

М. Каинг<sup>1</sup>, С. А. Кузнецов<sup>2</sup>, А. В. Ткачева<sup>3</sup>

## ОБ ЭВОЛЮЦИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ЗАПРЕССОВАНИЯ ДИСКА В РАЗОГРЕТУЮ КРУГЛУЮ ПЛАСТИНУ

<sup>1</sup> Комсомольский-на-Амуре государственный университет, г. Комсомольск-на-Амуре,  
Россия

<sup>2</sup> ООО Торэкс – Хабаровск, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

<sup>3</sup> Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия

**Аннотация.** С помощью теории температурных напряжений моделируется процесс горячей посадки круглой пластины в кольцо. При этом материал кольца не равномерно разогрет и имеет на момент посадки, накопленные необратимые деформации. Из-за высокой температуры нагрева локальной области кольца учитываются зависимости предела текучести и упругих модулей от температуры.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, неустановившиеся температурные напряжения, кусочно-линейные пластические потенциалы, остаточные напряжения.

УДК: 539.374+ 539.224

**Введение.** Исследованию процесса горячей посадки посвящено большое количество работ [1-7]. В них описываются процессы, происходящие в материале сборки как обратимые, так и необратимые. Во всех расчетах охватываемая деталь цилиндрической формы (труба, кольцо) разогрета равномерно и не имеет необратимых деформаций на момент посадки. Но в современной практике часто используется индукционный разогрев охватываемой детали. Это диктуется требованиями технологичности операции сборки горячей посадкой. С помощью индукционных переносных устройств, помещаемых вовнутрь охватываемой детали, материал прогревается неравномерно

---

© Каинг М., Кузнецов С. А., Ткачева А. В., 2018

*Каинг Муат*

e-mail: mail@imim.ru, аспирант, Комсомольский – на – Амуре государственный университет, г. Комсомольск – на – Амуре, Россия.

*Кузнецов Сергей Алексеевич*

e-mail: mail@imim.ru, доктор физико-математических генеральный директор ООО "Торэкс – Хабаровск г. Комсомольск – на – Амуре, Россия.

*Ткачева Анастасия Валерьевна*

e-mail: 4nansi4@mail.ru, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск – на – Амуре, Россия.

Поступила 01.08.2018

Работа выполнена в рамках государственного задания № 007-00285-18-00

с достаточно высокой температурой на такой поверхности детали. В данной работе с использованием теории температурных напряжений [8, 9] и теории пластического течения [10, 11] исследуется процесс горячей посадки пластины в кольцо, при этом материал кольца в момент посадки считается неравномерно разогретым и имеет накопленные в процессе разогрева необратимые деформации.

**Исходные зависимости.** Деформации  $e_{ij}$  полагаются малыми и складывающимися из обратимой  $e_{ij}^e$  и необратимой (пластической) составляющих  $e_{ij}^p$ :

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p \quad (1)$$

Упругие деформации вместе с температурой  $T$  задают напряжения  $\sigma_{ij}$  в материале

$$\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk}^e - 3\alpha K (T - T_0)) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}^e \quad (2)$$

В (2)  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$  – упругие модули материала тела,  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения,  $T_0$  – начальная (комнатная) температура, при которой осуществляется свободное состояние. Пластические деформации растут в условиях соответствия напряженных состояний поверхности  $f(\sigma_{ij}, k) = 0$  нагружения в пространстве напряжений. В условиях принимаемого принципа максимума Мизеса [17] уравнение поверхности нагружения является пластическим потенциалом, поэтому следует ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{de_{ij}^p}{dt} = \phi \frac{\partial f(\sigma_{ij}, k)}{\partial \sigma_{ij}}; \quad \phi > 0 \quad (3)$$

В качестве поверхности нагружения здесь принимаем поверхность наклонной призмы Ивлева в пространстве главных напряжений

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = \frac{4}{3}k, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4)$$

Предел текучести  $k$  в (3) и (4) считаем зависимым от температуры

$$k = k_0 \tau(t)^2, \quad \tau(t) = (T_p - T)(T_p - T_0)^{-1}. \quad (5)$$

В (5)  $k_0$  – предел текучести при температуре  $T_0$ ,  $T_p$  – температура плавления материала.

