Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 2 (36). С. 50–64

А. Н. Максимов[1], *Н. Н. Пушкаренко*[1], *Е. А. Деревянных*[1], *Ю. П. Дмитриев*[1]

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВА, ОСЛАБЛЕННОГО ПОЛОСТЯМИ

[1] *Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия*

Аннотация. В работе разработан алгоритм последовательных приближений для аналитического определения напряженного состояния сжимаемого упруго-пластического пространства с полостями. В постановке задачи внутри полости давление отсутствует, а на бесконечности приложены взаимно-перпендикулярные усилия. Задача решена методом малого параметра, в сферической системе координат, в безразмерных единицах длины. Рассмотрены три случая, при которых могут быть удовлетворены условия полной пластичности, один из которых соответствует сферической полости. Определены нулевые значения напряжений в упругой и пластической областях, нулевое приближение границы упруго-пластической зоны для случая сферической полости, а также первые приближения компонент напряжений в пластической области для трех случаев, удовлетворяющих условию полной пластичности. Полученные результаты могут быть использованы в области горного дела, строительной механики и других смежных областях.

Ключевые слова: напряжения, деформация, пластичность, упругость, сферическая полость.

УДК: 539.374

В практике горного дела, строительной механике и других смежных областях важное место имеет определение напряженного и деформированного состояния массива вокруг полостей и выемок. Свойства массива могут быть самыми разнообразными от

Максимов Алексей Николаевич
`e-mail:` alexei.maksimow@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, зав. кафедрой математики, физики и информационных технологий, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.
Пушкаренко Николай Николаевич
`e-mail:` stl_mstu@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, декан инженерного факультета, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.
Деревянных Евгения Анатольевна
`e-mail:` jane-evgeniya@yandex.ru, кандидат физико-математических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.
Дмитриев Юрий Петрович
`e-mail:` 14102010olga@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары, Россия.

Поступила 15.05.2018

хрупких и упругих свойств скальных пород до сред с различными реологическими свойствами, характеризуемыми изменениями свойств среды во времени и т.п.

В данной работе исследуется напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного полостью. Для определения напряженного состояния в пластической области используются соотношения теории предельного равновесия, берущие начало от работ Кулона. Развитие данной теории связано с именами С. А. Христиановича, А. Ю. Ишлинского [1], В. В. Соколовского, Е. И. Шемякина, В. Г. Березанцева, Р. Шилда, Д. Д. Ивлева [2], Л. В. Ершова [3].

В рассматриваемой задаче идеальнопластическое напряженное состояние определяется граничными условиями на поверхности полости. Решение в упругой области сопрягается с имеющимся решением для упругой полой сферы.

Впервые задачу о равновесии упругой сферы рассмотрел Г. Ляме [4]. Он предположил, что заданные на внутренней и внешней поверхностях напряжения σ_ρ, $\tau_{\rho\theta}$, $\tau_{\rho\varphi}$ представлены в форме двойных рядов по произведениям присоединенных функций Лежандра $\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$ и тригонометрических функций $\cos m\varphi$, $\sin m\varphi$, и указал способ построения двойных рядов по этим условиям, которые должны удовлетворять уравнениям равновесия теории упругости в перемещениях.

В. Томсон при решении задачи о равновесии сплошной и полой сферы [5] исходит из представления решения уравнений теории упругости в перемещениях через три гармонические функции, которые он разыскивал в форме рядов по пространственным гармоническим полиномам $\varphi_n(x, y, z)$.

А. И. Лурье [6], следуя методу Томсона, исходя из представления составляющих тензора напряжений через гармонические функции, предложенного П. Ф. Попковичем, решил общую задачу о равновесии упругой сферы. Наличие четвертой гармонической функции в этом решении позволило упростить ход решения и объем вычислений, сократить записи и дало возможность представить результаты в простой векторной форме.

Б. В. Галеркин [7], [8] привел решения, относящиеся к задаче о полой симметрично нагруженной сфере, и дал построение класса решений, которые можно применять для решения задач о равновесии упругого тела, ограниченного двумя концентрическими сферами и срезами по коническим поверхностям с вершиной в центре сферы.

Следует отметить, что задачу о полой сфере также рассмотрели Е. Штернберг, Р. Эйнбекс и М. Садовский в [9]. В этой работе авторы привели значения коэффициентов рядов, дающих выражение перемещений и напряжений через коэффициенты разложений, заданных нормального и касательного напряжений на поверхностях, ограничивающих полую среду. В качестве примера авторы рассмотрели задачу о концентрации напряжений в окрестности сферической полости.

Так же Садовским и Штернбергом была рассмотрена задача о напряженном состоянии в окрестности эллипсоидальной полости [10]. Были использованы криволинейные эллиптические координаты и решение выражено через эллиптические функции Якоби.

Лурье [11] дал решение этой задачи в декартовых координатах. Решение содержит эллиптические интегралы и выражено через гармогнические функции. Подобный подход потребовал от автора рассмотреть три уравнения, а не пять уравнений с пятью неизвестными, как у Садовского и Штернберга в работе [10].

Впервые задача о трехосном растяжении несжимаемого упругопластического пространства со сферической полостью рассмотрена Т. Д. Семыкиной [12]. Позднее это решение обсуждалось в монографии Б. Д. Аннина и Г. П. Черепанова [13]. В [14], [15] рассмотрено пространство со сферической и эллипсоидальной полостями в случае несжимаемого упругопластического материала.

