

Г. М. Севастьянов

## ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ТРУБЫ

*Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия*

**Аннотация.** Рассмотрены предельные состояния разномодульной цилиндрической трубы в момент зарождения пластического течения и в момент исчерпания несущей способности. Используются тензорно-линейная модель разномодульной теории упругости и ассоциированный с поверхностью текучести Мора – Кулона закон. В работе определены критические деформации, которые могут быть использованы при диагностике конструкций, эксплуатирующихся в условиях неизвестной внешней нагрузки.

**Ключевые слова:** разномодульная теория упругости, условие Мора – Кулона, предельные состояния, плоская упруго-пластическая задача.

УДК: 539.374

Геоматериалы, а также ряд конструкционных материалов (бетоны, чугуны) проявляют свойство разносопротивляемости сжатию и растяжению. Происходит это как на этапе упругого деформирования, так и в процессе необратимого изменения формы и объема. В области обратимых деформаций такое поведение среды описывается тем или иным вариантом разномодульной теории упругости (РМТУ). Этот раздел механики начал развиваться во второй половине XX века с работ Амбарцумяна, Хачатряна, Шапиро [1, 2]. Динамическим и статическим проблемам РМТУ посвящен ряд работ [3–8], в частности — [4], в которой отмечается комплексный характер распространения возмущений по среде, обладающей указанными свойствами. Наиболее простым способом описания качественных особенностей разномодульных материалов представляется использование квазилинейных теорий. Что касается пластического деформирования (или разрушения) таких материалов, то наиболее известными являются кусочно-линейное условие Мора – Кулона, а также гладкие условия Мизеса – Шлейхера и Друкера – Прагера, чувствительные к знаку среднего напряжения.

В настоящей работе будем рассматривать предельное равновесие конструкции в виде полого цилиндра, нагруженного на внешней поверхности, в момент начала пластического течения, а также предельное состояние исчерпания несущей способности такой конструкции, соответствующее полному развитию пластического течения.

---

© Севастьянов Г. М., 2018

*Севастьянов Георгий Мамиевич*

e-mail: akela.86@mail.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, г. Комсомольск-на-Амуре, Россия.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМиМ ДВО РАН №007-00285-18-00.

Поступила 01.07.2018

Определяющая система уравнений сплошной среды в предположении малых деформаций включает:

– модель РМТУ

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}, \quad W = \frac{\lambda}{2} I_1^2 + \mu I_2 - \xi I_1 \sqrt{I_2}, \quad (1)$$

– уравнение равновесия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2)$$

– аддитивное разделение полных деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \mathbf{p}, \quad 2\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{u}) + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T, \quad (3)$$

– ассоциированный с условием Мора – Кулона закон пластического течения

$$\Phi = (\sigma_1 - \sigma_3) + \vartheta (\sigma_1 + \sigma_3) - 2\kappa, \quad \mathbf{p} = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (4)$$

В формулах (1) – (4):  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши,  $W$  – упругий потенциал (использован потенциал РМТУ, предложенный в [3]),  $\mathbf{e}$  – тензор упругих деформаций с инвариантами  $I_1 = \text{tr}(\mathbf{e})$ ,  $I_2 = \text{tr}(\mathbf{e}^2)$ ,  $\lambda, \mu, \xi > 0$  – упругие модули материала,  $\nabla$  – оператор Гамильтона,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – тензор полных деформаций,  $\mathbf{p}$  – тензор необратимых (пластических) деформаций,  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений,  $\Phi$  – пластический потенциал,  $\sigma_1, \sigma_3$  – собственные значения тензора напряжений (наибольшее и наименьшее по модулю соответственно),  $\vartheta, \kappa$  – пластические константы материала, параметр  $\kappa$  имеет размерность напряжений,  $\vartheta$  – безразмерный параметр,  $\Lambda$  – пластический множитель.

Будем искать две предельные величины:  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1}$  – значение компоненты тензора деформаций на внутренней поверхности цилиндра, которое соответствует началу пластического течения, и  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr2} > \varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1}$  – аналогичную величину, соответствующую полному развитию пластического течения и исчерпанию несущей способности конструкции. Эта величина – отношение радиального перемещения к радиусу – легко измерима и ее критические значения могут оказаться полезными при оценке прочности инженерных сооружений в геотехнике, гидротехнике и других областях.