Отличие от классического случая температурных напряжений, описываемого зависимостями (2), когда в них  $\lambda$ ,  $\mu$  постоянные величины, свяжем с зависимостью последних от температуры [2]. Такие зависимости принимаем в их простейшем виде:

$$\begin{aligned} E(t) &= E_p - (E_p - E_0) \tau(t), \\ v(t) &= 0.5 - (0.5 - v_0) \tau(t), \\ \lambda &= vE(1+v)^{-1}(1-2v)^{-1}, \quad \mu = 0.5E(1+v)^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Замыкает эту систему единственное уравнение равновесия

$$\sigma_{r,r} + r^{-1}(\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0 \quad (7)$$

**Постановка задачи.** К внутренней границе кольца с размерами  $R \leq r \leq R_2$  подводится источник тепла, который, нагревая материал кольца, увеличивает его внутренний радиус до  $r = R_1$ , при этом температура на внутреннем радиусе достигает  $T = 0.85T_p$  ( $T_p$  температура плавления материала). Процесс нагрева задается уравнением теплопроводности

$$T_{,t} = a(T_{,rr} + r^{-1}T_{,r}) - \chi(T - T_0) \quad (8)$$

с краевыми и начальными условиями

$$\begin{aligned} T_{,t}|_{r=R_1} &= q, \\ \psi_1 T_{,r}|_{r=R_2} &= \chi (T - T_0), \\ T|_{t=0} &= T_0. \end{aligned} \quad (9)$$

В (8) и (9)  $a$  – коэффициент температуропроводности,  $q$  – скорость подвода тепла,  $\psi_1$  – коэффициент теплопроводности материала кольца,  $\chi$  – коэффициент теплоотдачи от поверхности кольца в окружающую среду. Равенство  $R = R_1$  достигается в некоторый момент времени  $t = t_*$ , являющийся моментом посадки кольца на круглую пластину, которая находится при температуре  $T_0$ . Краевыми условиями для последующего процесса теплопроводности будут

$$\begin{aligned} T^{(1)}|_{r=R_1} &= T^{(2)}|_{r=R_1}, \\ \psi_2 T_{,r}^{(2)}|_{r=R_1} &= \psi_1 T_{,r}^{(1)}|_{r=R_1}, \\ \psi_1 T_{,r}^{(1)}|_{r=R_2} &= \chi (T_0 - T), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $T^{(1)}$  и  $T^{(2)}$  температура кольца и пластины соответственно,  $\psi_1$  – коэффициент теплопроводности материала пластины. Распределение температуры по сборке определяется численно без дополнительных трудностей в любой момент времени решением уравнения (8) с условиями (9) (до момента посадки) или (10) (после момента посадки). Далее считаем его известным (найденным). В предлагаемом алгоритме расчетов распределение температуры приходится вычислять на каждом последовательном временном шаге расчетов.

До начала нагрева предполагаем, что материал кольца не имеет необратимых деформаций и деформируется упруго. С ростом температуры растут и напряжения с деформациями, связь которых описывается законом Дюамеля – Неймана:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu (\lambda + \mu) u_{r,r} + 2\lambda\mu r^{-1} u_r - 6\mu K\theta) (\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu u_{r,r} + 4\mu (\lambda + \mu) r^{-1} u_r - 6\mu K\theta) (\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя (11) в уравнение равновесия (7), получаем дифференциальное уравнение относительно перемещений  $u_r$

$$\xi u_{r,rr} + \varsigma u_{r,r} + \omega u_r + \beta = 0, \quad (12)$$

где  $\xi$ ,  $\varsigma$ ,  $\omega$ ,  $\beta$  некоторые функции от температуры и радиуса. В случае зависимости упругих модулей от температуры (6) они запишутся в виде

$$\begin{aligned} \xi &= 4\mu (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \varsigma &= 4 (\mu^2 \lambda_{,r} + \mu_{,r} (\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2)) (\lambda + 2\mu)^{-2} + 4\mu (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)^{-1} r^{-1}, \\ \omega &= 2 (2\mu^2 \lambda_{,r} + \lambda^2 \mu_{,r}) (\lambda + 2\mu)^{-2} r^{-1} - 4\mu (\lambda + \mu) (\lambda + 2\mu)^{-1} r^{-2}, \\ \beta &= -\theta (8\mu^2 \lambda_{,r} + 2 (3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2) \mu_{,r}) (\lambda + 2\mu)^{-2} - 6K\mu\theta_{,r} (\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