В настоящей работе в линеаризированной постановке рассматривается упруго-пластическое состояние пространства с полостью из сжимаемого идеальнопластического материала при трехосном сдавливании на бесконечности. Рассмотрены три случая, при которых могут быть удовлетворены условия полной пластичности (в одном из них полость является сферической). Определены нулевые значения напряжений в упругой и пластической областях, нулевое приближение границы упруго-пластической зоны для случая сферической полости, а также первые приближения компонент напряжений в пластической области для трех случаев, удовлетворяющих условию полной пластичности. Полученные результаты могут быть использованы в области горного дела, строительной механики и других смежных областях.

Задача решена методом малого параметра, в сферической системе координат, в безразмерных единицах длины. Все величины, имеющие размерность длины, отнесены к радиусу сферической полости ρ_0.

Рассматривается массив из сыпучей среды, обладающей свойствами внутреннего трения и сцепления. Условие предельного состояния сыпучей среды определено в виде [2]

$$f(\sigma'_{ij}) = k_0 + a\sigma, \tag{1}$$

где σ'_{ij} — компоненты девиатора напряжения, k_0 — коэффициент сцепления, $a = \operatorname{tg}\alpha$ — коэффициент внутреннего трения, α — угол внутреннего трения.

Для решения задачи в сферической системе координат используем уравнения равновесия [2]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}(2\sigma_\rho - \sigma_\theta - \sigma_\varphi + \tau_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta) = 0,\\
\frac{\partial\tau_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}((\sigma_\theta - \sigma_\varphi)\operatorname{ctg}\theta + 3\tau_{\rho\theta}) = 0,\\
\frac{\partial\tau_{\rho\varphi}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}(3\tau_{\rho\varphi} + 2\tau_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta) = 0,
\end{gathered} \tag{2}$$

условия пластичности Треска-Сен-Венана [2] с учетом (1):

$$\begin{gathered}
\left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right) - \tau_{\rho\theta}^2 = 0,\\
\left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\left(\sigma_\varphi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right) - \tau_{\theta\varphi}^2 = 0,\\
\left(\sigma_\varphi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right) - \tau_{\rho\varphi}^2 = 0,
\end{gathered} \tag{3}$$

а также

$$\begin{aligned}\left(\sigma_\rho - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\tau_{\theta\varphi} &= \tau_{\rho\theta}\tau_{\rho\varphi},\\ \left(\sigma_\varphi - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\tau_{\rho\theta} &= \tau_{\rho\varphi}\tau_{\theta\varphi},\\ \left(\sigma_\theta - \sigma + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma)\right)\tau_{\rho\varphi} &= \tau_{\rho\theta}\tau_{\theta\varphi}.\end{aligned} \tag{4}$$

Граничные условия:

$$\sigma_\rho l + \tau_{\rho\theta} m + \tau_{\rho\varphi} n = P_\rho, \quad \tau_{\rho\theta} l + \sigma_\theta m + \tau_{\theta\varphi} n = P_\theta, \quad \tau_{\rho\varphi} l + \tau_{\theta\varphi} m + \sigma_\varphi n = P_\varphi, \tag{5}$$

где σ_ρ, $\tau_{\rho\theta}$, ... — компоненты девиатора напряжения; l, m, n — направляющие косинусы нормали; P_ρ, P_θ, P_φ — проекции усилий на оси ρ, θ, φ; $\sigma = (\sigma_\rho + \sigma_\theta + \sigma_\varphi)/3$ — среднее давление.

Компоненты напряжения представим в виде рядов по малому параметру δ ($\delta \ll 1$):

$$\begin{gathered}\sigma_\rho = \sigma_\rho^0 + \delta\sigma'_\rho, \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \delta\sigma'_\theta, \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0 + \delta\sigma'_\varphi,\\ \tau_{\rho\theta} = \tau_{\rho\theta}^0 + \delta\tau'_{\rho\theta}, \quad \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\rho\varphi}^0 + \delta\tau'_{\rho\varphi}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \tau_{\theta\varphi}^0 + \delta\tau'_{\theta\varphi}.\end{gathered} \tag{6}$$

Условия пластичности (3) и (4) могут быть удовлетворены в трех случаях:

$$\sigma_\theta^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) = 0, \quad \sigma_\rho^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) \neq 0, \quad \sigma_\varphi^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) = 0, \tag{7}$$

$$\sigma_\rho^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) = 0, \quad \sigma_\theta^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) = 0, \quad \sigma_\varphi^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) \neq 0, \tag{8}$$

$$\sigma_\rho^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) = 0, \quad \sigma_\varphi^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) = 0, \quad \sigma_\theta^0 - \sigma^0 + \frac{2}{3}(k_0 + a\sigma^0) \neq 0. \tag{9}$$

Случай (7) соответствует сферической полости. В случаях (8) и (9) рассматривается решение аналитической задачи.

