

## ПОСЛОЙНОЕ ТЕЧЕНИЕ МИКРОСТРУКТУРНОГО МАТЕРИАЛА В КАНАЛЕ ВБЛИЗИ ДЕЙСТВИЯ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Университет г. Диала, Ирак

Воронежский государственный университет

**Аннотация.** Приведен расчёт скорости течения вязкого микроструктурного материала в плоском канале вблизи переднего мениска квадратичной и кубической формы. Отмечено увеличение скорости вблизи стенок канала по сравнению со скоростью внутри канала. Предполагается, что движение слоя материала толщиной  $\delta$  моделирует движение слоя молекул, заполняющих нанотрубку.

**Ключевые слова:** микроструктура, вязкость, мениск, скорость, канал стенка.

УДК: 532.52

**Введение.** Экспериментально и на основе расчета движения дискретных молекул внутри нанотрубок установлено их послойное движение, причем у стенок материал движется быстрее, чем в центре [1]. Учитывая совместный характер движения молекул, предлагается моделировать процесс движением микроструктурного вязкого материала в плоском зазоре под действием сил поверхностного натяжения, стягивающих молекул внутрь нанотрубок.

**Математическая модель движения микроструктурного материала.** Отличительной особенностью течения и деформирования микроструктурных материалов является учет характерных размеров  $h$  представительных элементов  $\Delta V = h^3$  в выражениях для деформации, скоростей деформаций и в самих уравнениях движения [1], [2]:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= e_{ij}^c + \frac{h^2}{6} \Delta e_{ij}^c; \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{h^2}{6} \Delta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $e_{ij}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  – тензор скоростей деформаций Коши,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}$ ;  $v_j$  – вектор скорости,  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Закон Ньютона, связывающий напряжения со скоростями деформаций для несжимаемой вязкой жидкости

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}; \quad e_{kk} = 0 \quad (2)$$

замыкает систему дифференциальных уравнений для напряжений и скоростей и позволяет рассматривать движение такого материала в терминах скорости  $v_i$ .

Рассмотрим далее движение материала в плоской трубе шириной  $2H$  под действием перепада давления  $\frac{\partial P}{\partial z}$ , вызванного действием силы поверхностного натяжения [1], [3].

**Случай движения материала в окрестности мениска квадратичной формы.** Опеним вытягивающую силу поверхностного натяжения при условии постоянства касательной силы  $\bar{F} = \lambda_0 \cdot \bar{\tau}_0$  (рис. 1)

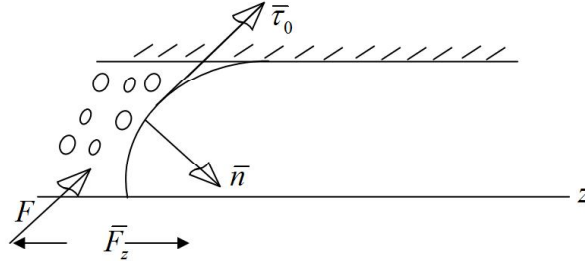


Рис. 1. Схематическое изображение формы мениска и сил, порожденных поверхностным натяжением  $F = \lambda_0 = const$

Положим вид мениска в форме параболы ( $a, b$  – постоянные):

$$f(z, y) = z - (a + by^2) = 0. \quad (3)$$

Векторы нормали и касательной к мениску имеют вид

$$\bar{n} = \left( \frac{-2by}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}} \right); \quad \bar{\tau} = \left( \frac{1}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}}, \frac{2by}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}} \right). \quad (4)$$

Вектор силы поверхностного натяжения определяется

$$\bar{F} = \frac{\lambda v}{\sqrt{1 + 4b^2y^2}}(1; 2by); \quad (y \geq 0). \quad (5)$$

Далее ограничимся линейным представлением вытягивающей силы

$$F_z \cong 2\lambda_0 by. \quad (6)$$

Уравнение движения микроструктурного материала вблизи мениска примем в виде [1]

$$\delta^2 v^{IV} + v^{II} = \lambda y, \quad \text{где } \lambda = 2\lambda_0 b. \quad (7)$$

Дважды проинтегрировав уравнение (7), просуммировав частное решение уравнения (7) и общее решение однородного уравнения, получим

$$v = C_4 \sin \frac{y}{\delta} + C_3 \cos \frac{y}{\delta} + (C_1 - \lambda \delta^2)y + C_2. \quad (8)$$

