### М. Ю. Соколова, Д. В. Христич, В. В. Рудаков

# НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЛАСТИН ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

Аннотация. Рассмотрено упругое поведение ортотропной пластины, моделирующей ламинированный композит, при нагружении её в плоскости, образованной двумя осями анизотропии материала. Использованы определяющие соотношения, учитывающие нелинейную зависимость деформаций от напряжений. Получены зависимости компонент тензора деформаций от угла ориентации главных осей анизотропии в плоскости пластины. Проведено сравнение с известными решениями и экспериментальными данными.

**Ключевые слова**: нелинейные определяющие соотношения, анизотропные материалы, пластины, композиты

### УДК: 539.3

Структура большого числа естественных и искусственных материалов обладает элементами симметрии, которые во многом определяют их физические свойства. В настоящее время широкое распространение получили композиционные материалы, обладающие существенной анизотропией свойств. Для расчёта и проектирования конструкций из композитных материалов общепринятыми являются модели двух уровней: микроскопического и феноменологического. Модели первого типа содержат элементы структурного анализа и основаны на представлении материала в виде упорядоченно или случайно расположенных в изотропной среде армирующих элементов. Такие модели рассматривались в работах [2, 6, 8]. Модели второго типа основаны на замене гетерогенного материала условной однородной анизотропной средой, эффективные свойства которой определяются на основе теории осреднения процессов в периодических [1, 6, 7] и непериодических [3] средах. Именно такого типа модель положена в основу методики расчёта анизотропных оболочек вращения в книге [5].

<sup>©</sup> Соколова М. Ю., Христич Д. В., Рудаков В. В., 2018

Соколова Марина Юрьевна

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Христич Дмитрий Викторович

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Рудаков Вадим Вячеславович

e-mail: rudakov93@mail.ru, аспирант, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия.

Поступила 10.07.2018

В современной технике широко применяются элементы конструкций в виде пластин, которые изготавливаются из композиционных материалов путём укладки слоёв (волокон) под разными углами к границе пластины. Такие слои, как правило, имеют существенно различные упругие свойства во взаимно-перпендикулярных направлениях (вдоль волокон и поперёк волокон). Материал пластины, полученной из нескольких слоёв, оказывается анизотропным.

Рассмотрим квадратную ортотропную пластину, у которой одна ось анизотропии  $\mathbf{a}_3$  перпендикулярна плоскости, а две другие  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  образуют угол  $\varphi$  со сторонами пластины (рис. 1). Направим оси Ox, Oy декартовой системы координат вдоль сторон пластины и рассмотрим одноосное растяжение пластины, заданное тензором напряжений  $\mathbf{S} = t\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1$ .



Рис. 1. Ориентация главных осей анизотропии пластины

Для описания деформированного состояния используем тензор деформаций Коши– Грина  $\varepsilon$ . Тензору  $\varepsilon$  поставим в соответствие его векторный образ

$$\mathbf{e} = e_{\alpha} \mathbf{i}_{\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

в шестимерном декартовом пространстве с ортонормированным базисом  $\mathbf{i}_{\alpha}$ . При произвольном ортогональном преобразовании векторных образов в шестимерном пространстве (вращении или отражении) длина векторных образов тензоров деформаций не изменяется, то есть сохраняет своё значение квадратичный инвариант, определяемый свёрткой  $e^2 = \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ . Аналогично определяется вектор напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ , который является образом тензора напряжений **S**.

Для описания механического отклика пластины на приложенное напряжение используем определяющие соотношения нелинейной теории упругости в виде

$$\mathbf{e} = \left(\mathbf{c} + \sum_{\alpha=0}^{m-1} c_{\alpha} \left(\mathbf{i}_{\alpha} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \mathbf{i}_{\alpha} + \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}_{\alpha}\right) \mathbf{i}\right)\right) \cdot \boldsymbol{\sigma},\tag{1}$$

предложенные в работе [9]. В этих соотношениях в общем случае **е** — вектор деформаций в шестимерном пространстве,  $\boldsymbol{\sigma}$  — вектор напряжений в шестимерном пространстве, **с**,  $c_{\alpha}$  — константы материала, m — число линейных инвариантов для какого-либо материала, **i** — единичный тензор,  $\sigma_{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{i}_{\alpha}$  — линейные инварианты вектора напряжений,  $t_{(\gamma)}^2 = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Upsilon}_{\gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}$  — квадратичные инварианты вектора напряжений, которые определяются через базисные тензоры квадратичных инвариантных подпространств  $\Upsilon_{\gamma}$  [4],  $\sigma_{(\gamma)} = \sigma \cdot \Omega_{\gamma}$  — проекция вектора напряжений в собственное подпространство  $\Omega_{\gamma}$ . Для большинства материалов тензоры  $\Upsilon_{\gamma}$  совпадают с базисными тензорами неодномерных собственных подпространств  $\Omega_{\gamma}$ . Линейные и квадратичные инварианты вектора деформаций определяются аналогично.