Рассмотрим случай (7). Решая совместно (7) и (3), получим:

$$\sigma_\theta^0 = \sigma_\varphi^0, \quad \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\rho\varphi}^0 = \tau_{\theta\varphi}^0 = 0. \tag{10}$$

Тогда (6) с учетом (10) примет вид

$$\sigma^0 = \frac{\sigma_\rho^0 + 2\sigma_\theta^0}{3}. \tag{11}$$

Решая совместно (7) и (11), получим

$$\sigma_\theta^0 = \frac{\sigma_\rho^0}{A} + D, \tag{12}$$

где $A = (3 + 4a)/(3 - 2a)$, $D = -6k_0/(3 + 4a)$. Уравнения равновесия (2) с учетом (10) примут вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho^0}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho}(\sigma_\rho^0 - \sigma_\theta^0) = 0, \quad \frac{\partial\sigma_\theta^0}{\partial\theta} = \frac{\partial\sigma_\varphi^0}{\partial\varphi} = 0. \tag{13}$$

Подставляя (12) в первое уравнение (13) и принимая во внимание, что внутри сферической полости давление отсутствует, получим для компонент нормального напряжения в нулевом приближении в пластической области

$$\sigma_\rho^{0p} = \frac{k_0(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1)}{a}, \quad \sigma_\theta^{0p} = \sigma_\varphi^{0p} = \frac{k_0(\rho^{-\frac{12a}{3+4a}} - 1)}{a}A + D. \tag{14}$$

Для определения компонент напряжения в нулевом приближении в упругой области используем: уравнения равновесия (13); уравнение несжимаемости

$$\varepsilon_\rho^{0e} + \varepsilon_\theta^{0e} + \varepsilon_\varphi^{0e} = 0, \tag{15}$$

где ε_ρ^{0e}, ε_θ^{0e}, ε_φ^{0e} — деформации вдоль осей в упругой области; геометрические уравнения

$$\varepsilon_\rho^{0e} = \frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_\theta^{0e} = \varepsilon_\varphi^{0e} = \frac{U}{\rho}, \tag{16}$$

где U — перемещение вдоль оси ρ; физические уравнения (закон Гука), принимая во внимание, что коэффициент Пуассона для несжимаемого материала $\mu = 1/2$:

$$\varepsilon_\rho^{0e} = \frac{\sigma_\rho^{0e} - \sigma_\theta^{0e}}{E}, \quad \varepsilon_\theta^{0e} = \varepsilon_\varphi^{0e} = \frac{\sigma_\theta^{0e} - \sigma_\rho^{0e}}{2E}, \tag{17}$$

где E — модуль упругости.

Решая совместно (15), (16), (17), принимая во внимание условие сопряжения на границе β_0 упругопластической зоны:

$$\sigma_\rho^{0e}\Big|_{\rho=\beta_0} = \sigma_\rho^{0p}\Big|_{\rho=\beta_0}, \quad \sigma_\theta^{0e}\Big|_{\rho=\beta_0} = \sigma_\theta^{0p}\Big|_{\rho=\beta_0},$$

и что на бесконечности приложены усилия:

$$\sigma_\rho^{0e}\Big|_{\rho=\infty} = -p_0,$$

получим

$$\begin{gathered} \beta_0 = \left(\frac{D}{2(p_0 a - k_0)}\right)^{\frac{3+4a}{12a}}, \quad \sigma_\rho^{0e} = -\frac{2D}{3\rho^3}\beta_0^{\frac{9}{3+4a}} - p_0, \\ \sigma_\theta^{0e} = \sigma_\varphi^{0e} = \frac{D}{3\rho^3}\beta_0^{\frac{9}{3+4a}} - p_0. \end{gathered} \tag{18}$$

Найдем компоненты возмущенных напряжений в пластической области. Линеаризируя условия пластичности (3), (4) и принимая во внимание (7), (10), получим

$$\sigma'_\rho = A\tilde{\sigma}', \tag{19}$$

где $\tilde{\sigma}' = \sigma'_\theta = \sigma'_\varphi$;

$$\tau'_{\theta\varphi} = 0. \tag{20}$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (19), (20) примут вид

$$\begin{aligned} & A\frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial \tau'_{\rho\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho}(2\tilde{\sigma}'(A-1) + \tau'_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta) = 0, \\ & \frac{\partial \tau'_{\rho\theta}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \theta} + \frac{3}{\rho}\tau'_{\rho\theta} = 0, \\ & \frac{\partial \tau'_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial \tilde{\sigma}'}{\partial \varphi} + \frac{3}{\rho}\tau'_{\rho\varphi} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Для решения (21) водится функция $U(\rho, \theta, \varphi)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\tilde{\sigma}' = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \rho}, \quad \tau'_{\rho\theta} = \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho^3 \sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}. \tag{22}$$

Тогда последние два уравнения (22) тождественно удовлетворяются, а первое примет вид
$$-A\rho^2\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+2\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}+\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}=0. \tag{23}$$

Краткое решение (23) упомянуто в [17, 18]. Приведем развернутое решение (23). Найдем решение дифференциального уравнения (23) методом разделения переменных:
$$U=R(\rho)\times\Theta(\theta)\times\Phi(\varphi). \tag{24}$$
Тогда для $R(\rho)$ получим уравнение Эйлера, которое примет вид
$$R''-\frac{2}{\rho A}R'+\frac{\lambda}{\rho^2 A}R=0. \tag{25}$$
Решением (25) является
$$R=C_1\rho^{\chi_1}+C_2\rho^{\chi_2}, \tag{26}$$
где
$$\chi_{2,1}=\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\lambda}{A}}, \tag{27}$$
λ, C_1, C_2 будут определены ниже.

