Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3 (37). С. 91–99

А. Н. Прокудин

ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

Аннотация. Рассматривается упруговязкопластическое деформирование вращающегося тонкого диска в условиях плоского напряженного состояния. Деформации в диске принимаются малыми и аддитивно раскладываются на упругие и вязкопластические составляющие. Напряжения определяются упругими деформациями с помощью закона Гука. В качестве условия пластичности используется обобщение условия Мизеса, учитывающее вязкость материала. Определяющая система дифференциальных уравнений решается с помощью метода конечных разностей. Полученные результаты численных расчетов проиллюстрированы с помощью графиков.

Ключевые слова: вязкость, пластичность, вращающийся диск, метод конечных разностей

УДК: 539.374

Введение. Расчет упругопластического состояния вращающихся дисков представляет значительный теоретический интерес и имеет широкое практическое применение. Для решения данного класса задач обычно используется теория малых упругопластических деформаций вместе с условием пластичности Треска. В первых работах, например [1], рассматривалось идеальное пластическое течение в сплошном диске. Течение начинается в центре диска, где напряжения удовлетворяют неравенству $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, что позволяет получить распределение напряжений в пластической области напрямую из уравнения равновесия без рассмотрения перемещений. Однако, Гамер в [2] показал, что поле перемещений при использовании данного подхода оказывается разрывным на упругопластической границе. Годом спустя [3] Гамер привел корректное решение упругопластической задачи во вращающемся диске. При достижении критической скорости вращения в центре диска возникают две области пластического течения, внутренняя соответствует условию Треска в виде $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$, а внешняя — $\sigma_{\varphi\varphi} > \sigma_{rr} > \sigma_{zz}$. С увеличением скорости вращения обе области одновременно продвигаются в сторону внешней границы диска. Аналогичная задача для вращающегося кольцевого диска и сплошного цилиндра также решена Гамером [4, 5]. В цикле работ Гювена [6–9] исследуется упругопластическое деформирование

Прокудин Александр Николаевич
`e-mail:` sunbeam_85@mail.ru, кандидат технических наук, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №007-00285-18-00

Поступила 15.07.2018

кольцевых дисков переменной толщины. Гювеном [10] также решена задача для вращающегося диска с жестким включением. В работе [11] упругопластическая задача для сплошного и кольцевого диска решается с помощью условия пластичности Мизеса и приведено сравнение с условием Треска. Установлено, что при одинаковой скорости вращения условие Треска предсказывает бо́льшую область пластического течения, при этом скорость, при которой диск полностью переходит в состояние пластичности для условия Мизеса оказывается выше. Статья [12] посвящена исследованию упругопластического деформирования в анизотропном диске. В работах [13, 14] рассматривается условие пластичности Друкера-Прагера, в которое, как известно, входит зависимость от среднего напряжения. Показано, что распределение напряжений в этом случае может значительно отличаться от условий Треска и Мизеса.

При высоких температурах на пластическое поведение металлов существенное влияние оказывает скорость приложения нагрузки. В отличие от исследования упругопластических и вязкоупругих деформаций, теме упруговязкопластического деформирования вращающихся дисков и цилиндров посвящено относительно небольшое число работ, среди которых можно отметить [15, 16]. В настоящей работе вязкопластическое течение во вращающемся диске исследуется с помощью обобщения условия Мизеса, которое учитывает эффект вязкости материала.

Постановка задачи. Рассмотрим тонкий диск с внутренним и внешним радиусом a и b соответственно. Диск вращается вокруг собственной оси с угловой скоростью $\omega(t)$. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z. Предполагаем, что имеет место осевая симметрия и плоское напряженное состояние ($\sigma_{zz} = 0$). Для удобства перейдем к безразмерной радиальной координате:

$$\beta = r/b, \delta = a/b, \delta \le \beta \le 1.$$

Вектор перемещений имеет две ненулевые компоненты: u_r и u_z. В дальнейшем компоненту u_r будем обозначать кратко u. Считаем, что полные деформации представляют собой сумму упругих e_{ij} и пластических деформаций p_{ij}:

$$e_{rr} + p_{rr} = \frac{\partial u}{\partial \beta},\ e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = \frac{u}{\beta}\ , e_{zz} + p_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{1}$$

Напряжения (в безразмерном виде) связаны с упругими деформациями законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{E}{\sigma_y}\frac{1}{(1-\nu^2)}\left(e_{rr} + \nu e_{\varphi\varphi}\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{\sigma_y}\frac{1}{(1-\nu^2)}\left(\nu e_{rr} + e_{\varphi\varphi}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

где E — Модуль Юнга, σ_y — предел текучести, ν — коэффициент Пуассона.