При плоском напряжённом состоянии компоненты тензора S связаны с компонентами вектора напряжений  $\sigma$  соотношениями [4]

$$S_{11} = \sqrt{2}\sigma_2, \quad S_{22} = \sqrt{3}\sigma_0 - \sqrt{2}\sigma_2.$$
 (2)

Обратные соотношения имеют вид

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (S_{11} + S_{22}), \quad \sigma_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}} (S_{11} + S_{22}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_0,$$
  
$$\sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (S_{11} - S_{22}), \quad \sigma_3 = \sqrt{2} S_{12}.$$
 (3)

Компоненты тензора $\boldsymbol{\varepsilon}$ связаны с компонентами вектора деформаций <br/>е соотношениями

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}}e_0 - \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{\sqrt{3}}e_0 - \frac{1}{\sqrt{6}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}e_2,$$
$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{\sqrt{3}}e_0 + \sqrt{\frac{2}{3}}e_1, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}e_3. \tag{4}$$

В соотношениях (2)–(4) компоненты тензоров  $S_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  отнесены к главным осям анизотропии материала.

Ортотропный материал имеет три линейных инварианта

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})$$

и три квадратичных инварианта [4]

$$s_{(1)}^2 = e_3^2, \quad s_{(2)}^2 = e_4^2, \quad s_{(3)}^2 = e_5^2$$

или

$$s_{(1)}^2 = \varepsilon_{12}^2, \quad s_{(2)}^2 = \varepsilon_{23}^2, \quad s_{(3)}^2 = \varepsilon_{31}^2.$$

Тензор упругих постоянных с для ортотропного материала имеет вид [4]

$$\mathbf{c} = c_{00}\mathbf{i}_{00} + 2c_{01}\mathbf{i}_{01} + 2c_{02}\mathbf{i}_{02} + c_{11}\mathbf{i}_{11} + 2c_{12}\mathbf{i}_{12} + c_{22}\mathbf{i}_{22} + c_{33}\mathbf{i}_{33} + c_{44}\mathbf{i}_{44} + c_{55}\mathbf{i}_{55}$$

где  $\mathbf{i}_{\alpha\beta}$  — базисные тензоры второго ранга в шестимерном пространстве. В связи с этим определяющие соотношения (1) для ортотропного материала принимают форму

$$\mathbf{e} = (c_{00}\sigma_0 + c_{01}\sigma_1 + c_{02}\sigma_2 + c_0(\sigma^2 + 2\sigma_0^2) + 2c_1\sigma_1\sigma_0 + 2c_2\sigma_2\sigma_0)\mathbf{i}_0 + + (c_{01}\sigma_0 + c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 + c_1(\sigma^2 + 2\sigma_1^2) + 2c_0\sigma_0\sigma_1 + 2c_2\sigma_2\sigma_1)\mathbf{i}_1 + + (c_{02}\sigma_0 + c_{12}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2 + c_2(\sigma^2 + 2\sigma_2^2) + 2c_0\sigma_0\sigma_2 + 2c_1\sigma_1\sigma_2)\mathbf{i}_2 + c_{33}\sigma_3\mathbf{i}_3,$$

где  $\sigma^2 = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ . Учитывая соотношения (3), преобразуем выражение  $\sigma^2 = \frac{3}{2}\sigma_0^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2$ . Тогда компоненты вектора деформаций примут вид

$$e_{0} = c_{00}\sigma_{0} + c_{01}\sigma_{1} + c_{02}\sigma_{2} + c_{0}\left(\frac{7}{2}\sigma_{0}^{2} + \sigma_{2}^{2} + \sigma_{3}^{2}\right) - \sqrt{2}c_{1}\sigma_{0}^{2} + 2c_{2}\sigma_{0}\sigma_{2},$$

$$e_{1} = c_{01}\sigma_{0} + c_{11}\sigma_{1} + c_{12}\sigma_{2} - \sqrt{2}c_{0}\sigma_{0}^{2} + c_{1}\left(\frac{5}{2}\sigma_{0}^{2} + \sigma_{2}^{2} + \sigma_{3}^{2}\right) - \sqrt{2}c_{2}\sigma_{0}\sigma_{2},$$
(5)

