Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3 (37). С. 18–25

Е. В. Мурашкин, Ю. Н. Радаев

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ТЕОРИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ, СЛЕДУЮЩИЕ ИЗ ВАРИАЦИОННЫХ СИММЕТРИЙ ДЕЙСТВИЯ

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются проблемы математического моделирования нелинейного гиперболического термоупругого континуума и вывода дивергентных законов сохранения в терминах физических теорий поля. Приводятся действие и плотность действия для гиперболического термоупругого континуума. В условиях трансляционных симметрий плотности действия конструируется тензор энергии–импульса. Выведены точные формы гамильтониана, вектора Умова–Пойнтинга, вектора псевдоимпульса и тензора напряжений Эшелби. Изучены масштабные симметрии действия и получены соответствующие законы сохранения.

Ключевые слова: термоупругость, микроструктура, поле, действие, ковариантность, закон сохранения, 4-ток, тензор энергии—импульса.

УДК: 539.374

1. Введение

Современные структурные и функциональные материалы проявляют физические свойства, которые невозможно описать в рамках классической механики сплошных сред. Например, поведение нематических жидких кристаллов, аномальный пьезоэлектрический эффект в кварце, дисперсия упругих волн, эффект “второго звука” и ряд других экспериментально наблюдаемых аномальных физических свойств. Поэтому разработка математических моделей процессов синтеза и эксплуатации материалов с нелинейными термомеханическими особенностями и описание их свойств является актуальной проблемой современной механики континуума. Математические теории сложных гиперболических континуумов могут быть построены в рамках формализма

Мурашкин Евгений Валерьевич
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.
Радаев Юрий Николаевич
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844-а)

Поступила 10.08.2018

теории поля [1-17]. Законы сохранения играют большую роль в математической физике; например, они служат для верификации результатов численного моделирования в качестве первых интегралов системы дифференциальных уравнений в частных производных, определяющих математическую модель. Кроме того, интегральная форма законов сохранения может быть использована при разработке метода конечных элементов и критериев физической корректности математической модели [18-20], а также в расчетах сильных разрывов физических полей.

Применение теории поля как инструмента математического моделирования приводит к естественным формулировкам определяющих соотношений и законов сохранения. В представляемой работе, опираясь на терию Нетер [21] инвариантных вариационных функционалов относительно однопараметрических групп преобразований пространственно–временных координат и физических полей, конструируется тензор энергии–импульса, выводятся точные формы гамильтониана, вектора Умова–Пойнтинга, вектора псевдоимпульса и тензора напряжений Эшелби.

2. Интеграл действия. 4-вектор тока. Тензор энергии–импульса, гамильтониан, псевдоимпульс, тензор напряжений Эшелби

Формализм теории поля основан на математическом описании физических полей интегральным функционалом действия. Общая форма вариацонного интеграла действия в заданной области 4-пространства–времени имеет вид

$$\mathcal{I} = \int \mathcal{L}(X^\beta, \varphi^k, \partial_\alpha \varphi^k) d^4 X, \tag{1}$$

где φ^k — физические поля, $\mathcal{L}$ — плотность Лагранжиана, $d^4X = dX^1 dX^2 dX^3 dX^4$ — элементарный 4-объем в пространстве–времени.

Принцип наименьшего действия утверждает, что фактическое поле реализуется в пространстве-времени таким образом, что действие (1) минимально, т. е. для любых допустимых вариаций физических полей φ^k и неизменных координатах X^β справедливо следующее уравнение:

$$\delta \mathcal{I} = 0. \tag{2}$$

В этом случае можно получить классические уравнения Эйлера–Лагранжа:

$$\mathcal{E}_k(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^k} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha \varphi^k)} = 0.$$

В общем случае закон сохранения (2) имеет следующую дивергентную 4-ковариантную форму

$$\partial_\beta J^\beta = 0,$$

где J^β — 4-вектор тока. Закон сохранения выполняется в силу уравнений поля, т.е. когда физические поля удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа, и не может быть интерпретирован независимо от уравнений поля.

Используя конечные вариации $\delta^\nabla = \delta/\varepsilon$, 4-вектор тока на основании теории Нетер может быть получен в виде [4, 5]

$$J^\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \delta^\nabla \varphi^k + \left(\mathcal{L} \delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha \varphi^k) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)} \right) \delta^\nabla X^\alpha, \tag{3}$$

если известны вариационные симметрии действия (1).