Уравнение равновесия в диске имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \beta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{\beta} = -\Omega\beta, \Omega = \frac{\rho b^2 \omega^2}{\sigma_y}. \tag{3}$$

Используя соотношения (1) и (3) запишем уравнение равновесия через перемещения и пластические деформации:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1}{\beta}\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{u}{\beta^2} = -\frac{\sigma_y}{E}\left(1-\nu^2\right)\Omega\beta + \frac{\partial p_{rr}}{\partial \beta} + \nu\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \beta} + (1-\nu)\left(\frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{\beta}\right). \tag{4}$$

Скорости пластических деформаций ε^p_{ij} определяются ассоциированным законом пластического течения:

$$\varepsilon^p_{ij} = \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{5}$$

где λ — положительный множитель, Φ — пластический потенциал.

В качестве условия текучести воспользуемся модификацией условия Мизеса на случай вязкопластического течения:

$$\Phi\left(\sigma_{ij}, \varepsilon^p_{ij}\right) = \left(s_{ij} - \frac{\eta}{\sigma_y}\epsilon^p_{ij}\right)\left(s_{ji} - \frac{\eta}{\sigma_y}\epsilon^p_{ij}\right) = \frac{2}{3},$$
$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}; \epsilon^p_{ij} = \varepsilon^p_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon^p_{kk}\delta_{ij},$$

где η — вязкость, s_{ij} — компоненты девиатора тензора напряжений, ϵ^p_{ij} — компоненты девиатора тензора скоростей пластических деформаций.

Заметим, что при $\eta = 0$ используемое условие сводится к классическому условию Мизеса для идеальной пластичности.

Преобразуем условие текучести к виду:

$$\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - Z\left(\varepsilon^p_{rr} - \varepsilon^p_{\varphi\varphi}\right)\right)^2 + \left(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz} - Z\left(\varepsilon^p_{\varphi\varphi} - \varepsilon^p_{zz}\right)\right)^2 + \\ +(\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - Z\left(\varepsilon^p_{zz} - \varepsilon^p_{rr}\right))^2 = 2, \tag{6}$$

где $Z = \eta/\sigma_y$.

С помощью ассоциированного закона найдем выражения для скоростей пластических деформаций:

$$\varepsilon^p_{rr} = \frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}\left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right),$$
$$\varepsilon^p_{\varphi\varphi} = \frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}\left(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}\right),$$
$$\varepsilon^p_{zz} = -\frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\right).$$

Подставим найденные выражения обратно в условие пластичности, найдем оттуда неизвестный множитель $\frac{\lambda}{(1+3\lambda\eta)}$, а также перейдем к безразмерной координате τ, в результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{rr}}{\partial \tau} &= \frac{1}{3}X\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_{rr}{}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}{}^2}}\right)\left(2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}\right), \\ \frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \tau} &= \frac{1}{3}X\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_{rr}{}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}{}^2}}\right)\left(2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}\right), \\ \frac{\partial p_{zz}}{\partial \tau} &= -\frac{1}{3}X\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_{rr}{}^2 - \sigma_{rr}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{\varphi\varphi}{}^2}}\right)\left(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}\right), \\ \tau &= \frac{t}{T}, X = \frac{\sigma_y T}{\eta}, \end{aligned} \tag{7}$$

где T — продолжительность процесса.

Также для удобства введем величину: $\bar{\Sigma} = \Sigma/\sqrt{2}$.

Начальные напряжения и деформации в диске отсутствуют. Граничные условия:

$$\sigma_{rr}(\delta) = 0, \sigma_{rr}(1) = 0. \tag{8}$$

При определенной скорости вращения Ω_p на внутренней поверхности диска начинается вязкопластическое течение. Скорость вращения Ω_p можно найти из упругого решения (при $p_{ij} = 0$) уравнения (4). Получим:

$$\Omega_p = \frac{4}{3 + \nu + \delta^2 (1 - \nu)} \tag{9}$$

При скорости вращения $\Omega \geq \Omega_p$ диск состоит из внутренней области пластического течения и внешней области чисто упругого деформирования. При критической скорости вращения Ω_{fp} диск полностью переходит в пластическое состояние.