Для $\Phi(\varphi)$ получим уравнение Фурье:
$$\Phi''+m^2\Phi=0. \tag{28}$$
Решением (28) является
$$\Phi=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(a_{mn}\cos m\varphi+b_{mn}\sin m\varphi), \tag{29}$$
где a_{mn}, b_{mn} — коэффициенты Фурье, определяемые
$$\begin{aligned}
a_{mn}&=\frac{1}{N_{mn}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho_1(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,\\
b_{mn}&=\frac{1}{N_{mn}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\rho_1(\theta,\varphi)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,\\
N_{mn}&=\frac{2\pi\varepsilon_m(n+m)!}{(2n+1)(n-m)},\quad \varepsilon_m=2(m=0),\ 1(m>0),
\end{aligned} \tag{30}$$
$\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра; $\rho_1(\theta,\varphi)$ задает уравнение полости в первом приближении.

Для $\Theta(\theta)$ получим дифференциальное уравнение для присоединенных функций Лежандра:
$$\Theta''+\operatorname{ctg}\theta\,\Theta'+\left(\lambda-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)=0. \tag{31}$$
Решением (31) является присоединенная функция Лежандра:
$$\Theta=\mathrm{P}_n^m(\cos\theta), \tag{32}$$
где $n(n+1)=\lambda$.

Учитывая (32), (29), (26), функция $U = U(\rho, \theta, \varphi)$ примет вид

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2})(a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta). \tag{33}$$

Подставляя (33) в (22), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области

$$\begin{aligned}
&\sigma'_\theta = \sigma'_\varphi = \tilde{\sigma}' = \\
&\quad = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1 \chi_1 \rho^{\chi_1 - 3} + C_2 \chi_2 \rho^{\chi_2 - 3})(a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta), \\
&\sigma'_\rho = -A \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1 \chi_1 \rho^{\chi_1 - 3} + C_2 \chi_2 \rho^{\chi_2 - 3})(a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta), \\
&\tau'_{\rho\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1 \rho^{\chi_1 - 3} + C_2 \rho^{\chi_2 - 3})(a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) \frac{\partial \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)}{\partial\theta}, \\
&\tau'_{\rho\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{m}{\sin\theta} (C_1 \rho^{\chi_1 - 3} + C_2 \rho^{\chi_2 - 3})(b_{mn} \cos m\varphi - a_{mn} \sin m\varphi) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta), \\
&\tau'_{\theta\varphi} = 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Для определения C_1, C_2 найдем линеаризированные граничные условия. Для этого перенесем граничные условия на сферическую поверхность. Представим границу сферической полости в виде

$$\rho = 1 + \delta\rho_1(\theta, \varphi). \tag{35}$$

Положим, аналогично [12],

$$\rho_1(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) \mathrm{P}_n^m(\cos\theta). \tag{36}$$

Направляющие косинусы нормали l, m, n к границе сферической полости в первом приближении при $\rho = 1$ запишутся в виде

$$l \approx 1, \quad m \approx -\delta \frac{\partial\rho_1(\theta,\varphi)}{\partial\theta}, \quad n \approx -\delta \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial\rho_1(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}. \tag{37}$$

Линеаризируя граничные условия (5) согласно (6), учитывая, что для P_ρ, P_θ, P_φ справедливы разложения, аналогичные (6), и принимая во внимание (37), можно представить граничные условия при $\rho = 1$ в виде

$$\begin{aligned}
&\sigma'_\rho + \frac{\partial\sigma^0_\rho}{\partial\rho}\rho_1 - \tau^0_{\rho\theta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta} - \tau^0_{\rho\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial P_\rho}{\partial\rho}\rho_1, \\
&\tau'_{\rho\theta} + \frac{\partial\tau^0_{\rho\theta}}{\partial\rho}\rho_1 - \sigma^0_\theta\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta} - \tau^0_{\varphi\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial P_\theta}{\partial\rho}\rho_1, \\
&\tau'_{\rho\varphi} + \frac{\partial\tau^0_{\rho\varphi}}{\partial\rho}\rho_1 - \tau^0_{\varphi\theta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta} - \sigma^0_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\varphi} = \frac{\partial P_\varphi}{\partial\rho}\rho_1,
\end{aligned} \tag{38}$$

откуда

$$\sigma'_\rho = \frac{\partial\sigma^0_\rho}{\partial\rho}\rho_1, \quad \tau'_{\rho\theta} = \sigma^0_\theta\frac{\partial\rho_1}{\partial\theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = \sigma^0_\varphi\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho_1}{\partial\varphi}. \tag{39}$$

Подставляя (17) в (39) и полагая $\rho = 1$, получим

$$\sigma'_\rho = -2D\rho_1(\theta,\varphi), \quad \tau'_{\rho\theta} = D\frac{\partial \rho_1(\theta,\varphi)}{\partial\theta}, \quad \tau'_{\rho\varphi} = D\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho_1(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}. \tag{40}$$

Решая совместно (40), (36), (34) и полагая $\rho = 1$, получим

$$C_1 = \frac{D(A\chi_2 - 2)}{A(\chi_2 - \chi_1)}, \quad C_2 = \frac{D(A\chi_1 - 2)}{A(\chi_1 - \chi_2)}. \tag{41}$$