 $e_2 = c_{02}\sigma_0 + c_{12}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2 + 2c_0\sigma_0\sigma_2 - \sqrt{2}c_1\sigma_0\sigma_2 + c_2\left(\frac{3}{2}\sigma_0^2 + 3\sigma_2^2 + \sigma_3^2\right), \quad e_3 = c_{33}\sigma_3.$ 

Используя выражения (2)-(4), запишем связь между компонентами тензора деформаций и компонентами тензора напряжений в главных осях анизотропии  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ :

$$\varepsilon_{11} = A_{11}S_{11} + A_{12}S_{22} + \alpha_1 \left(3S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2\right) + 2\alpha_2 S_{11}S_{22},$$
  

$$\varepsilon_{22} = A_{12}S_{11} + A_{22}S_{22} + \alpha_2 \left(S_{11}^2 + 3S_{22}^2 + 2S_{12}^2\right) + 2\alpha_1 S_{11}S_{22},$$
  

$$\varepsilon_{33} = A_{13}S_{11} + A_{23}S_{22} + \alpha_3 \left(S_{11}^2 + S_{22}^2 + 2S_{12}^2\right), \quad \varepsilon_{12} = c_{33}S_{12},$$
  
(6)

где

$$A_{11} = \frac{1}{3}c_{00} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_{01} + \frac{2}{\sqrt{6}}c_{02} + \frac{1}{6}c_{11} - \frac{1}{\sqrt{3}}c_{12} + \frac{1}{2}c_{22},$$

$$A_{12} = \frac{1}{3}c_{00} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_{01} + \frac{1}{6}c_{11} - \frac{1}{2}c_{22},$$

$$A_{22} = \frac{1}{3}c_{00} - \frac{\sqrt{2}}{3}c_{01} - \frac{2}{\sqrt{6}}c_{02} + \frac{1}{6}c_{11} + \frac{1}{\sqrt{3}}c_{12} + \frac{1}{2}c_{22},$$

$$\alpha_{1} = \frac{c_{0}}{\sqrt{3}} - \frac{c_{1}}{\sqrt{6}} + \frac{c_{2}}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{2} = \frac{c_{0}}{\sqrt{3}} - \frac{c_{1}}{\sqrt{6}} - \frac{c_{2}}{\sqrt{2}}, \quad \alpha_{3} = \frac{c_{0} + \sqrt{2}c_{1}}{\sqrt{3}}.$$

Связь между деформациями и напряжениями (6) записана в главных осях анизотропии  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$ .

Для определения компонент тензора деформаций в декартовой системе координат Oxy необходимо выполнить переход от базиса главных осей анизотропии  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  к базису  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$ . Компоненты тензора напряжений в базисе  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$ ,  $\mathbf{a}_3$  имеют вид

$$S_{11} = t\cos^2\varphi, \quad S_{22} = t\sin^2\varphi, \quad S_{12} = \frac{1}{2}t\sin 2\varphi.$$
 (7)

Компоненты тензора деформаций в базисе  $\mathbf{e}_1, \, \mathbf{e}_2, \, \mathbf{e}_3$  имеют вид

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{11} \cos^2 \varphi + \varepsilon_{12} \sin 2\varphi + \varepsilon_{22} \sin^2 \varphi,$$
  

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{11} \sin^2 \varphi - \varepsilon_{12} \sin 2\varphi + \varepsilon_{22} \cos^2 \varphi,$$
  

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin 2\varphi.$$
(8)

Зависимость деформаций пластины от величины приложенных напряжений t и угла  $\varphi$  ориентации главных осей анизотропии материала относительно сторон пластины определяется формулами (8), (6), (7).

На рисунках 2, 3 приведены графики зависимостей напряжения t от продольных  $\varepsilon_{xx}$  и поперечных  $\varepsilon_{uu}$  деформаций пластины при различных значениях угла  $\varphi$ .



Рис. 2. Зависимости напряжений от продольных ( $\varepsilon_{xx}$ ) и поперечных ( $\varepsilon_{yy}$ ) деформаций при растяжении: а)  $\varphi = 0$ ; б)  $\varphi = \frac{\pi}{8}$ ; в)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 



Рис. 3. Зависимости напряжений от продольных ( $\varepsilon_{xx}$ ) и поперечных ( $\varepsilon_{yy}$ ) деформаций при сжатии: а)  $\varphi = 0$ ; б)  $\varphi = \frac{\pi}{8}$ ; в)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 

Графики на рисунках 2, 3 показывают, что использование определяющих соотношений в виде (1) позволяет описать нелинейную зависимость напряжений от деформаций в анизотропном материале, а также зависимость напряжённо-деформированного состояния от ориентации приложенной нагрузки относительно направлений главных осей анизотропии материала.