Для решения уравнения (4) с учетом (7) и граничных условий (8) используется метод конечных разностей. Для проведения численных расчетов использовалась сетка, состоящая из 1000 узлов и 2500 шагов по времени.

Вращение диска происходит по закону (рис. 1):

$$\Omega(\tau) = \begin{cases} \frac{(\Omega_{max}+\Omega_p)}{2} + (\Omega_{max} - \Omega_p)\sin\left(2\pi\tau - \frac{\pi}{2}\right) & , 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}. \\ \Omega_{max} & , \frac{1}{2} < \tau \leq 1. \end{cases}$$

где Ω_{max} — максимальная скорость вращения диска.

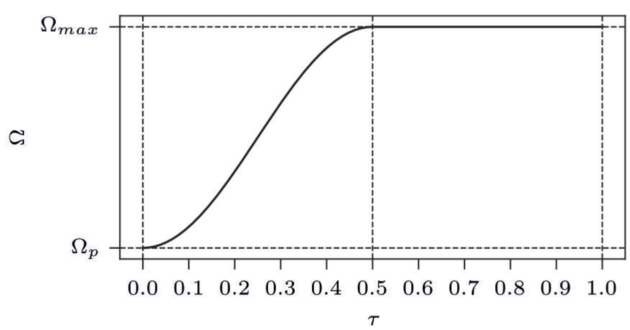


Рис. 1. Зависимость скорости вращения от времени.

Результаты. При проведении численных расчетов использовались следующие значения параметров: соотношение между внутренним и внешним радиусом диска: $\delta = 0.2$. Предел текучести: $\sigma_y = 2.5 \cdot 10^8$ Па. Модуль Юнга: $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па. Предел текучести (безразмерный): $\sigma_y/E \cong 0.00119$. Коэффициент Пуассона: $\nu = 0.3$. $X = \frac{\sigma_y T}{\eta} = 0.1$. $\Omega_{max} = 2.5 \cdot \Omega_p$.

На рис. 2 представлен график движения упругопластической границы. Положение границы $\beta = 1$ соответствует случаю, когда пластическое течение имеет место во всем диске. Видим, что при заданных параметрах диск полностью переходит в пластическое состояние примерно к середине процесса.

Перемещения u в диске представлены на рис. 3а. Следует отметить, что в начале процесса максимум перемещений имеет место на внешней границе диска, а в конце

— на внутренней. На рис. 3b показано эквивалентное напряжение по Мизесу $\bar{\Sigma}$. При этом значение $\bar{\Sigma} < 1$ говорит о том, что пластическое течение в данной точке еще не началось. После перехода в состояние полной пластичности и при постоянной скорости вращения напряжения в диске постепенно стабилизируется и далее пластическое деформирование происходит с постоянной скоростью.

Графики напряжений σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ и пластических деформаций p_{rr} и $p_{\varphi\varphi}$ изображены на рис. 4 и 5. Видим, что качественная картина тангенциальных напряжений существенно меняется со временем (рис. 4b), в то время как характер радиальных напряжений остается постоянным (рис. 4a). Максимальное значение пластических деформаций достигается на внутренней поверхности диска (рис. 5).