Рассмотрим случай (8), отдельные выкладки которого изложены в [19]. Решая совместно (8) и (3), получим

$$\sigma^0_\theta = \sigma^0_\rho, \quad \tau^0_{\rho\theta} = \tau^0_{\rho\varphi} = \tau^0_{\theta\varphi} = 0. \tag{42}$$

Тогда (6) с учетом (29) примет вид

$$\sigma^0 = \frac{2\sigma^0_\rho + \sigma^0_\varphi}{3}. \tag{43}$$

Решая совместно (8) и (43), получим

$$\sigma^0_\rho = \frac{\sigma^0_\varphi}{A} + D, \tag{44}$$

где $A = (3+4a)/(3-2a)$, $D = -6k_0/(3+4a)$. Уравнения равновесия (2) с учетом (42) примут вид

$$\frac{\partial\sigma^0_\rho}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}(\sigma^0_\rho - \sigma^0_\varphi), \quad \frac{\partial\sigma^0_\varphi}{\partial\varphi} = 0, \quad \frac{\partial\sigma^0_\rho}{\partial\theta} + (\sigma^0_\rho - \sigma^0_\varphi)\operatorname{ctg}\theta = 0. \tag{45}$$

Решая совместно (44) и (45), получим для компонент нормального напряжения в нулевом приближении в пластической области

$$\sigma^{0p}_\theta = \sigma^{0p}_\rho = \frac{c(\rho\sin\theta)^{\frac{6a}{3-2a}} - k_0}{a}, \quad \sigma^{0p}_\varphi = A\sigma^{0p}_\theta - AD, \tag{46}$$

где $c = \text{const}$, A и D определены выше. Решая совместно (8), (42) и линеаризированные условия пластичности (3), получим

$$\sigma'_\rho - \sigma'\left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0, \quad \sigma'_\theta - \sigma'\left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0. \tag{47}$$

Тогда

$$\sigma'_\rho = \sigma'_\theta, \tag{48}$$

$$\sigma' = \frac{2\sigma'_\rho + \sigma'_\varphi}{3}. \tag{49}$$

Решая совместно (47) и (49), получим

$$\sigma'_\varphi = A\tilde{\sigma}', \tag{50}$$

где

$$\tilde{\sigma}' = \sigma'_\rho = \sigma'_\theta. \tag{51}$$

Решая совместно (8), (42) и линеаризированные условия пластичности (4), получим

$$\tau'_{\rho\theta} = 0. \tag{52}$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (51), (52) примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{\sigma}'}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\tilde{\sigma}'}{\rho}(1-A)=0,\\
&\frac{\partial\tilde{\sigma}'}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\tilde{\sigma}'(1-A)\operatorname{ctg}\theta=0,\\
&\frac{\partial\tau'_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau'_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{A}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tilde{\sigma}'}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho}(3\tau'_{\rho\varphi}+2\tau'_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta)=0.
\end{aligned}\tag{53}$$

Для решения (53) водится функция $U(\rho,\theta,\varphi)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\tilde{\sigma}'=\frac{\partial U}{\partial\varphi},\quad \tau'_{\rho\varphi}=-\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\sin\theta-(1-A)U\sin\theta,\quad \tau'_{\theta\varphi}=-\frac{\partial U}{\partial\theta}\sin\theta-(1-A)U\cos\theta.\tag{54}$$

Тогда первые два уравнения (54) тождественно удовлетворяются, а последнее примет вид

$$\rho^2\frac{\partial^2U}{\partial\rho^2}+(5-A)\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}+\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2}+(4-A)\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}-\frac{A}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2U}{\partial\varphi^2}+\frac{2(1-A)}{\sin^2\theta}U=0.\tag{55}$$

Решение (55) найдено методом разделения переменных:

$$\begin{aligned}
&U=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\rho^{\chi_1}+C_2\rho^{\chi_2})\ \times\\
&\times\left(a_{mn}\cos\frac{m}{\sqrt{A}}\varphi+b_{mn}\sin\frac{m}{\sqrt{A}}\varphi\right)(\sin\theta)^{\frac{A-3}{2}+\alpha}\mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta),
\end{aligned}\tag{56}$$

где первый сомножитель (56) представляет решение уравнения Эйлера, в котором

$$\chi_{1,2}=\frac{A}{2}-2\pm\sqrt{\left(\frac{A}{2}-2\right)^2+\lambda},\tag{57}$$

C_1, C_2 — константы, которые могут быть определены из граничных условий и условий сопряжения,

$$\lambda=(2\alpha+1)(n+0,5)+n^2-m^2+\frac{5}{2}A-4,\tag{58}$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{(A+1)^2-4m^2}.\tag{59}$$

Второй сомножитель представляет решение уравнения Фурье, в котором a_{mn}, b_{mn} — коэффициенты Фурье, определяемые (30), $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta)$ — полином Якоби. Подставляя

