

М. М. Алиев, С. В. Шафиева, О. Н. Волкова, О. А. Шипилова

РАЗРАБОТКА КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ ИЗОТРОПНЫХ И АРМИРОВАННЫХ ПОЛИМЕРОВ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯДЫ

Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия

Аннотация. В статье предложена методика получения критериев прочности полимерных материалов, обладающих свойством изотропии и армированных полимеров с ярко выраженной анизотропией. Рассматривается статический критерий для изотропных материалов Х. Альтенбаха – К. Туштева, а также предложенные авторами две зависимости между инвариантами напряжений, которые представлены в виде степенных рядов. Проведена экспериментальная проверка полученных критериев для изотропных полимеров и однонаправленных углепластиков.

Ключевые слова: критерий прочности, давление гидростатическое, полимер изотропный, материал композитный армированный, углепластик однонаправленный.

УДК: 539.4

Введение. При разработке феноменологических критериев прочности, построенных на основании выдвинутых теорий, как правило, не рассматриваются процессы деформирования и разрушения, сопровождаемые структурными изменениями. Например, часто принимается, что предельное условие перехода материала из прочного состояния к разрушенному состоянию можно выразить в виде математической зависимости первого инварианта тензора напряжений I_1 и второго инварианта девиатора тензора напряжений I_{D2} в сочетании с прочностными характеристиками материала.

© М. М. Алиев, С. В. Шафиева, О. Н. Волкова, О. А. Шипилова 2018

Алиев Мехрали Мирзали оглы

e-mail: mmaliev@ Rambler.ru, доктор технических наук, профессор, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Шафиева Светлана Владимировна

e-mail: shafieva_sv@mail.ru, кандидат технических наук, доцент, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Волкова Ольга Николаевна

e-mail: 9172850545@mail.ru, старший преподаватель, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Шипилова Ольга Александровна

e-mail: o.shipilova@ Rambler.ru, кандидат технических наук, доцент, Альметьевский государственный нефтяной институт, г. Альметьевск, Россия.

Поступила 10.08.2018

Существует ряд материалов, для которых предельная кривая, связывающая компоненты напряжения через указанные инвариантные параметры, аппроксимируется экспоненциальной зависимостью Х. Альтенбаха – К. Туштева [1].

Как показывают расчеты [1], если зависимость между I_1 и I_{D2} линейная в виде критерия Друккера – Прагера, то погрешность для некоторых видов изотропных полимеров может достигать до 25%. Более точные результаты можно получить по параболической кривой Баландина и экспоненциальной кривой [1].

В работах [2,3] предложен метод получения критериев прочности для изотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, относящихся к композитным материалам, которые имеют возможность варьироваться и интерпретироваться различными кривыми.

Линейная, параболическая и другие формы критериев Друккера – Прагера, Баландина, Шлейхера – Боткина и другие, связывающие I_1 и I_{D2} с прочностными характеристиками материалов, в дальнейшем должны проверяться экспериментально.

Статический критерий прочности для изотропных полимеров, предложенный Х. Альтенбахом и К. Туштевым [1], имеет экспоненциальную форму и две введенные прочностные характеристики. Подобный подход разработки условий текучести пластичных материалов можно встретить в работах В.В. Соколовского [4], который принимал геометрическую интерпретацию условий текучести в виде синусоидальной линии и дуги циклоиды в координатной системе максимальных касательных напряжений и полусуммы максимальных и минимальных главных нормальных напряжений.

В последние годы проводились исследования, которые показали, что гидростатическое давление существенное влияние оказывает на полимерные, чем на материалы с более прочной структурой. Работы [5,6] так же показали, что механические свойства полимерных однонаправленных композитов сильно зависят от гидростатического давления.

В работе [7] были исследованы высокопрочные однонаправленные композитные материалы при действии продольного растяжения и наложенного высокого гидростатического давления. Испытанию подвергались кольцевые образцы. Результаты экспериментов показали, что продольный модуль упругости практически не зависит от величины гидростатического давления, а прочность при растяжении в направлении армирования этих материалов возрастает с увеличением давления до некоторого уровня. При дальнейшем повышении давления прочностные характеристики материалов уменьшаются. Виды разрушения также значительно зависят от величины наложенного гидростатического давления. На основе экспериментальных данных получена зависимость прочности от величины наложенного гидростатического давления.

Свойства материалов при растяжении и сжатии в условиях высокого гидростатического давления были также исследованы в работах [8,9]. Испытывались образцы трубчатой формы, а давление к материалу передавалось через жидкость (типа керосина или масла). Был отмечен важный эффект действия гидростатического давления – высокие поперечные напряжения увеличивают поверхностное сцепление, тем самым делая композит более устойчивым к разрушению. Гидростатическое давление может также снизить влияние дефектов в композитных материалах, таких как микротрещины, поры и отслоения путем их эффективного закрытия и увеличения объема работы, необходимой для роста трещин.