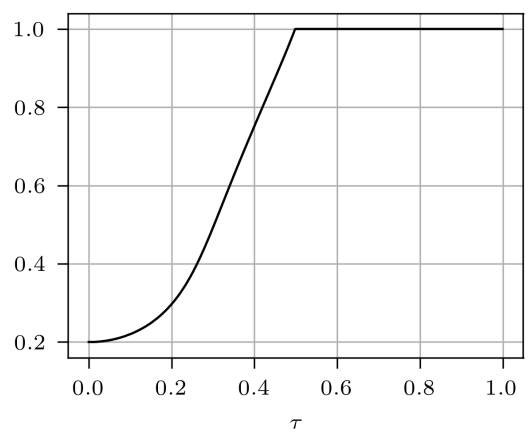
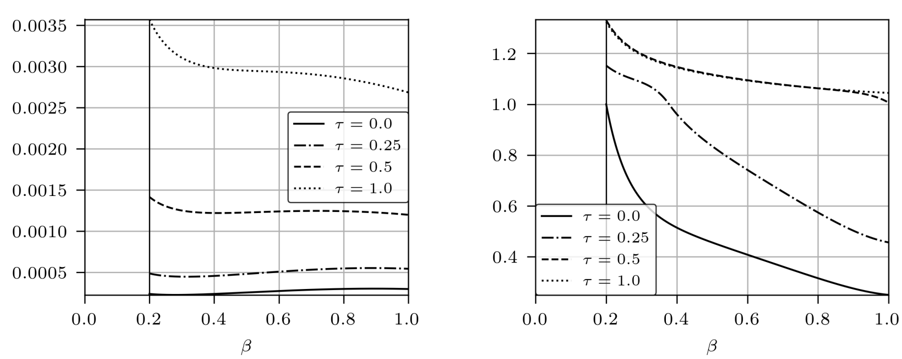
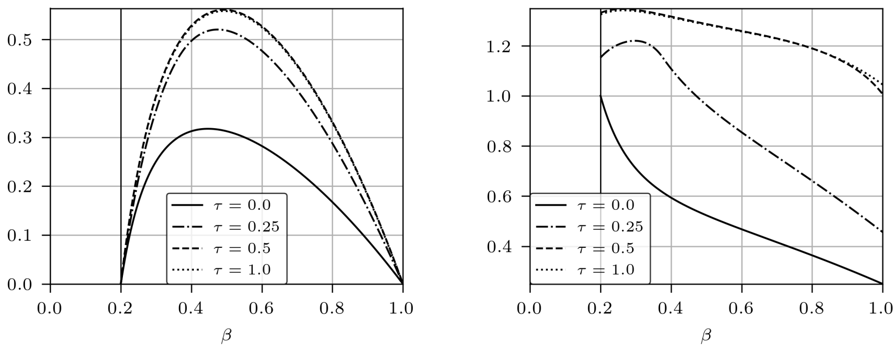


Рис. 2. Движение упругопластической границы в диске.



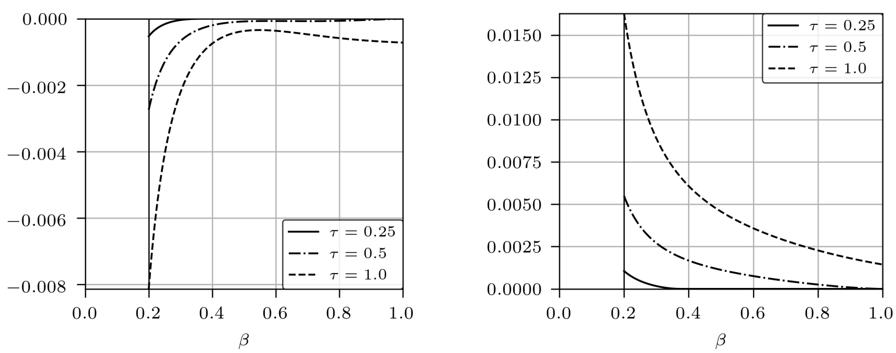
(a) (b)

Рис. 3. Перемещения в диске u (a) и напряжения по Мизесу $\bar{\Sigma}$ (b).



(a) (b)

Рис. 4. Напряжения в диске σ_{rr} (a) и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (b).



(a) (b)

Рис. 5. Пластические деформации в диске p_{rr} (a), $p_{\varphi\varphi}$ (b).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One, 2nd Edition, McGraw Hill, 1950. 572 p.

[2] Gamer U. Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // Journal of Applied Mechanics. 1983. № 3 (50). P. 676–678.

[3] Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // Ingenieur-Archiv. 1984. № 5 (54). P. 345–354.

[4] Gamer U. The Elastic-plastic stress distribution in the rotating annulus and in the annulus under external pressure // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. (64).

[5] Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Zeitschrift f?r angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1984. № 5 (35). P. 601–617.

[6] Güven U. Elastic-plastic stress distribution in the rotating annular disk with variable thickness // Archive of Applied Mechanics. 1991. № 8 (61). P. 548–554.

[7] Güven U. Elastic-plastic stresses in a rotating annular disk of variable thickness and variable density // International Journal of Mechanical Sciences. 1992. № 2 (34). P. 133–138.

[8] Güven U. Elastic-plastic annular disk with variable thickness subjected to external pressure // Acta Mechanica. 1992. № 1 (92). P. 29–34.

[9] Güven U. On the stresses in an elastic-plastic annular disk of variable thickness under external pressure // International Journal of Solids and Structures. 1993. № 5 (30). P. 651–658.