В наиболее важных случаях интегральная плотность действия $\mathcal{L}$ инвариантна относительно сдвигов координат X^α. Очевидно, это имеет место, когда $\mathcal{L}$ не зависит от переменных X^α явно. В этом случае можно без труда определить 4-вектор тока и 4-ковариантный тензор энергии–импульса и сформулировать соответствующие законы сохранения. Тензор энергии–импульса $T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$ определяется следующей формулой [4, 5]:

$$T^{\beta\cdot}_{\cdot\alpha} = \mathcal{L}\delta^\beta_\alpha - (\partial_\alpha \varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta \varphi^k)}. \tag{4}$$

Компоненты тензора энергии–импульса естественным образом разделяются на 4 группы $(\lambda,\ \mu = 1, 2, 3)$:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathcal{L}\delta^\mu_\lambda - (\partial_\lambda \varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^k)},\\
&\text{(ii)} \quad T^{\mu\cdot}_{\cdot 4} = \mathcal{L}\delta^\beta_4 - (\partial_4 \varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^k)},\\
&\text{(iii)} \quad T^{4\cdot}_{\cdot\lambda} = \mathcal{L}\delta^4_\lambda - (\partial_\lambda \varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_4 \varphi^k)},\\
&\text{(iv)} \quad T^{4\cdot}_{\cdot 4} = \mathcal{L}\delta^4_4 - (\partial_\lambda \varphi^k)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(4_4 \varphi^k)}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Из (i)–(iv) следует, что компоненты тензора энергии–импульса включают известные физические величины: $T^{4\cdot}_{\cdot 4} = H$ — гамильтониан, $T^{\mu\cdot}_{\cdot 4} = \Gamma^\mu$ — вектор Умова–Пойнтинга, $T^{4\cdot}_{\cdot\lambda} = P_\lambda$ вектор псевдоимпульса, $T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = -P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda}$ — тензор напряжений Эшелби.

Законы сохранения, соответствующие трансляционным симметриям действия, можно представить в форме квазилинейного уравнения

$$\partial_\mu T^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4). \tag{6}$$

Уравнения (6) можно разделить на следующие симметричные канонические уравнения

$$-\dot{H} + \partial_\mu \Gamma^\mu = 0, \qquad -\dot{P}_\lambda + \partial_\mu P^{\mu\cdot}_{\cdot\lambda} = 0. \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3) \tag{7}$$

Уравнения (7) — это уравнение баланса энергии и уравнение баланса псевдоимпульса соответственно.

3. Законы сохранения для гиперболического термоупругого поля

Лагранжиан связанного термоупругого поля в рамках 4×4-формализма в *декартовой системе* координат можно представить как разность кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца ψ

$$\mathcal{L}(X_\alpha, \dot{x}_j, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x_j, \partial_\alpha \vartheta) = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}}(X_\alpha)\dot{x}_k\dot{x}_k - \psi(X_\alpha, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha x_j, \partial_\alpha \vartheta). \tag{8}$$

Здесь ρ_{R} обозначает референциальную массовую плотность, x_j — переменные Эйлера, ϑ — поле температурного смещения, связанное с температурой θ уравнением $\theta = \dot{\vartheta}$. Уравнения поля, соответствующие лагранжиану (8), могут быть представлены в следующем виде

$$\partial_\alpha S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} - \partial_4 P_j = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3), \tag{9}$$

$$\partial_\alpha j^\alpha_{\mathrm{R}} + \partial_4 s = 0. \tag{10}$$

Здесь мы использовали следующие обозначения:

$$S^{\alpha\cdot}_{\cdot j} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha x^j)}, \quad P_j = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4 x^j)}, \quad s = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_4\vartheta)}, \quad j^\alpha_{\mathrm{R}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\vartheta)}. \tag{11}$$

Законы сохранения, соответствующие трансляционной инвариантности интеграла термоупругого действия, т.е. когда плотность лагранжиана не зависит от пространственных координат X_β ($\beta = 1, 2, 3$) и временной переменной записываются в форме

$$\partial_\beta(\mathcal{L}\delta^\beta_\alpha + S^{\beta\cdot}_{\cdot j}\partial_\alpha x_j - j^\beta_{\mathrm{R}}\partial_\alpha\vartheta) - (\rho_{\mathrm{R}}\dot{x}_j\partial_\alpha x_j + s\partial_\alpha\vartheta)^{\cdot} = 0, \tag{12}$$

$$\partial_\beta(S^{\beta\cdot}_{\cdot j}\dot{x}_j - j^\beta_{\mathrm{R}}\theta) + (\mathcal{L} - \rho_{\mathrm{R}}\dot{x}_j\dot{x}_j - s\theta)^{\cdot} = 0. \tag{13}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3; \; j = 1, 2, 3) \tag{14}$$

Первое уравнение в (12) является уравнением баланса псевдоимпульса термоупругого поля.