И тогда уравнение равновесия (12) можно решить на каждом временном шаге только численно, к примеру, разностным методом, используя граничные условия, моделирующие свободную границу на  $r = R$  и  $r = R_2$

$$\sigma_r|_{r=R} = 0, \quad \sigma_r|_{r=R_2} = 0. \quad (14)$$

В момент времени  $t = t_1$  в материале кольца на свободной поверхности  $r = R$  начинает выполняться условие пластического течения Ишлинского-Ивлева

$2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$  (рис. 1 б)). Здесь образуется продвигающаяся упругопластическая граница  $r = n_1(t)$ , которая разделит материал кольца на две области обратимо и пластически деформируемые. В области обратимого деформирования, как и прежде, напряжения и перемещения находятся из решения дифференциального уравнения равновесия (12) (13).

В области пластического течения  $R \leq r \leq n_1(t)$  развиваются необратимые деформации  $e_r^p, e_\varphi^p, e_z^p$ , которые связаны между собой следствием, вытекающим из ассоциированного закона пластического течения:

$$e_r^p = e_z^p = -0.5e_\varphi^p \quad (15)$$

Закон Дюамеля – Неймана принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - e_r^p) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - e_r^p) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - e_\varphi^p) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из выполняемого условия пластического течения и (15) и (16) находим необратимую деформацию

$$e_r^p = (u_{r,r}\mu + 1.5K\alpha\mu^{-1}(\lambda + 2\mu)k - 0.5r^{-1}u_r(3\lambda + 4\mu))(3\lambda + 5\mu)^{-1} \quad (17)$$

Подставляя (16) с учетом (17) в уравнение равновесия (7), получаем дифференциальное уравнение (12) с коэффициентами:

$$\begin{aligned} \xi &= 12\mu K(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \varsigma &= (4(9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 10\mu^2)\mu_{,r} + 9\mu^2\lambda_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + 12\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \omega &= ((18\lambda^2 + 24\lambda\mu + 20\mu^2)\mu_{,r} + 18\mu^2\lambda_{,r})r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-2} - \\ &\quad - 3\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \beta &= (\theta(18(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}) - 3K r^{-1}) + 12k(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}))(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + (4\mu k_{,r} - 6K\alpha''_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-1} + 6(\lambda + 2\mu)kr^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Перемещения, напряжения и деформации в условиях зависимости упругих модулей от температуры (6) на каждой временной итерации после начала необратимого деформирования определяются из численного решения уравнения равновесия (11), (17) и граничными условиями (13). В ходе решения равенство радиальных напряжений в материале кольца на упругопластической границе  $r = n_1(t)$  выполняется без дополнительных условий.

На рис. 2 изображены распределения напряжений в материале алюминиевой пластины, обладающей следующими характеристиками:  $a = 77,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $\lambda = 40,384 \text{ ГПа}$ ,  $\mu = 26,92 \text{ ГПа}$ ,  $\alpha = 23,4 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ ,  $k_0 = 210 \text{ МПа}$ ,  $T_p = 660^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ .

После отвода источника тепла на свободной границе образуется разгружающая упругопластическая граница  $r = n_2(t)$  (рис. 1 в)). Она довольно быстро достигает границы  $r = n_1(t)$ . В области разгрузки  $R_1 \leq r \leq n_2(t)$  присутствуют накопившиеся необратимые деформации  $p_r, p_\varphi, p_z$ . Закон Дюамеля – Неймана (10) принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - p_\varphi) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - p_r) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Это приводит к изменению коэффициентов (12) в уравнении равновесия (11). Они принимают вид:



