № 2(14). С. 8–17.

[5] Миронов Б. Г. О предельном анизотропном состоянии идеальнопластической среды // ДАН РАН. 2002. Т. 385, № 6. С. 770–773.

T. V. Mitrofanova¹, Ye. A. Derevyannyih²

ON THE FIELD OF CHARACTERISTICS AND STRESS RUPTURE LINES FOR TORSION OF ANISOTROPIC PRISMATIC RODS

¹*I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia*

²*Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia*

Abstract. In the article some problems of the theory of torsion of anisotropic homogeneous and inhomogeneous rods are considered. Anisotropy of bodies and structures is one of the important properties due to technological characteristics and design solutions, etc. Accounting for the anisotropy of the material is relevant for solving various technological problems. A field of characteristics and lines of stress rupture of translation-anisotropic prismatic homogeneous and composite rods are constructed in this paper. The results obtained can be applied to solve new problems in the theory of the limiting state. In particular, the results can be applied to the calculation of the bearing capacity of structures and allow for the influence of anisotropy in determining the ultimate torsional forces.

Keywords: anisotropy, torsion, limiting state, field of characteristics, lines of discontinuity, stress, rod.

REFERENCES

- [1] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s. (in Russian)
- [2] Ivlev D. D. Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. 232 s. (in Russian)
- [3] Kachanov L. M. Osnovy teorii plastichnosti. M.: Nauka, 1969. 420 s. (in Russian)
- [4] Kozlova L. S., Mironov B. G. Predel'noe sostoyanie prizmaticheskikh sterzhnej pri kruchenii // Nauch.-inform. vestnik doktorantov, aspirantov, studentov. 2009. № 2(14). S. 8–17. (in Russian)
- [5] Mironov B. G. O predel'nom anizotropnom sostoyanii ideal'noplasticheskoy sredy // DAN RAN. 2002. T. 385, № 6. S. 770–773. (in Russian)

Mitrofanova Tatiana Valeryevna

e-mail: mitrofanova_tv@mail.ru, Ph.D., Associate Professor, I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University, Cheboksary, Russia,

Derevyannyih Evgeniya Anatolyevna

e-mail: jane-evgeniya@yandex.ru, Ph.D., Associate Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.