Второе уравнение в (12) путем замены плотности лагранжиана (8) может быть представлено как

$$\partial_\beta\left(S^{\beta\cdot}_{\cdot j}v_j - j^\beta_{\mathrm{R}}\theta\right) - \left(\frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}}v_k v_k + \psi + s\theta\right)^{\cdot} = 0. \tag{15}$$

Заметим, что для вывода закона сохранения (15) достаточно принять инвариантность интеграла термоупругого действия при трансляционных преобразованиях пространства–времени и выполнение уравнений поля (9).

Предполагая, что термоупругий континуум неоднороден, т.е. плотность лагранжиана явно зависит от лагранжевых координат X_β, но не зависит от временной переменной, получим

$$\partial^{\mathrm{expl}}_\beta\mathcal{L} \neq 0 \qquad (\beta = 1, 2, 3), \tag{16}$$

вместо закона сохранения мы имеем уравнение баланса

$$\partial_\beta(\mathcal{L}\delta^\beta_\alpha + S^{\beta\cdot}_{\cdot j}\partial_\alpha x_j - j^\beta_{\mathrm{R}}\partial_\alpha\vartheta) - (\rho_{\mathrm{R}}\dot{x}_j\partial_\alpha x_j + s\partial_\alpha\vartheta)^{\cdot} = \partial^{\mathrm{expl}}_\beta\mathcal{L}. \tag{17}$$

Другие законы сохранения соответствуют однопараметрической группе масштабных преобразований [22-24] переменных Эйлера и Лагранжа

$$\begin{aligned}\tilde{X}_\alpha &= X_\alpha + \varepsilon X_\alpha,\\ \tilde{x}_j &= x_j - \varepsilon x_j,\end{aligned} \tag{18}$$

где $x_4 = \vartheta$.

Инфинитизимальный оператор однопараметрической группы (18) находится в виде

$$\varsigma\cdot\partial = X_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial X_\gamma}\right)_{\mathrm{expl}} - x_k\frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{19}$$

Инфинитизимальный оператор один раз продолженной группы (18) получается в форме

$$\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial = X_\gamma\left(\frac{\partial}{\partial X_\gamma}\right)_{\mathrm{expl}} - x_k\frac{\partial}{\partial x_k} - 2(\partial_\alpha x_j)\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha x_j)}. \tag{20}$$

Критерий инфинитизимальной инвариантности функционала действия выражается уравнением

$$X_\gamma \partial_\gamma^{\mathrm{expl}} \mathcal{L} - 2\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta x_j)}\right)\partial_\beta x_j + 4\mathcal{L} = 0. \quad (21)$$

Если термоупругий континуум однороден и лагранжиан инвариантен относительно сдвигов по времени, то любой лагранжиан, квадратично зависящий от градиентов $\partial_\beta x_j$, удовлетворяет критерию (21), а термоупругое поле имеет масштабные симметрии (18). В этом случае можно получить соответствующие законы сохранения с помощью теории Нетер. Таким образом, для термоупругой деформации и смещения температуры однородного гиперболического термоупругого континуума, удовлетворяющего уравнениям поля (9), справедлив следующий закон сохранения

$$\partial_\sigma J^\sigma = 0 \qquad (\sigma = 1,2,3,4),$$

где 4-вектор тока может быть представлен в виде

$$J^\sigma = X_\sigma \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma x_k)}(-x_k - X_\gamma \partial_\gamma x_k) \qquad (\sigma,\gamma = 1,2,3,4; k = 1,2,3,4).$$

Окончательно, рассматриваемый закон сохранения можно получить в следующей дивергентной форме

$$\begin{gathered}\partial_\beta\left[(\mathcal{L}\delta_\alpha^\beta + S_{\cdot j}^{\beta\cdot}\partial_\alpha x_j - j_{\mathrm{R}}^\beta \partial_\alpha \vartheta)X_\alpha + (S_{\cdot j}^{\beta\cdot}\dot{x}_j - j_{\mathrm{R}}^\beta \theta)t + S_{\cdot j}^{\beta\cdot} x_j - \vartheta j_{\mathrm{R}}^\beta\right] + \\ + [\mathcal{H}t - (\rho_{\mathrm{R}}\dot{x}_j\partial_\alpha x_j + s\partial_\alpha\vartheta)X_\alpha - \rho_{\mathrm{R}}\dot{x}_j x_j - s\vartheta]^\cdot = 0,\end{gathered} \quad (22)$$