На внутренней поверхности цилиндра отсутствуют радиальные напряжения, внешняя поверхность находится под действием некоторого давления.

Будем полагать, что точки среды испытывают чисто радиальное смещение,  $u_r$  – ненулевая компонента вектора перемещений. В этом случае все тензорные величины, входящие в определяющие соотношения (1) – (4) будут диагональными. Полагаем, что условие текучести (4)  $\Phi = 0$  при нагружении впервые выполнится на внутренней свободной поверхности, как и в классической линейной теории упругости.

Модель (1) устанавливает между тензором напряжений Коши и тензором обратимых деформаций связь вида:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda I_1 \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e} - \xi \left( \mathbf{1} \sqrt{I_2} + \mathbf{e} \frac{I_1}{\sqrt{I_2}} \right).$$

где  $\mathbf{1}$  – единичный тензор.

Тогда

$$\frac{\sigma_{rr}}{e_{\varphi\varphi}} = \lambda(1 + \cot \psi) + 2\mu \cot \psi + \xi [\csc \psi + \cos \psi(1 + \cot \psi)], \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{e_{\varphi\varphi}} = \lambda(1 + \cot \psi) + 2\mu + 2\xi \cos \psi(1 + \cot \psi), \quad (6)$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{e_{\varphi\varphi}} = \lambda(1 + \cot \psi) + \xi \csc \psi,$$

$$\cot \psi = \frac{e_{rr}}{e_{\varphi\varphi}} < 0, \quad \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right).$$

Отсюда следует  $\sigma_{\varphi\varphi} < \sigma_{zz} < \sigma_{rr} \leq 0$ , тогда в (4)  $\sigma_1 = \sigma_{rr}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{\varphi\varphi}$ .

Появление пластической области характеризуется выполнением условия текучести (4) на границе  $r = r_0$ . Учитывая, что на этой поверхности  $\sigma_{rr} = 0$ , имеем

$$\sigma_{\varphi\varphi}(r_0) = -\frac{2\kappa}{1-\vartheta}.$$

В момент наступления пластического течения значение тензора полных деформаций в точке среды совпадает со значением тензора упругих деформаций. Согласно (6)

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} = e_{\varphi\varphi}(r_0) = -\frac{2\kappa}{1-\vartheta} [\lambda(1 + \cot \psi_0) + 2\mu + 2\xi \cos \psi_0(1 + \cot \psi_0)]^{-1}, \quad (7)$$

где значение  $\psi_0$  по (5) является корнем уравнения

$$\lambda(1 + \cot \psi_0) + 2\mu \cot \psi_0 + \xi [\csc \psi_0 + \cos \psi_0(1 + \cot \psi_0)] = 0. \quad (8)$$

При дальнейшем нагружении конструкции развивается пластическая область. Исчерпание несущей способности конструкции происходит в момент, когда пластическое течение возникает на внешней границе цилиндра  $r = r_1$ . При этом, согласно ассоциированному закону (4)

$$p_{\varphi\varphi} = -\Lambda(1 - \vartheta), \quad p_{rr} = \Lambda(1 + \vartheta) \quad (9)$$

и

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr2} = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} + p_{\varphi\varphi}(r_0) = \varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} - (1 - \vartheta)\Lambda(r_0). \quad (10)$$

Таким образом, задача отыскания  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr2}$  сводится к указанию значения пластического множителя  $\Lambda$  на границе  $r = r_0$  в тот момент, когда упругопластическая граница достигнет поверхности  $r = r_1$ .

Далее, учитывая, что компоненты тензора полных деформаций имеют вид  $\varepsilon_{rr} = \partial u_r / \partial r$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = u_r / r$ , имеем

$$\frac{\partial \varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial x} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad (11)$$

сделана замена  $x = \ln(r/r_1)$ .

Аддитивное разложение (3) полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi}$ ,  $\varepsilon_{rr} = e_{rr} + p_{rr}$  и формулы (9) позволяют записать (11) в виде

$$(1 - \vartheta) \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + 2\vartheta \Lambda = \frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial x} - e_{\varphi\varphi}(1 + \cot \psi), \quad (12)$$

здесь учтено  $e_{rr} = e_{\varphi\varphi} \cot \psi$ .