(56) в (54) и принимая во внимание (50), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_\rho = \sigma'_\theta = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) \times \\
&\qquad \times \left(b_{mn} \cos \frac{m\varphi}{\sqrt{A}} - a_{mn} \sin \frac{m\varphi}{\sqrt{A}} \right) m (\sin\theta)^{\frac{A-3}{2}+\alpha} \mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta), \\
&\sigma' = A\sigma'_\rho, \quad \tau'_{\rho\theta} = 0, \\
&\tau'_{\rho\varphi} = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1 \rho^{\chi_1} (\chi_1 + 1 - A) + C_2 \rho^{\chi_2} (\chi_2 + 1 - A)) \times \\
&\qquad \times \left(a_{mn} \cos \frac{m\varphi}{\sqrt{A}} + b_{mn} \sin \frac{m\varphi}{\sqrt{A}} \right) (\sin\theta)^{\frac{A-1}{2}+\alpha} \mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta), \\
&\tau'_{\theta\varphi} = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (C_1 \rho^{\chi_1} + C_2 \rho^{\chi_2}) \left(a_{mn} \cos \frac{m\varphi}{\sqrt{A}} + b_{mn} \sin \frac{m\varphi}{\sqrt{A}} \right) \times \\
&\qquad \times (\sin\theta)^{\frac{A-1}{2}+\alpha} \left[\operatorname{ctg}\theta \left(\alpha - \frac{A+1}{2} \right) \mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)} \cos\theta + \frac{\partial \mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta)}{\partial\theta} \right].
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Рассмотрим случай (9), отдельные выкладки которого изложены в [20]. Решая совместно (9) и (3), получим

$$\sigma^0_\rho = \sigma^0_\varphi, \quad \tau^0_{\rho\theta} = \tau^0_{\rho\varphi} = \tau^0_{\theta\varphi}. \tag{61}$$

Тогда (6) с учетом (61) примет вид

$$\sigma^0 = \frac{2\sigma^0_\rho + \sigma^0_\theta}{3}. \tag{62}$$

Решая совместно (62) и (9), получим

$$\sigma^0_\rho = \frac{\sigma^0_\theta}{A} + D. \tag{63}$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (61) примут вид

$$\frac{\partial \sigma^0_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}(\sigma^0_\rho - \sigma^0_\theta) = 0, \quad \frac{\partial \sigma^0_\rho}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \sigma^0_\theta}{\partial \theta} + (\sigma^0_\rho - \sigma^0_\theta) \operatorname{ctg}\theta = 0. \tag{64}$$

Решая совместно (63) и (64), получим для величин напряжения в нулевом приближении в пластической области выражения

$$\sigma^0_\rho = \sigma^0_\varphi = \frac{c}{a} \frac{\rho^{\frac{6a}{3-2a}}}{(\sin\theta)^{\frac{6a}{3+4a}}} - \frac{k_0}{a}, \tag{65}$$

$$\sigma^0_\theta = \left(\frac{c}{a} \frac{\rho^{\frac{6a}{3-2a}}}{(\sin\theta)^{\frac{6a}{3+4a}}} - \frac{k_0}{a} \right) A - DA, \tag{66}$$

где $c = \mathrm{const}$, A и D определены выше. Решая совместно (61), (9) и линеаризированные условия пластичности (3), получим

$$\sigma'_\rho - \sigma'\left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0, \quad \sigma'_\varphi - \sigma'\left(1 - \frac{2}{3}a\right) = 0. \tag{67}$$

Тогда

$$\sigma'_\rho = \sigma'_\varphi, \tag{68}$$

$$\sigma' = \frac{2\sigma'_\rho + \sigma'_\theta}{3}. \tag{69}$$

Решая совместно (69) и (67), получим

$$\sigma'_\theta = A\tilde{\sigma}', \tag{70}$$

где $\tilde{\sigma}' = \sigma'_\rho = \sigma'_\varphi$. Решая совместно (61), (9) и линеаризированные условия пластичности (4), имеем

$$\tau'_{\rho\varphi} = 0. \tag{71}$$

Уравнения равновесия (2) с учетом (70) и (71) примут вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{\sigma}'}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau'_{\rho\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho}((A-1)\tilde{\sigma}' + \tau'_{\rho\theta}\operatorname{ctg}\theta) = 0,\\
&\frac{\partial\tau'_{\rho\theta}}{\partial\rho} + \frac{A}{\rho}\frac{\partial\tilde{\sigma}'}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\tau'_{\theta\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{1}{\rho}((A-1)\operatorname{ctg}\theta\tilde{\sigma}' + 3\tau'_{\rho\theta}) = 0,\\
&\frac{\partial\tau'_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\tilde{\sigma}'}{\partial\varphi} + 2\tau'_{\theta\varphi}\operatorname{ctg}\theta = 0.
\end{aligned} \tag{72}$$

Введем функцию $U(\rho,\theta,\varphi)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\tilde{\sigma}' = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial U}, \quad \tau'_{\theta\varphi} = -\frac{1}{\rho\sin^2\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}, \quad \tau'_{\rho\theta} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\rho} + \frac{A}{\rho\sin\theta}U. \tag{73}$$

Тогда первое и третье уравнения (73) тождественно удовлетворяются, а второе примет вид

$$\rho^2\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2} - (A-3)\rho\frac{\partial U}{\partial\rho} - A\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} - 2AU = 0. \tag{74}$$

Решение (74) найдено методом разделения переменных:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\rho^{\chi_1} + C_2\rho^{\chi_2})(a_{mn}\cos m\varphi + b_{mn}\sin m\varphi)(\sin\theta)^{\frac{A+1}{2A}+\alpha}\mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta), \tag{75}$$

где первый сомножитель (75) представляет решение уравнения Эйлера, в котором

$$\chi_{1,2} = \frac{A}{2} - 1 \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}+1\right)^2 - A(2\alpha+1)(n+0,5) + An^2 - m^2 + \frac{1}{2}}, \tag{76}$$

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{A+1}{2A}\right)^2 - \frac{m^2}{A}}; \tag{77}$$

второй сомножитель представляет решение уравнения Фурье, в котором a_{mn}, b_{mn} — коэффициенты Фурье, определяемые (30), $\mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta)$ — полином Якоби.