с гамильтонианом поля, определяемым согласно

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\rho_{\mathrm{R}}\dot{x}_k\dot{x}_k + \psi + s\vartheta.$$

Подводя итоги, заметим, что в рамках теоретико–полевого формализма определены *все* канонические физические переменные, относящиеся к теории связанной гиперболической термоупругости.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. E. Green and P. M. Naghdi, J. Therm. Stress, 1992, Vol. 15, Pp. 253–264.

[2] A. E. Green and P. M. Naghdi, J. Elasticity, 1993, Vol. 31, Pp. 189–208.

[3] E. et F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909, p. 226.

[4] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants, FIZMATLIT, Moscow, 2009, p. 156.

[5] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics, Saratov University Publisher, Saratov, 2010, p. 328.

[6] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev and D. A. Semenov, 2009, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, Vol. 9, Iss. 5, Pp. 94—127.

[7] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, 2012, Vol. 12, Iss. 4, Pp. 71-–79.

[8] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2014, Vol. 4(37), Pp. 85—97.

[9] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, 2014, Vol. 14, Iss. 1, Pp.77—87.

[10] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, 2015, Mat. Phys. and Mech., Vol. 23, Pp. 10-13.

[11] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State, 2015, Vol. 3(25), Pp. 61–65.

[12] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, 2015, Ivestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, Vol. 15, Iss. 1, Pp. 79–89.

[13] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, On shock wave and weak wave surfaces in micropolar thermoelastic continuum, Proceedings of the International conference Topical Problems of Continuum Mechanics, 21-26 September 2015, Tsaghkadzor, Armenia, Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia Publishing, 2015, Pp. 444–448.

[14] E. V. Murashkin, COMPATIBILITY CONDITIONS IN MICROPOLAR THERMOELASTICITY, J.M. Floryan, Contributions to the Foundations of Multidisciplinary Research in Mechanics. Papers presented during the 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM2016, Montreal 22-26, 2016, 2016, Montreal, Canada, ICTAM, Pp. 2271–2272.

[15] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, METAMATERIAL MODELS OF CONTINUUM MULTIPHYSICS, Mechanics: Proceedings of the International School-Conference of Young Scientists, 3-7 October 2016, Tsakhkadzor, Armenia, Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia Publishing, 2016, Pp. 160-163.

[16] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, On Thermodynamics of Wave Processes of Heat Transport, Mechanics for Materials and Technologies, Vol. 46, Advanced Structured Materials, Springer, 2017, Cham, eds. H. Altenbach and R. V. Goldstein and E. V. Murashkin, Pp. 363–376.

[17] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, JPCS, 2017, 788(1), Pp. 012043.

[18] T. G. Shepherd, 1990, Advances in Geophysics, Vol. 32, Pp. 287-338, doi:10.1016/S0065-2687(08)60429-X.

[19] A. Kurganov and E. Tadmor, 2000, Journal of Computational Physics, Vol. 160, Iss. 1, Pp. 241-282, doi:10.1006/jcph.2000.6459

[20] G. A. Sod, Journal of Computational Physics, Vol. 27, Iss. 1, 1978, Pp. 1-31, doi:10.1016/0021-9991(78)90023-2.

[21] E. Noether, Invariante Variations probleme, K?nigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu G?ttingen, Nachrichten. Mathematisch-Physikalische Klasse Heft, Weidmannsche Buchhandlung, 1918, Vol. 2, Berlin, Pp. 235-257.

[22] L. V. Ovsyannikov, Group Analysis of Differential Equations, Nauka, Moscow, 1978, p. 400.

[23] N. H. Ibragimov, Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, Springer, Dordrecht, 1985, p. 394.

[24] N. H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Chichester, 1999, p. 366.

E. V. Murashkin, Y. N. Radayev

CONSERVATION LAWS FOR HYPERBOLIC THERMOELASTICITY CORRESPONDING TO THE VARIATIONAL SYMMETRIES OF ACTION

Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The mathematical modelling of hyperbolic thermoelastic continuum is carried out in terms of the field theory formalism. The action and the action density for the hyperbolic thermoelastic continuum are discussed. The energy–momentum tensor is constructed in virtue of translational symmetries of the action density. The Hamiltonian, the Umov–Poynting vector, the pseudomomentum vector and the Eshelby stress tensor are derived comprising the all physical quantaties of the classical field theory. Scale symmetries of the action are investigated and the corresponding conservation laws are obtained.