Тогда исходная задача сводится к интегрированию (12) с краевым условием  $\Lambda|_{x=0} = 0$ , так как в момент зарождения пластического течения на внешней границе цилиндра там еще отсутствуют необратимые деформации.

Представим (12) в следующем виде, сделав замену независимой переменной на монотонный параметр  $\psi$ :

$$(1 - \vartheta) \frac{\partial \Lambda}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2\vartheta \Lambda = \frac{\partial e_{\varphi\varphi}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} - e_{\varphi\varphi}(1 + \cot \psi). \quad (13)$$

Для замыкания уравнения (13) необходимо знать функциональную зависимость  $e_{\varphi\varphi} = e_{\varphi\varphi}(\psi)$ , значение  $\psi_1 = \psi|_{x=0}$ , при котором  $\Lambda = 0$ , а также связь между  $\partial \psi / \partial x$  и  $\psi$ . После интегрирования (13) требуется найти значение  $\Lambda$  при  $\psi = \psi_0$ .

Подставим выражения (5) и (6) в условие пластичности (4)  $\Phi = 0$ , имеем:

$$e_{\varphi\varphi} = 2\kappa \left[ \frac{2\lambda\vartheta(1 + \cot \psi) - 2\mu(1 - \vartheta - (1 + \vartheta)\cot \psi) + \xi(1 + \vartheta)\csc \psi - \xi(1 - 3\vartheta)\cos \psi(1 + \cot \psi)}{1 - \vartheta} \right]^{-1}. \quad (14)$$

Значение  $\psi|_{x=0}$  получим следующим образом. Рассматриваемая задача статически определима: в пластической области компоненты напряжений  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{\varphi\varphi}$  связаны условием (4)  $\Phi = 0$ , откуда

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_{rr}(1 + \vartheta) - 2\kappa}{1 - \vartheta}, \quad (15)$$

и уравнение равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} + (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0$$

интегрируется с краевым условием  $\sigma_{rr}|_{x=\ln(r_0/r_1)} = 0$ :

$$\sigma_{rr} = \frac{\kappa}{\vartheta} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_0} e^x \right)^{\frac{2\vartheta}{1-\vartheta}} \right]. \quad (16)$$

Из (16) известна величина радиального напряжения на внешней поверхности трубы. С другой стороны, уравнения (5) и (14) позволяют выразить  $\sigma_{rr}$  через  $\psi$ . Тогда значение  $\psi$  на внешней поверхности трубы  $\psi_1 = \psi|_{x=0}$  есть корень уравнения

$$e_{\varphi\varphi}(\psi_1) [(\lambda + \xi \cos \psi_1)(1 + \cot \psi_1) + 2\mu \cot \psi_1 + \xi \csc \psi_1] = \frac{\kappa}{\vartheta} \left[ 1 - \left( \frac{r_1}{r_0} \right)^{\frac{2\vartheta}{1-\vartheta}} \right]. \quad (17)$$

Наконец

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial x} \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \psi} \right)^{-1} = (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \psi} \right)^{-1} = \frac{2}{1 - \vartheta} (\vartheta \sigma_{rr} - \kappa) \left( \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \psi} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Здесь использовано уравнение равновесия и равенство (15). Последнее соотношение с учетом (5) и (14) определяет  $\partial \psi / \partial x$  как функцию  $\psi$ .

Таким образом, уравнение (13) с учетом (14) и (18) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции  $\Lambda(\psi)$  с краевым условием  $\Lambda(\psi_1) = 0$ , где  $\psi_1$  определяется по (17).

Нетрудно убедиться, что критические деформации могут быть представлены в виде

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} = -\frac{2}{1 - \vartheta} \frac{\kappa}{\xi} f_1 \left( \frac{\lambda}{\xi}, \frac{\mu}{\xi} \right),$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^{cr1} = -\frac{2}{1 - \vartheta} \frac{\kappa}{\xi} \left[ f_1 \left( \frac{\lambda}{\xi}, \frac{\mu}{\xi} \right) + f_2 \left( \frac{\lambda}{\xi}, \frac{\mu}{\xi}, \vartheta, \psi_1 \right) \right], \quad \psi_1 = \psi_1 \left( \frac{r_1}{r_0}, \vartheta \right).$$

Расчетные значения  $f_1$  и  $f_2$  при различных  $\lambda/\xi$ ,  $\mu/\xi$  для фиксированного значения пластического параметра  $\vartheta = 1/2$  и геометрического параметра  $r_1/r_0 = 2$  представлены на рисунке.