Решая совместно (75), (73) и принимая во внимание (70), получим для первого приближения компонент напряжения в пластической области

$$
\begin{aligned}
&\sigma'_\rho = \sigma'_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\rho^{\chi_1-1} + C_2\rho^{\chi_2-1})(a_{mn}\cos m\varphi - b_{mn}\sin m\varphi)\times \\
&\qquad \times(\sin\theta)^{\frac{A+1}{2A}+\alpha}\left[\left(\frac{A+1}{2A}+\alpha\right)\cos\theta \mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta) + \sin\theta\frac{\partial \mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta)}{\partial\theta}\right], \\
&\sigma'_\theta = A\sigma'_\rho, \quad \tau'_{\rho\varphi} = 0, \\
&\tau'_{\theta\varphi} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\rho^{\chi_1-1} + C_2\rho^{\chi_2-1})\times \\
&\qquad \times(b_{mn}\cos m\varphi - a_{mn}\sin m\varphi)(\sin\theta)^{\frac{1-3A}{2A}+\alpha} m\mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta), \\
&\tau'_{\theta\rho} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(C_1\rho^{\chi_1-1}(A-\chi_1) + C_2\rho^{\chi_2-1}(A-\chi_2))\times \\
&\qquad \times(a_{mn}\cos m\varphi + b_{mn}\sin m\varphi)(\sin\theta)^{\frac{1-A}{2A}+\alpha}\mathrm{P}_n^{(\alpha,\alpha)}(\cos\theta),
\end{aligned}
\tag{78}
$$

где константы C_1, C_2 и константа c в (65) и (66) могут быть определены из граничных условий и условий сопряжения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

[2] Ивлев Д. Д., Ершов Л. В. Метод возмущений в теории упругопластического тела. М.: Наука, 1978. 208 с.

[3] Ершов Л. В., Ивлев Д. Д. Упругопластическое состояние эллиптической трубы, находящейся под действием внутреннего давления // Изв. АН СССР, ОТН. 1957. №9. С. 130–134.

[4] Lame G. Lecons sur les coordonees curvilignes et leurs divers applications. Paris, 1859.

[5] Tomson W. Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incommpressible Liquid // Mathematical and Phis. Paper. 1892. Vol. 3.

[6] Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.

[7] Галеркин Б. Г. Равновесие упругой сферической оболочки // ПММ. 1942. Вып. 6. С. 487–496.

[8] Галеркин Б. Г. Равновесие упругой симметрично нагруженной сферической оболочки // ПММ. 1943. Вып. 7.

[9] Sternberg E., Enbancs R. A., Sadowsky M. On the axisimmetric Problem of Elasticity for a Region bounded by two concentric Spheres // Труды конгресса по прикладной механике в США. 1953.

[10] Sadowsky M. A., Sternberg E. Stress Concentraction around a Traxil Ellipsoidal Cavity // Journal of applied Mechanic. 1949. №2.

[11] Лурье А. И. Напряженное состояние вокруг эллипсоидальной полости // Докл. АН СССР. 1952. № 5.

[12] Семыкина Т. Д. О трехосном растяжении упругопластического пространства, ослабленного сферической полостью // Изв. АН СССР, Механика и машиностроение. 1963. № 1. С. 174–177.

[13] Аннин Б. Д., Черепанов Г. П. Упругопластическая задача. Новосибирск: Наука, 1983. 238 с.

[14] Ефремов В. Г. Идеальнопластическое напряженное состояние тел вблизи сферической полости // Известия РАН, МТТ. 1999. № 3. С. 70–75.

[15] Максимов А. Н., Ефремов В. Г. Об определении предельного напряженного состояния в массиве, ослабленном эллипсоидальной полостью // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Чебоксары, 2001. № 2(21). С. 128–134.

[16] Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. М.: ГИТТЛ, 1954.

[17] Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н. К вопросу определения возмущенного состояния идеальнопластического сжимаемого массива, ослабленного сферической полостью // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 3(29). С. 117–121.

[18] Максимов А. Н. Напряженное состояние идеальнопластического сжимаемого пространства, ослабленного сферической полостью // Сб. тр. Всеросс. НПК «Современное состояние прикладной науки в области механики и энергетики». Чебоксары: Чувашская ГСХА, 2016. С. 592–599.

[19] Максимов А. Н. Об определении возмущенного состояния массива при условии полной пластичности // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2016. № 4(30). С. 102–107.

[20] Максимов А. Н., Пушкаренко Н. Н., Деревянных Е. А., Храмова Н. В. К вопросу определения возмущенного состояния массива, ослабленного полостями // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 3(33). С. 58–63.