[10] Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // Mechanics of Structures and Machines. 1999. № 1 (27). P. 117–128.

[11] Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. № 4 (79). P. 281–288.

[12] Alexandrova N., Vila Real P.M.M. Deformation and Stress Analysis of an Anisotropic Rotating Annular Disk // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. 2008. № 1 (9). P. 43–50.

[13] Alexandrov S., Chung K., Jeong W. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular disks of pressure-dependent material // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2018. № 3 (46). P. 318–332.

[14] Alexandrov S.E., Lomakin E.V., Jeng Y.-R. Effect of the pressure dependency of the yield condition on the stress distribution in a rotating disk // Doklady Physics. 2010. № 12 (55). P. 606–608.

[15] Arya V.K. Analytical and finite element solutions of some problems using a viscoplastic model // Computers & Structures. 1989. № 4 (33). P. 957–967.

[16] Kollmann F.G. Viscoplastic deformation of rotating thin-walled disks // Nuclear Engineering and Design. 1989. № 3 (114). P. 405—413.

A. N. Prokudin

VISCOPLASTIC FLOW IN THE ROTATING DISK

Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia

Abstract. Elastoviscoplastic deforming of rotating thin disk under plane stress state is considered. Strains in the disk are assumed to be small and additively split up into elastic and viscplastic parts. Stresses are determined by elastic strains using Hooke's law. Generalized Mises criteria considering viscosity of material is used. System of differential equations is solved by finite difference method. Obtained results of numerical computations are illustrated by figures.

Keywords: viscocity, plasticity, rotating disk, finite difference method

REFERENCES

[1] Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume One, 2nd Edition, McGraw Hill, 1950. 572 p.

[2] Gamer U. Tresca's Yield Condition and the Rotating Disk // Journal of Applied Mechanics. 1983. № 3 (50). P. 676–678.

[3] Gamer U. Elastic-plastic deformation of the rotating solid disk // Ingenieur-Archiv. 1984. № 5 (54). P. 345–354.

[4] Gamer U. The Elastic-plastic stress distribution in the rotating annulus and in the annulus under external pressure // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1984. (64).

[5] Gamer U., Sayir M. Elastic-plastic stress distribution in a rotating solid shaft // Zeitschrift f?r angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 1984. № 5 (35). P. 601–617.

[6] Güven U. Elastic-plastic stress distribution in the rotating annular disk with variable thickness // Archive of Applied Mechanics. 1991. № 8 (61). P. 548–554.

[7] Güven U. Elastic-plastic stresses in a rotating annular disk of variable thickness and variable density // International Journal of Mechanical Sciences. 1992. № 2 (34). P. 133–138.

[8] Güven U. Elastic-plastic annular disk with variable thickness subjected to external pressure // Acta Mechanica. 1992. № 1 (92). P. 29–34.

[9] Güven U. On the stresses in an elastic-plastic annular disk of variable thickness under external pressure // International Journal of Solids and Structures. 1993. № 5 (30). P. 651–658.

[10] Güven U. Elastic-Plastic Rotating Disk with Rigid Inclusion // Mechanics of Structures and Machines. 1999. № 1 (27). P. 117–128.

[11] Rees D.W.A. Elastic-Plastic Stresses in Rotating Discs by von Mises and Tresca // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1999. № 4 (79). P. 281–288.

[12] Alexandrova N., Vila Real P.M.M. Deformation and Stress Analysis of an Anisotropic Rotating Annular Disk // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. 2008. № 1 (9). P. 43–50.

Prokudin Aleksandr Nikolaevich

`e-mail:` prokudin@imim.ru, Ph. D., Leading Researcher, Institute of Machinery and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.

[13] Alexandrov S., Chung K., Jeong W. Stress and strain fields in rotating elastic/plastic annular disks of pressure-dependent material // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2018. № 3 (46). P. 318–332.

[14] Alexandrov S.E., Lomakin E.V., Jeng Y.-R. Effect of the pressure dependency of the yield condition on the stress distribution in a rotating disk // Doklady Physics. 2010. № 12 (55). P. 606–608.

[15] Arya V.K. Analytical and finite element solutions of some problems using a viscoplastic model // Computers & Structures. 1989. № 4 (33). P. 957–967.

[16] Kollmann F.G. Viscoplastic deformation of rotating thin-walled disks // Nuclear Engineering and Design. 1989. № 3 (114). P. 405—413.