Из условий симметрии по  $y$  следует, что

$$C_n = 0; \quad C_1 = \lambda \delta^2. \quad (9)$$

Постоянные  $C_3$  и  $C_2$  найдем из условий наличия ядра течения шириной  $y = \check{H}$ , на котором  $v'(\check{H}) = 0$ , что означает движение ядра течения со скоростью течения

$$v(\check{H}) = v^0 \text{ и значит } v'(\check{H}) = 0, \quad (10)$$

откуда следует, что

$$C_3 = \frac{\lambda \delta \check{H}^2}{2 \sin \frac{\check{H}}{\delta}}. \quad (11)$$

Постоянную  $C_2$  найдем из условия качения представительного элемента вдоль стенки трубы  $y = H$

$$v(H) - \gamma v'(H) = 0. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

$$C_2 = -\lambda\delta\ddot{H}^2 \frac{1}{\sin \frac{\bar{H}}{\delta}} \left( \cos \frac{H}{\delta} - \frac{\gamma}{\delta} \sin \frac{H}{\delta} \right) - \frac{\lambda}{2} H^2 \left( \frac{H}{3} - \gamma \right). \quad (13)$$

Учитывая знание постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$ , выражение (8) для скорости течения  $v(y)$  примет вид

$$w = \frac{2v(x)}{\lambda H^3} = \frac{x^3}{3} + \varepsilon \bar{H}^2 \frac{\cos \frac{x}{\varepsilon}}{\sin \frac{\bar{H}}{\varepsilon}} + \gamma - \frac{1}{3} - \varepsilon \bar{H}^2 \frac{\cos \frac{1}{3} - \left( \frac{\bar{\gamma}}{\varepsilon} \right) \sin \frac{1}{\varepsilon}}{\sin \frac{\bar{H}}{\varepsilon}} \quad (14)$$

при  $x = \frac{y}{H}$ ;  $\varepsilon = \frac{\delta}{H}$ ;  $\bar{H} = \frac{\dot{H}}{H}$ ;  $\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{H}$ .

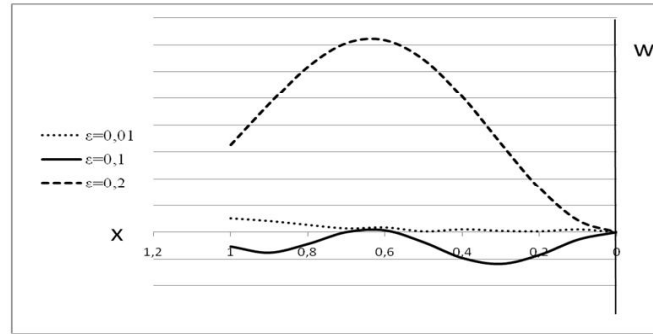


Рис. 2. График скорости течения  $w(x)$  для разных  $\varepsilon$ ,  $x \in [0; 1]$

**Скорость течения микроструктурного материала в окрестности мениска кубической формы.** Положим, что мениск имеет форму кубической параболы, а сама сила поверхностного натяжения является постоянной вдоль формы мениска (рис. 1)

$$\Phi_{(yz)} = z - by^3 = 0; \quad F_z = \lambda 3by^2. \quad (15)$$

Уравнение для скорости течения материала в окрестности переднего фронта мениска имеет вид (7)

$$\delta^2 v^{IV} + v^{II} = \lambda 3by^2. \quad (16)$$

Двукратное интегрирование переводит дифференциальное уравнение 4-го порядка для  $v$  в уравнение 2-го порядка с постоянными интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\delta^2 v^{II} + v = \lambda(b/4)y^4 + C_1 y + \rho_2. \quad (17)$$

Линейное уравнение (17) имеет точное решение

$$v(y) = C_3 C_v \frac{y}{\delta} + C_n \sin \frac{y}{\delta} + \lambda_0 y + 12\lambda_0 \delta y^2 + \rho_1 y + \rho_2 - 24\lambda_0 \delta^4, \quad (18)$$

где  $(\lambda b = 4\lambda_0)$ .