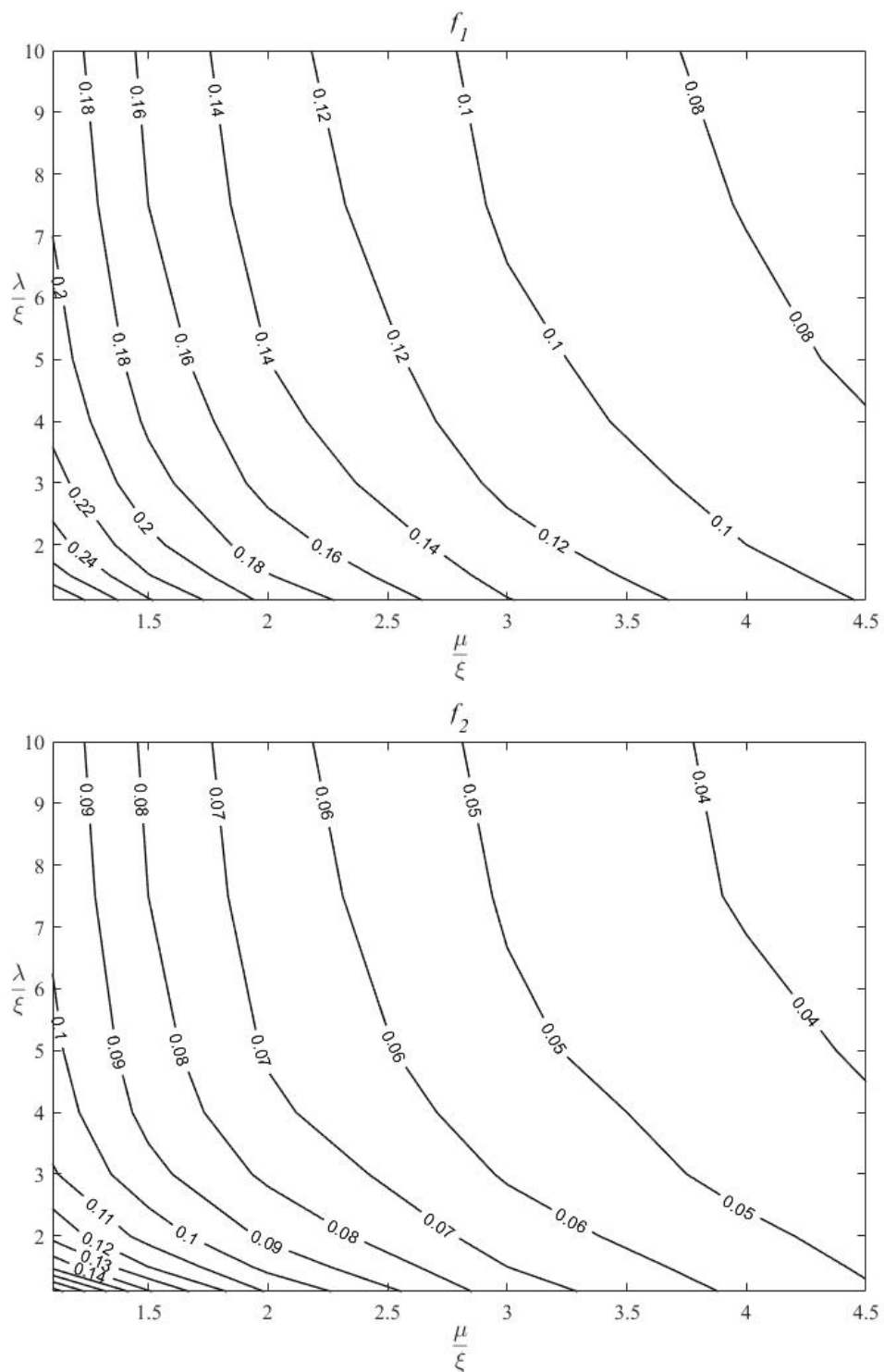


Рис. 1. К определению критических деформаций

**ЛИТЕРАТУРА**

- [1] Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разнсопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. №2. С. 44–53.
- [2] Шапиро Г. С. О деформациях тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. 1966. №2. С. 123–125.
- [3] Мясников В. П., Олейников А. И. Основные общие соотношения изотропно-упругой разнсопротивляющейся среды // Докл. АН СССР. 1992. Т. 332, №1. С. 57–60.
- [4] Маслов В. П., Мосолов П. П. Общая теория решения уравнений движения разномодульной упругой среды // Прикл. матем. и мех. 1985. Т. 49, вып. 3. С. 419–437.
- [5] Цвелодуб И. Ю. О разномодульной теории упругости // Прикл. мех. и техн. физ. 2008. Т. 49, №1. С. 157–164.
- [6] Буренин А. А., Ярушина В. М. К моделированию деформирования материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию // Проблемы механики деформируемых твердых тел и горных пород: Сб. ст. к 75-летию Е. И. Шемякина. М.: Физматлит. 2006. С. 100–106.
- [7] Садовский В. М. Реологические модели разномодульных и сыпучих сред // Дальневост. матем. журн. 2003. Т. 4, №2. С. 252–263.
- [8] Дудко О. В., Лаптева А. А. К распространению возмущений по несжимаемой упругой среде с разномодульным сопротивлением сдвигу // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, №1. С. 21–28.

G. M. Sevastyanov

## LIMIT STATES OF A BIMODULAR ELASTIC-PLASTIC PIPE

*Institute of machinery and metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia*

**Abstract.** The limiting states of a bimodular cylindrical tube at the moment of the initiation of plastic flow and at the moment of exhaustion of bearing capacity are considered. The tensor-linear model of the bimodular theory of elasticity and the yield condition of Mohr-Coulomb are used. The flow rule is given by an associated flow rule. The results are critical strain values, which can be used in the diagnosis of constructions operating in conditions of unknown external load.