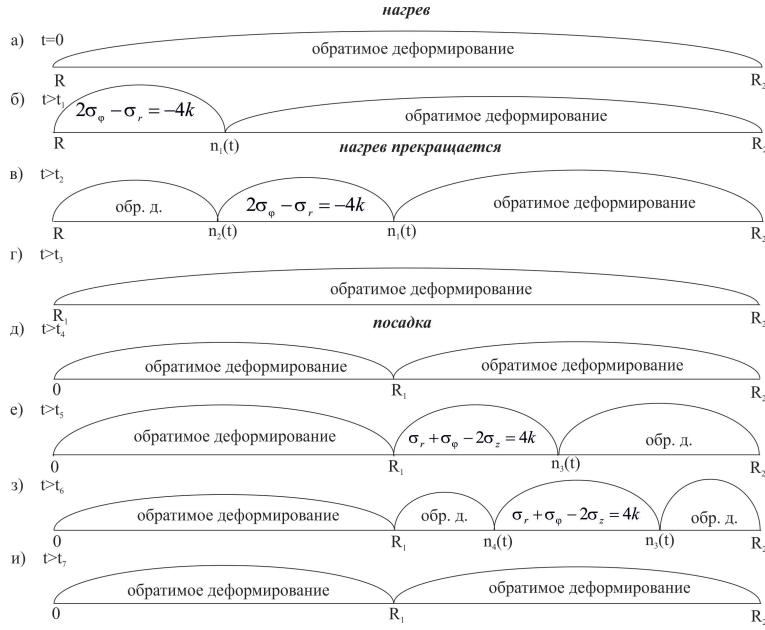


Рис. 1. Схема деформирования материала сборки

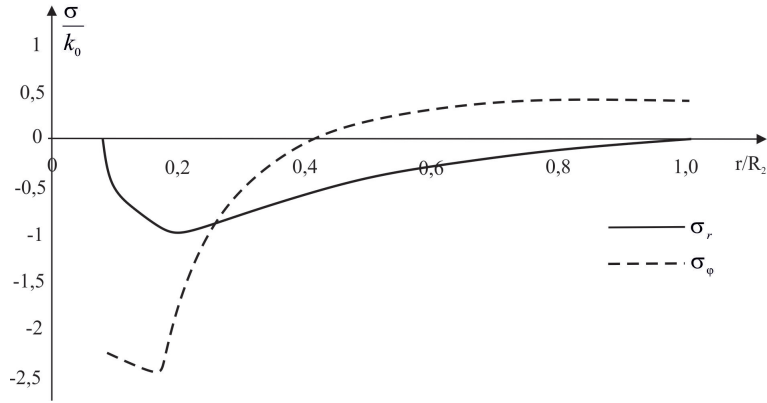


Рис. 2. Распределение напряжений в материале кольца до момента посадки

$$\begin{aligned}
 \xi &= 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\
 \varsigma &= 4(\mu^2\lambda_{,r} + \mu_{,r}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2))(\lambda + 2\mu)^{-2} + 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-1}, \\
 \omega &= 2(2\mu^2\lambda_{,r} + \lambda^2\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2}r^{-1} - 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}r^{-2}, \\
 \beta &= -\theta(8\mu^2\lambda_{,r} + 2(3\lambda^2 + 4\lambda\mu + 4\mu^2)\mu_{,r})(\lambda + 2\mu)^{-2} - 6K\mu\theta_{,r}(\lambda + 2\mu)^{-1} + \\
 &\quad + (4(-\lambda_{,r}\mu^2 - \mu_{,r}(\lambda^2 + 2\lambda\mu + 2\mu^2))(\lambda + 2\mu)^{-2} - 2r^{-1}\mu)p_r + \\
 &\quad + 2(r^{-1}\mu - (2\lambda_{,r}\mu^2 + \mu_{,r}\lambda^2)(\lambda + 2\mu)^{-2})p_\varphi - \\
 &\quad - 4\mu(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)^{-1}p_{r,r} - 2\lambda\mu(\lambda + 2\mu)^{-1}p_{\varphi,r}.
 \end{aligned} \tag{20}$$

**Посадка.** В момент  $t = t_4$  посадки (рис. 1 д)) внутренний радиус кольца равняется внешнему радиусу круглой пластины  $R_1 = R$ . Материал обоих деформируется обратимо. Перемещения находятся из решения уравнения равновесия (19), при этом следует задать граничное условие равенства радиальных напряжений на границе контакта  $r = R_1(t)$ . Численно решается уравнение равновесия в области разгрузки (19) и в области обратимого деформирования (12).