Для определения постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_n$  зададим следующие граничные условия: симметрию течения

$$v(H) = v(-H); \quad (19)$$

экстремум скорости на оси течения

$$v'(0) = 0. \quad (20)$$

Равенство сил вязкого трения и движущей силы поверхностного натяжения на стенке

$$\sigma_{zy}|_{y=H} = F_z|_{y=H} = \mu(v' + \delta^2 v''')|_{y=H}. \quad (21)$$

Условие качения представительного элемента на стенке

$$v(H) - \gamma v'(H) = 0. \quad (22)$$

Выбранные граничные условия позволяют определить постоянные интегрирования и представить выражение для скорости  $v$  с удержанием величин не выше  $\delta^2$  в виде

$$v(x)|_{\lambda_0} = x^4 + 12x^2\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon(3 - \bar{\mu})}{\bar{\mu} \cos(11\varepsilon)} (1 - \cos|x|\varepsilon), \quad (23)$$

где  $\bar{\mu}$  – безразмерный коэффициент вязкости  $\varepsilon = \frac{\delta}{H}$ ,  $x = \frac{y}{H}$ .

Выражение (23) для скорости течения  $v(x)$ , где  $x \in [0, 1]$ , отражает возмущение скорости течения с периодом  $\tau = 2\pi\varepsilon$ . На рис. 3 изображен график скорости  $v(x)$ , причем прилегающие к стене слои материала движутся быстрее внутренних.

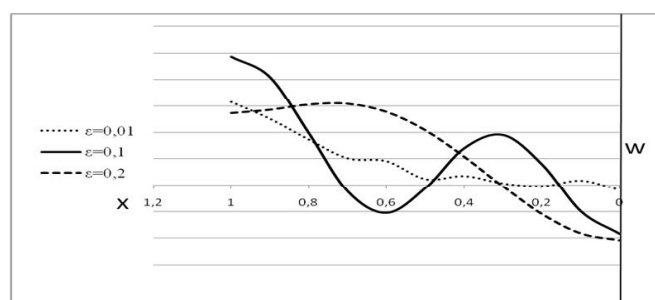


Рис. 3. График безразмерной скорости течения материала при различных значениях параметров

**Выводы.** Использование в качестве движущей силы поверхностного натяжения приводит к эффекту увеличения скорости движения вблизи стенок канала в отличие от течения под действием перепада давления. Вид формы мениска передней части движущегося материала влияет на величину скорости. Области локального максимума скорости можно отождествить с движением отдельных молекул в нанотрубке.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] *Вервейко, Н. Д.* Влияние характерного линейного размера микроструктуры и времени релаксации на переходные процессы в тонких слоях / Н. Д. Вервейко, В. И. Просветов. – Воронеж : Вестник ВГУ, 2013. – 298 с.

[2] *Быкова, М. И.* Течение и деформирование материалов однородной микроструктуры / М. И. Быкова, Н. Д. Вервейко, П. П. Сумец, С. А. Шашкина. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2010. – 192 с.

[3] *Аль Имам, А. А.* Влияние микроструктуры вязкопластичного материала на форму течения в круглой трубе / А. А. Аль Имам // Материалы международной конференции (Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна) – Воронеж, 2014. – С. 21–24.

*Аль Имам Адель А Абед Аль Вахаб,*

*аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, Воронежский государственный университет, г. Воронеж*

*e-mail: adelpro76@yahoo.com*

A. A. Al Imam

**FLOW OF MICROSTRUCTURED MATERIAL IN THE PLANE CHANNEL  
UNDER A SURFACE TENSION FORCE**

*Voronezh State University*

**Abstract.** This article take a velocity of microstructural viscosity materials flow in the plane channel under a surface tension force. Shown that the velocity nearly channel boundaries is larger more than in its center. It is assumed that the movement of the material layer thickness simulates the movement of molecular layer which fills the nanotube.

**Keywords:** microstructure, viscosity, velocity, channel, meniscus.

**REFERENCES**

- [1] Verveyko, N. D. The influence of the characteristic linear dimension of the microstructure and the relaxation time on transient processes in thin layers / N. D. Verveyko, V. I. Prosvetov. – Voronezh Vestnik VSU, 2013. – 298 p.
- [2] Bykova, M. I. Flow and deformation of materials and uniform microstructure / M. I. Bykova, N. D. Verveyko, P. P. Sumets, S. A. Shashkina. – Voronezh Univ. VSU, 2010. – 192 p.
- [3] Al Imam A. A. Effect of microstructure viscoplastic material in the form of the flow in a circular tube / A. A. Al Imam // Materials of the International Conference (Voronezh Winter Mathematical School S. G. Kreina). – Voronezh, 2014. – P. 21–24.

*Al Imam Adel A Abed Al Wahab*

*Postgraduate Student, Department of the theoretical and apply mechanics, Voronezh State University, Voronezh*