В статье [10] приведены экспериментальные и теоретические кривые зависимостей напряжений от продольных и поперечных деформаций образца из ламинированного композита при растяжении и сжатии под различными углами к волокнам. Рассмотренная в настоящей работе модель (1) может быть использована для описания поведения материала при одноосном нагружении, поэтому такие экспериментальные данные можно использовать для идентификации параметров модели  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ , отвечающих за описание нелинейно-упругого поведения анизотропного материала. Анализ результатов, приведённых на рисунке 2, позволяет отметить, что полученные кривые качественно описывают известные экспериментальные данные при различных углах ориентации осей анизотропии. Модель, предложенная в работе [10] и основанная на использовании нелинейных соотношений для сдвигов, не описывает нелинейный характер зависимости напряжений от продольных и поперечных деформаций при растяжении (сжатии) вдоль осей анизотропии.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.

[2] Букетов А. В., Шоркин В. С. Определение и изменение механических свойств композитных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. 2010. № 5. С. 25-26.

[3] Горбачёв В. И. Осреднение линейных задач механики композитов при непериодической неоднородности // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2001. № 1. С. 31-37.

[4] Маркин А. А., Соколова М. Ю. Термомеханика упругопластического деформирования. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. 320 с.

[5] Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.

[6] Победря Б. Е. Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

[7] Победря Б. Е. Сложное нагружение слоистых композитов // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2001. № 1. С. 21-30.

[8] Победря Б. Е. Эволюционная деструкция в механике композитов // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 1997. № 2. С. 27-31.

[9] Христич Д. В. Идентификация анизотропных материалов и моделирование процессов конечного деформирования гипоупругих тел: дис. ... докт. физ.-мат. наук. Тула, 2014. 252 с.

[10] Lomakin E. V., Fedulov B. N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50. No. 6. P. 1527-1535.

M. Yu. Sokolova, D. V. Khristich, V. V. Rudakov

### A NONLINEAR MODEL OF PLATES MADE OF COMPOSITE MATERIALS

Tula State University, Tula, Russia

**Abstract.** An elastic behavior of an orthotropic plate, which simulates a laminated composite, at loading in its plane, formed by two axes of anisotropy of the material, is considered. Constitutive relations, taking into account nonlinear strain-stress dependence, are used. Strain components dependences on the angle of orientation of main anisotropy axes in the plane of the plate are obtained. The comparison of received solution and both known ones and experimental data is carried out.

Keywords: nonlinear constitutive relations, anisotropic materials, plates, composites.

### REFERENCES

[1] Bakhvalov N. S., Panasenko G. P. Averaging of processes in periodical media. Moscow: Nauka, 1984. 352 p. (in Russian)

[2] Buketov A. V., Shorkin V. S. Determination and change of mechanical properties of composite materials // Fundamental and applied problems of technics and techology. 2010. N. 5. P. 25-26. (in Russian)

[3] Gorbachyov V. I. Averaging of linear problems of mechanics at non-periodic inhomogeneity // Mechanics of Solids. 2001. N. 1. P. 31-37. (in Russian)

[4] Markin A. A., Sokolova M. Yu. Thermomechanics of Elastoplastic Deformation. Cambridge International Science Publishing, 2015. 325 p.

[5] Obraztsov I. F., Vasil'ev V. V., Bunakov V. A. Optimal reinforcement of shells of revolution made of composite materials. Moscow: Mashinostroenie, 1977. 144 p. (in Russian)

[6] Pobedrya B. E. Mechanics of composite materials. Moscow: MSU publ., 1984. 336 p. (in Russian)

[7] Pobedrya B. E. Complicated loading of layered composites // Mechanics of Solids. 2001. N. 1. P. 21-30. (in Russian)

[8] Pobedrya B. E. Evolutionary destruction in mechanics of composites // Mechanics of Solids. 1997. N. 2. P. 27-31. (in Russian)

[9] Khristich D. V. Identification of anisotropic materials and modelling of processes of finite deforming of hypoelastic bodies: dis. ... doct. fiz.-mat. nauk. Tula, 2014. 252 p. (in Russian)

[10] Lomakin E. V., Fedulov B. N. Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites // Meccanica. 2015. Vol. 50. No. 6. P. 1527-1535.

Sokolova Marina Yur'evna

e-mail: m.u.sokolova@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Khristich Dmitrii Viktorovich

e-mail: dmitrykhristich@rambler.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Tula State University, Tula, Russia.

Rudakov Vadim Vyacheslavovich

e-mail: rudakov93@mail.ru, Postgraduate Student, Tula State University, Tula, Russia.