Делая шаги по времени, замечаем, что в момент времени  $t = t_5$ , в материале кольца вновь теперь уже на границе сопряжения выполняется условие пластического течения Ишлинского-Ивлева  $2\sigma_\varphi - \sigma_r = 4k$ . Здесь образуется упругопластическая граница  $r = n_3(t)$  (рис. 1 е)), которая продвигается по материалу кольца. В области пластического течения  $R_1 \leq r \leq n_3(t)$  присутствуют ранее накопленные необратимые деформации  $p_r, p_\varphi, p_z$ . От их значений будут развиваться новые необратимые деформации  $e_r^p, e_\varphi^p, e_z^p$ . В результате вышесказанного следует переписать соотношения (18)

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (4\mu(\lambda + \mu)(u_{r,r} - p_r - e_r^p) + 2\lambda\mu(r^{-1}u_r - p_\varphi - e_\varphi^p) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\ \sigma_\varphi &= (2\lambda\mu(u_{r,r} - p_r - e_r^p) + 4\mu(\lambda + \mu)(r^{-1}u_r - p_\varphi - e_\varphi^p) - 6\mu K\theta)(\lambda + 2\mu)^{-1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Необратимые деформации находятся из выполняемого условия пластического течения и следствия (14)

$$e_r^p = (u_{r,r}\mu + 1.5K\alpha\mu^{-1}(\lambda + 2\mu)k - 0.5r^{-1}u_r(3\lambda + 4\mu))(3\lambda + 5\mu)^{-1} - p_r \quad (22)$$

Уравнение равновесия (7) с учетом (20) и (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \xi &= 12\mu K(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \varsigma &= (4(9\lambda^2 + 12\lambda\mu + 10\mu^2)\mu_{,r} + 9\mu^2\lambda_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + 12\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \omega &= ((18\lambda^2 + 24\lambda\mu + 20\mu^2)\mu_{,r} + 18\mu^2\lambda_{,r})r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-2} - \\ &\quad - 3\mu K r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1}, \\ \beta &= (\theta(18(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}) - 3K r^{-1}) + 12k(\lambda\mu_{,r} - \mu\lambda_{,r}))(3\lambda + 5\mu)^{-2} + \\ &\quad + (-4\mu k_{,r} - 6K\alpha_{,r})(3\lambda + 5\mu)^{-1} - 6(\lambda + 2\mu)k r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1} - \\ &\quad - ((36\lambda_{,r}\mu^2 + \mu_{,r}(36\lambda^2 + 48\lambda\mu + 40\mu^2))(3\lambda + 5\mu)^{-2})p_r - \\ &\quad - (6K r^{-1}\mu(3\lambda + 5\mu)^{-1})p_r - \\ &\quad - (3K\mu r^{-1}(3\lambda + 5\mu)^{-1})p_\varphi - \\ &\quad - ((\lambda_{,r}\mu^2 + \mu_{,r}(18\lambda^2 + 24\lambda\mu + 20\mu^2))(3\lambda + 5\mu)^{-2})p_\varphi - \\ &\quad - 12\mu K(3\lambda + 5\mu)^{-1}p_{r,r} - \mu(3\lambda + 5\mu)^{-1}p_{\varphi,r}. \end{aligned} \quad (23)$$

Напряжения и необратимые деформации находим, подставляя решение (23), полученное численно в соотношения (21) и (22).

В результате распределения температуры и последующего остывания рост необратимых деформаций замедляется, и на границе контакта образуется разгружающая упругопластическая граница  $r = n_4(t)$  (рис. 1 з)), которая продвигаясь по материалу кольца, достигает в момент  $t = t_7$  (рис. 1 и)) времени границу  $r = n_3(t)$ . Теперь материал сборки деформируется обратимо.