A. N. Maksimov[1], *N. N. Pushkarenko*[1], *E. A. Derevyannih*[1], *Yu. P. Dmitrievh*[1]

TO THE QUESTION OF DETERMINATION OF THE LIMIT STRESS OF A STRONG TENSION OF A MASSIVE WEARED BY GROUPS

[1] *Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia*

Abstract. The algorithm of successive approximations is developed for the analytical determination of the stressed state of a compressible elastic-plastic space with cavities. In the formulation of the problem inside the cavity pressure is absent, and at infinity mutually perpendicular forces are applied. The problem is solved by the method of a small parameter, in a spherical coordinate system, in dimensionless units of length. Three cases are considered under which conditions for complete plasticity can be satisfied, one of which corresponds to a spherical cavity. The zero values of the stresses in the elastic and plastic regions are determined, the zero approximation of the boundary of the elastic-plastic zone for the case of a spherical cavity, and also the first approximations of the stress components in the plastic region for three cases satisfying the condition of complete plasticity. The obtained results can be used in the field of mining, construction mechanics and other related fields.

Keywords: stresses, deformation, plasticity, elasticity, spherical cavity.

REFERENCES

[1] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Fizmatlit, 2001. 704 c. (in Russian)

[2] Ivlev D. D., Ershov L. V. Metod vozmushchenij v teorii uprugoplasticheskogo tela. M.: Nauka, 1978. 208 s. (in Russian)

[3] Ershov L. V., Ivlev D. D. Uprugoplasticheskoe sostoyanie ehllipticheskoj truby, nahodyashchejsya pod dejstviem vnutrennego davleniya // Izv. AN SSSR, OTN. 1957. № 9. S. 130–134. (in Russian)

[4] Lame G. Lecons sur les coordonees curvilignes et leurs divers applications. Paris, 1859. (in Russian)

[5] Tomson W. Dynamical Problems regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incommpressible Liquid // Mathematical and Phis. Paper. 1892. Vol. 3. (in Russian)

[6] Lur'e A. I. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti. M.: Gostekhizdat, 1955. 492 c. (in Russian)

Maksimov Aleksey Nikolaevich

`e-mail:` alexei.maksimow@yandex.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Pushkarenko Nikolay Nikolaevich

`e-mail:` stl_mstu@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Dereviannih Evgeniya Anatolyevna

`e-mail:` jane-evgeniya@yandex.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

Dmitriev Yuri Petrovich

`e-mail:` 14102010olga@mail.ru, Ph. D., Assoc. Professor, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, Russia.

[7] Galerkin B. G. Ravnovesie uprugoj sfericheskoj obolochki // PMM. 1942. Vyp. 6. S. 487–496. (in Russian)

[8] Galerkin B. G. Ravnovesie uprugoj simmetrichno nagruzhennoj sfericheskoj obolochki // PMM. 1943. Vyp. 7. (in Russian)

[9] Sternberg E., Enbancs R. A., Sadowsky M. On the axisimmetric Problem of Elasticity for a Region bounded by two concentric Spheres // Trudy kongressa po prikladnoj mekhanike v SSHA. 1953. (in Russian)

[10] Sadowsky M. A., Sternberg E. Stress Concentraction around a Traxil Ellipsoidal Cavity // Journal of applied Mechanic. 1949. № 2. (in Russian)

[11] Lur'e A. I. Napryazhennoe sostoyanie vokrug ehllipsoidal'noj polosti // Dokl. AN SSSR. 1952. № 5. (in Russian)

[12] Semykina T. D. O trekhosnom rastyazhenii uprugoplasticheskogo prostranstva, oslablennogo sfericheskoj polost'yu // Izv. AN SSSR, Mekhanika i mashinostroenie. 1963. № 1. S. 174–177. (in Russian)

[13] Annin B. D., CHerepanov G. P. Uprugoplasticheskaya zadacha. Novosibirsk: Nauka, 1983. 238 s. (in Russian)

[14] Efremov V. G. Ideal'noplasticheskoe napryazhennoe sostoyanie tel vblizi sfericheskoj polosti // Izvestiya RAN, MTT. 1999. № 3. S. 70–75. (in Russian)

[15] Maksimov A. N., Efremov V. G. Ob opredelenii predel'nogo napryazhennogo sostoyaniya v massive, oslablennom ehllipsoidal'noj polost'yu // Vestnik CHGPU im. I.YA. YAkovleva. CHeboksary, 2001. № 2(21). S. 128–134. (in Russian)

[16] Sokolovskij V. V. Statika sypuchej sredy. M.: GITTL, 1954. (in Russian)

[17] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N. K voprosu opredeleniya vozmushchennogo sostoyaniya ideal'noplasticheskogo szhimaemogo massiva, oslablennogo sfericheskoj polost'yu // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2016. № 3(29). S. 117–121. (in Russian)

[18] Maksimov A. N. Napryazhennoe sostoyanie ideal'noplasticheskogo szhimaemogo prostranstva, oslablennogo sfericheskoj polost'yu // Sb. tr. Vseross. NPK «Sovremennoe sostoyanie prikladnoj nauki v oblasti mekhaniki i ehnergetiki». CHeboksary: CHuvashskaya GSKHA, 2016. S. 592–599. (in Russian)

[19] Maksimov A. N. Ob opredelenii vozmushchennogo sostoyaniya massiva pri uslovii polnoj plastichnosti // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2016. № 4(30). S. 102–107. (in Russian)

[20] Maksimov A. N., Pushkarenko N. N., Derevyannyh E. A., Hramova N. V. K voprosu opredeleniya vozmushchennogo sostoyaniya massiva, oslablennogo polostyami // Vestnik CHGPU im. I. YA. YAkovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2017. № 3(33). S. 58–63. (in Russian)