Keywords: thermoelasticity, microstructure, field, action, covariance, conservation law, 4-current, energy–momentum tensor.

REFERENCES

[1] A. E. Green and P. M. Naghdi, J. Therm. Stress, 1992, Vol. 15, Pp. 253–264.

[2] A. E. Green and P. M. Naghdi, J. Elasticity, 1993, Vol. 31, Pp. 189–208.

[3] E. et F. Cosserat, Théorie des corps déformables, Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1909, p. 226.

[4] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants, FIZMATLIT, Moscow, 2009, p. 156.

[5] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, Wave Problems of Field Theory and Thermomechanics, Saratov University Publisher, Saratov, 2010, p. 328.

[6] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev and D. A. Semenov, 2009, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, Vol. 9, Iss. 5, Pp. 94—127.

[7] V. A. Kovalev and Y. N. Radayev, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, 2012, Vol. 12, Iss. 4, Pp. 71-–79.

[8] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2014, Vol. 4(37), Pp. 85—97.

[9] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, 2014, Vol. 14, Iss. 1, Pp.77—87.

[10] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, 2015, Mat. Phys. and Mech., Vol. 23, Pp. 10-13.

[11] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State, 2015, Vol. 3(25), Pp. 61–65.

Murashkin Evgenii Valeryevich
`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Ph.D., Senior Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.
Radayev Yuri Nickolaevich
`e-mail:` radayev@ipmnet.ru, y.radayev@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Leading Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

[12] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, 2015, Ivestiya of Saratov University. New Series. Series Mathematics. Mechanics. Informatics, Vol. 15, Iss. 1, Pp. 79–89.

[13] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, On shock wave and weak wave surfaces in micropolar thermoelastic continuum, Proceedings of the International conference Topical Problems of Continuum Mechanics, 21-26 September 2015, Tsaghkadzor, Armenia, Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia Publishing, 2015, Pp. 444–448.

[14] E. V. Murashkin, COMPATIBILITY CONDITIONS IN MICROPOLAR THERMOELASTICITY, J.M. Floryan, Contributions to the Foundations of Multidisciplinary Research in Mechanics. Papers presented during the 24th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics ICTAM2016, Montreal 22-26, 2016, 2016, Montreal, Canada, ICTAM, Pp. 2271–2272.

[15] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, METAMATERIAL MODELS OF CONTINUUM MULTIPHYSICS, Mechanics: Proceedings of the International School-Conference of Young Scientists, 3-7 October 2016, Tsakhkadzor, Armenia, Erevan, National University of Architecture and Construction of Armenia Publishing, 2016, Pp. 160-163.

[16] E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, On Thermodynamics of Wave Processes of Heat Transport, Mechanics for Materials and Technologies, Vol. 46, Advanced Structured Materials, Springer, 2017, Cham, eds. H. Altenbach and R. V. Goldstein and E. V. Murashkin, Pp. 363–376.

[17] V. A. Kovalev and E. V. Murashkin and Y. N. Radayev, JPCS, 2017, 788(1), Pp. 012043.

[18] T. G. Shepherd, 1990, Advances in Geophysics, Vol. 32, Pp. 287-338, doi:10.1016/S0065-2687(08)60429-X.

[19] A. Kurganov and E. Tadmor, 2000, Journal of Computational Physics, Vol. 160, Iss. 1, Pp. 241-282, doi:10.1006/jcph.2000.6459

[20] G. A. Sod, Journal of Computational Physics, Vol. 27, Iss. 1, 1978, Pp. 1-31, doi:10.1016/0021-9991(78)90023-2.

[21] E. Noether, Invariante Variations probleme, K?nigliche Gesellschaft der Wissenschaften zu G?ttingen, Nachrichten. Mathematisch-Physikalische Klasse Heft, Weidmannsche Buchhandlung, 1918, Vol. 2, Berlin, Pp. 235-257.

[22] L. V. Ovsyannikov, Group Analysis of Differential Equations, Nauka, Moscow, 1978, p. 400.

[23] N. H. Ibragimov, Transformation Groups Applied to Mathematical Physics, Springer, Dordrecht, 1985, p. 394.

[24] N. H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, Chichester, 1999, p. 366.