**Остаточные напряжения.** Когда температура во всем материале сборки станет равной комнатной, напряжения, перемещения и деформации далее со временем

меняться не будут, поэтому их называют остаточными. Уровень и распределение остаточных напряжений зависит от наличия необратимых деформаций в материале сборки и от начального распределения температуры во внешнем кольце. Как и необратимые деформации распределены в материале сборки, в нашем случае и начальная температура имеет свое распределение в материале кольца ( $\theta(r) \neq 0$ ). В материале круглой пластины нет необратимых деформаций и  $\theta = 0$ . Что касается упругих модулей и предела текучести они принимают свои максимальные значения во всем материале и не изменяются по радиусу. Учитывая вышесказанное, подставив соотношения (11) в уравнение равновесия (7) найдем дифференциальное уравнение относительно перемещения.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) = \\ & = 1.5K (\lambda + \mu)^{-1} \theta_{,r} - 0.5 (\lambda + 2\mu) (r (\lambda + \mu))^{-1} (p_\varphi - p_r) - \\ & \quad - p_{r,r} - 0.5\lambda (\lambda + \mu)^{-1} p_{\varphi,r} \end{aligned} \quad (24)$$

Интегрируя (23) получаем соотношения для перемещений в материале пластины

$$u_r^{(1)} = 0.5rC_1^{(1)}(t) + r^{-1}C_2^{(1)}(t), \quad C_2 = 0 \quad (25)$$

и в материале кольца

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} = & 0.25 (\lambda + \mu)^{-1} \left( (\lambda + 2\mu) r \int_0^r \rho^{-1} (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho \right) + \\ & + 0.25 (\lambda + \mu)^{-1} \left( 3Kr^{-1} \int_0^r \rho (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho \right) + \\ & 1.5K (\lambda + \mu)^{-1} \alpha (T_0 - T(r)) + 0.5rC_1^{(2)} + r^{-1}C_2^{(2)} \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя найденные перемещения в соотношения (11) запишем остаточные напряжения для пластины

$$\sigma_r^{(1)}(r) = 3\mu K w^{-1} C_1^{(1)}, \quad \sigma_\varphi^{(1)}(r) = 3\mu K w^{-1} C_1^{(1)} \quad (27)$$

для кольца

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(2)} = & 1.5K\mu (\lambda + \mu)^{-1} \left( \int_0^r \rho^{-1} (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho \right) - \\ & - 1.5K\mu (\lambda + \mu)^{-1} \left( r^{-2} \int_0^r \rho (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho \right) - \\ & - 3\mu K (\lambda + \mu)^{-1} r^{-2} \int_0^r \rho \theta(\rho) d\rho + 3\mu K w^{-1} C_1^{(2)} - 2\mu r^{-2} C_2^{(2)}, \\ \sigma_\varphi^{(2)} = & 1.5K\mu (\lambda + \mu)^{-1} \int_0^r \rho^{-1} (p_r(\rho) - p_\varphi(\rho)) d\rho + \\ & + 1.5K\mu (\lambda + \mu)^{-1} r^{-2} \int_0^r \rho (p_r(\rho) + p_\varphi(\rho)) d\rho - \\ & - 3K\mu (\lambda + \mu)^{-1} p_\varphi + 3\mu K (\lambda + \mu)^{-1} r^{-2} \int_0^r \rho \theta(\rho) d\rho + \\ & + 3\mu K w^{-1} C_1^{(2)} + 2\mu r^{-2} C_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (28)$$

В (24) – (27)  $C_1^{(1)}$ ,  $C_2^{(1)}$ ,  $C_1^{(2)}$ ,  $C_2^{(2)}$  – коэффициенты интегрирования находятся из граничных условий:

$$u_r^{(1)} \Big|_{r=0} = 0, \quad \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R_2} = 0,$$

$$\sigma_r^{(1)} \Big|_{r=R_1} = \sigma_r^{(2)} \Big|_{r=R_1}, \quad u_r^{(1)} \Big|_{r=R_1} = u_r^{(2)} \Big|_{r=R_1}.$$

На рис. 3 показано распределение остаточных напряжений в материале сборки. Характеристики материала круглой пластины соответствуют характеристикам вышеописанного материала кольца.