**Keywords:** bimodular theory of elasticity, Mohr – Coulomb condition, limiting states, plane strain elastic-plastic problem.

## REFERENCES

- [1] Ambarcumyan S. A., Hachaturyan A. A. Osnovnye uravneniya teorii uprugosti dlya materialov, raznosoprotivlyayushchihsya rastyazheniyu i szhatiyu // Inzh. zhurn. Mekhanika tverdogo tela. 1966. №2. S. 44–53. (in Russian)
- [2] SHapiro G. S. O deformatsiyah tel, obladayushchih razlichnym soprotivleniem rastyazheniyu i szhatiyu // Inzh. zhurn. Mekhanika tverdogo tela. 1966. №2. S. 123–125. (in Russian)
- [3] Myasnikov V. P., Olejnikov A. I. Osnovnye obshchie sootnosheniya izotropno-uprugoj raznosoprotivlyayushchejsya sredy // Dokl. AN SSSR. 1992. T. 332, №1. S. 57–60. (in Russian)
- [4] Maslov V. P., Mosolov P. P. Obshchaya teoriya resheniya uravnenij dvizheniya raznomodul'noj uprugoj sredy // Prikl. matem. i mekh. 1985. T. 49, vyp. 3. S. 419–437. (in Russian)
- [5] Cvelodub I. YU. O raznomodul'noj teorii uprugosti // Prikl. mekh. i tekhn. fiz. 2008. T. 49, №1. S. 157–164. (in Russian)
- [6] Burenin A. A., YArushina V. M. K modelirovaniyu deformirovaniya materialov, po-raznomu soprotivlyayushchihsya rastyazheniyu i szhatiyu // Problemy mekhaniki deformiruemykh tverdyh tel i gornyh porod: Sb. st. k 75-letiyu E. I. SHemyakina. M.: Fizmatlit. 2006. S. 100–106. (in Russian)
- [7] Sadovskij V. M. Reologicheskie modeli raznomodul'nyh i sypuchih sred // Dal'nevost. matem. zhurn. 2003. T. 4, №2. S. 252–263. (in Russian)
- [8] Dudko O. V., Laptjeva A. A. K rasprostraneniyu vozmushchenij po neszhimaemoj uprugoj srede s raznomodul'nym soprotivleniem sdvigu // Sib. zhurn. industr. matem. 2013. T. 16, No1. S. 21–28. (in Russian)

---

*Sevastyanov Georgiy Mamievich*

e-mail: akela.86@mail.ru, Ph. D., Institute of machinery and metallurgy FEB RAS, Komsomolsk-on-Amur, Russia.