Если предположить, что упругие модули достигают при высокой температуре значения, которое далее не изменяется, таким образом смоделировать фазовые переходы

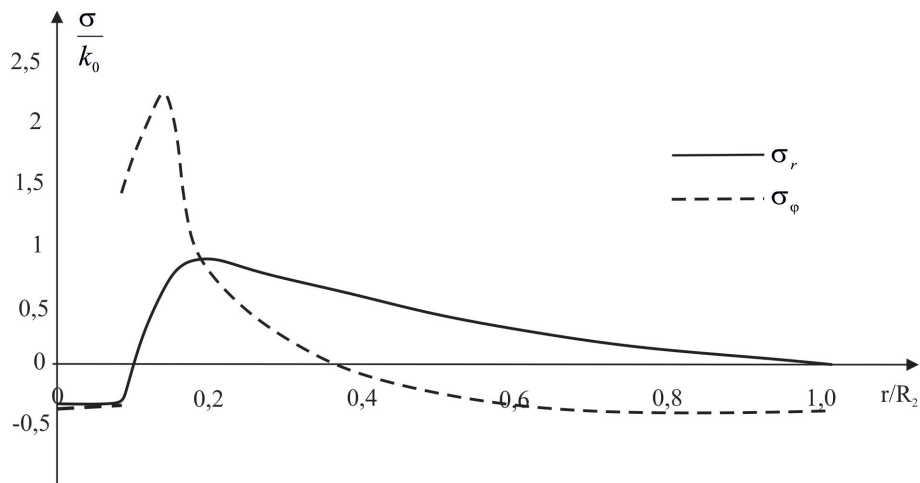


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений в материале сборки

материала сборки, то распределение остаточных напряжений будет другим. Оно приведено на рис. 4. Если сравнить результаты вычислений приведенных на рис. 3 и рис. 4, то можно сделать вывод о том, что фазовые переходы в расчетах уменьшают уровень напряжений. Поэтому в источниках, посвященных горячей посадке рекомендовано не подвергать большим температурным воздействием охватываемую деталь.

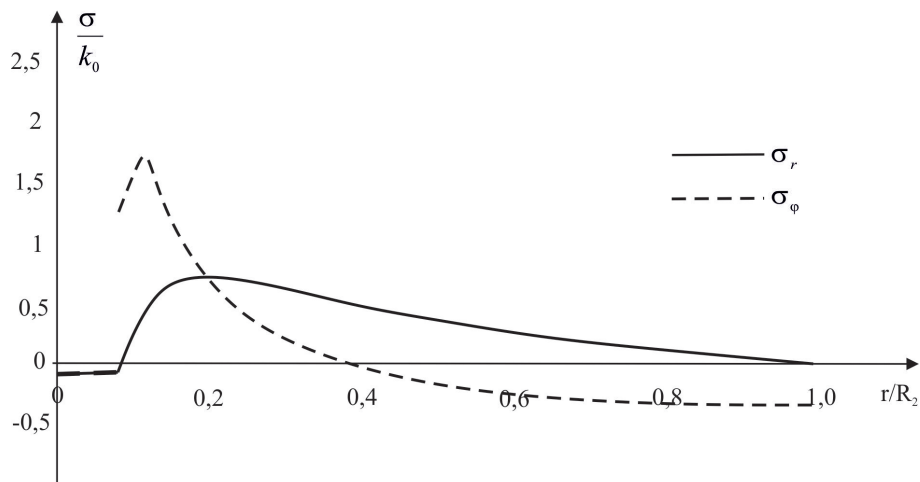


Рис. 4. Распределение остаточных напряжений в материале сборки

Работа выполнена при поддержке гранта №116/2018Д Минобрнауки Хабаровского края.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng. Vol. 40. №. 2. 1996. P. 103-112.

- [2] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [3] Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit // *Intern. J. Plast.* 1992. V. 8. P. 567–582.
- [4] Буренин А. А., Дац Е. П., Ткачева А. В. К вопросу математического моделирования процесса горячей посадки цилиндрических металлоизделий // *СибЖИМ*. 2014. Т. 17 №3. С. 40–47.
- [5] Дац Е. П., Петров М. Р., Ткачева А. В. Кусочно-линейные пластические потенциалы в задачах теории температурных напряжений о сборке горячей посадкой // *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2015 №4(26). С. 163–179.
- [6] Дац Е. П., Ткачева А. В., Шпорт Р. В. Сборка конструкции «кольцо в кольце» способом горячей посадки // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2014. №4(22). С. 204–213.
- [7] Дац Е. П., Ткачева А. В. Технологические температурные напряжения в процессах горячей посадки цилиндрических тел при учете пластических течений // *ПМТФ*. 2016. Т.57 №3(337). С. 208–216.
- [8] Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д. Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
- [9] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [10] Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
- [11] Perzyna P., Sawezuk A. Problems of thermoplasticity. // *Nucl. Eng. Des.* 1973. Vol. 24, No. 1. P. 1–55.

M. Kaing<sup>1</sup>, S. A. Kuznetsov<sup>2</sup>, A. V. Tkacheva<sup>3</sup>

## ON THE EVOLUTION OF TEMPERATURE STRESSES IN CONDITIONS OF THE DISLOCATION OF A DISK IN A HEATED ROUND PLATE

*Komsomolsk - on - Amur State University, Komsomolsk - on - Amur, Russia*

<sup>2</sup> *ООО Торекс - Khabarovsk, Komsomolsk - on - Amur, Russia*

*Institute of Machine Science and Metallurgy FEB RAS, Komsomolsk - on - Amur, Russia*

**Abstract.** Using the theory of temperature stresses, the process of hot insertion of a circular plate into a ring is simulated. In this case, the material of the ring is not heated evenly and has accumulated irreversible deformations at the time of planting. Due to the high temperature region of the ring, the dependence of the flow and elastic moduli on temperature is taken into account.

**Keywords:** elasticity, thermoplasticity, pipe, tube heating, residual stress condition of plasticity Ishlinskii-Ivleva

## REFERENCES

- [1] Kovacs A. Residual Stresses in Thermally Loaded Shrink Fits. *Periodica Polytechnica. Ser. Mech. Eng.* Vol. 40. № 2. 1996. P. 103-112.
- [2] Bengeri M., Mack W. The influence of the temperature dependence of the yield stress on the stress distribution in a thermally assembled elastic-plastic shrink fit // *Acta Mechanica*. 1994. Vol. 103. P. 243–257.
- [3] Lippmann H. The effect of a temperature cycle on the stress distribution in a shrink fit // *Intern. J. Plast.* 1992. V. 8. P. 567–582.
- [4] Burenin A. A., Dac E. P., Tkacheva A. V. K voprosu matematicheskogo modelirovaniya processa goryachej posadki cilindricheskikh metalloizdelij // *SibZHIM*. 2014. T. 17 №3. S. 40–47. (in Russian)
- [5] Dac E. P., Petrov M. R., Tkacheva A. V. Kusochno-linejnye plasticheskie potencially v zadachah teorii temperaturnyh napryazhenij o sborke goryachej posadkoj // *Vestnik CHGPU im. I.YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2015 №4(26). S. 163–179. (in Russian)
- [6] Dac E. P., Tkacheva A. V., SHport R. V. Sborka konstrukcii «kol'co v kol'ce» sposobom goryachej posadki // *Vestnik CHGPU im. I. YA. YAKovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2014. №4(22). S. 204–213. (in Russian)

---

*Kaing Muat*

e-mail: mail@imim.ru, Post - Graduate Student, Komsomolskii - na - Amure State University, Komsomolsk - na - Amure, Russia.

*Kuznetsov Sergey Alekseevich*

e-mail: mail@imim.ru, Genial Director of LLC "Torex - Khabarovsk Komsomolsk - na - Amure, Russia.

*Tkacheva Anastasia Valerjevna*

e-mail: 4nansi4@mail.ru, Ph. D., Research Assistant, Institute of Machine science and Metallurgy, Komsomolsk - on - Amur, Russia.

- [7] Dac E. P., Tkacheva A. V. Tekhnologicheskie temperaturnye napryazheniya v processah goryachej posadki cilindricheskikh tel pri uchete plasticheskikh techenij // PMTF. 2016. T.57 №3(337). S. 208–216. (in Russian)
- [8] Ishlinskij A. YU., Ivlev D. D. Matematicheskaya teoriya plastichnosti. M.: Fizmatlit, 2001. 704 s. (in Russian)
- [9] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teoriya plastichnosti. Vladivostok: Dal'nauka, 1998. 528 s. (in Russian)
- [10] Boli B., Uehjner Dzh. Teoriya temperaturnyh napryazhenij. M.: Mir, 1964. 517 s. (in Russian)
- [11] Perzyna P., Sawezuk A. Problems of thermoplasticity. // Nucl. Eng. Des. 1973. Vol. 24, No. 1. P. 1–55.