Приведенный анализ показывает, что сложность проведения экспериментов, а также работы по изготовлению образцов требует теоретической разработки зависимости

прочностных характеристик от всестороннего давления, исходя из результатов простых экспериментов.

1. Метод получения критериев прочности путем разложения в ряды

Пусть критерий прочности описывается кривой экспоненциальной формы

$$B - \xi = A \left(e^{\frac{\eta}{A}} - 1 \right). \quad (1)$$

Здесь A и B – постоянные, зависящие от характеристик прочности материала;

$\eta = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$ – полярная координата в девиаторной плоскости;

$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ – длина гидростатической оси, соответствующей направлению $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$; $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ – главные напряжения.

Преобразуем (1), разложив в ряд Тейлора и взяв в рассмотрение два члена ряда. В результате получим следующее выражение

$$\eta^2 + C(\eta + \xi) = D, \quad (2)$$

где $C = 2A$; $D = 2AB$.

Если рассмотреть три члена ряда, то выражение (1) примет вид

$$\eta^3 + \frac{\sqrt{C_1}}{b_0} \eta^2 + C_1(\eta + \xi) = D_1, \quad (3)$$

где $C_1 = 6A^2$; $D_1 = 6A^2B$; $b_0 = \eta \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Если зависимость между η и ξ будет иметь вид

$$\frac{B - \xi}{A} = \arcsin \frac{\eta}{A}, \quad (4)$$

то получим следующий критерий прочности [10]

$$\eta^3 + C_1(\eta + \xi) = D_1. \quad (5)$$

Постоянные, входящие в уравнения (2), (3) и (5) можно определить из двух простых испытаний материалов: на одноосное растяжение и одноосное сжатие.

Приняв при одноосном растяжении $\sigma_1 = \sigma_p$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, при одноосном сжатии $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma_c$, получим системы уравнений для нахождения постоянных A и B :

- для выражения (2)

$$\frac{1}{d_0} \sigma_p^2 + C(b_0 + e_0) \sigma_p = D, \quad (6)$$

$$\frac{1}{d_0} \sigma_c^2 + C(b_0 + e_0) \sigma_c = D, \quad (7)$$

где $d_0 = \frac{3}{2}$; $e_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

- для выражения (3)

$$b_0^3 \sigma_p^3 + b_0 \sqrt{C_1} \sigma_p^2 + C_1(b_0 + e_0) \sigma_p = D_1; \quad (8)$$

$$b_0^3 \sigma_c^3 + b_0 \sqrt{C_1} \sigma_c^2 + C_1(b_0 + e_0) \sigma_c = D_1; \quad (9)$$

- для выражения (5)

$$a_0\sigma_p^3 + C_1(b_0 + e_0)\sigma_p = D_1; \quad (10)$$

$$a_0\sigma_c^3 + C_1(b_0 + e_0)\sigma_c = D_1; \quad (11)$$

где $a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

Здесь σ_p – предел прочности при растяжении; σ_c – предел прочности при сжатии.

Решением систем уравнений (6)–(7), (8)–(9) и (10)–(11) получаем значения постоянных материала.

Таким же образом можно представить другие кривые, соответствующие существующим экспериментам, результаты которых могут быть заимствованы из различных источников.

2. Применения метода разложения в ряды для критерия Х. Альтенбаха – К. Туштева

Используя методику получения полиномиальных критериев [2], приведем экспоненциальный критерий Х. Альтенбаха – К. Туштева

$$\eta + (\eta + k) \exp\left(\frac{\xi}{\xi_0} - 1\right) - k = 0 \quad (12)$$

к полиномиальному виду.

Преобразовывая (12), получим

$$\ln \frac{A - \eta}{A + \eta} = \frac{\xi}{B} - 1 \quad \text{при } A > \eta,$$

где $A = k$; $B = \xi_0$ – постоянные, зависящие от характеристик прочности материала.

После разложения в ряд Тейлора и математических преобразований с двумя членами ряда, получим

$$\eta^3 + 3A^2\eta + \frac{3A^3}{2B}\xi = \frac{3}{2}A^3. \quad (13)$$

Отсюда обнаруживаем, что, в отличие от [4], параметры ξ и имеют различные коэффициенты. Если оставить только один член ряда, то выражение (13) превращается в линейный критерий Друккера – Прагера. Постоянные, входящие в (13), также можно определить из испытаний материалов на одноосное растяжение и одноосное сжатие. Из выражения (13) получим следующие уравнения для нахождения постоянных A и

$$a_0\sigma_p^3 + 3b_0A^2\sigma_p + c_0\frac{A^3}{B}\sigma_p = d_0A^3, \quad (14)$$

$$a_0\sigma_c^3 + 3b_0A^2\sigma_c + c_0\frac{A^3}{B}\sigma_c = d_0A^3, \quad (15)$$

где $c_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Проведем сравнение характеристик k и ξ_0 для изотропных полимеров (результаты экспериментов взяты в [1] из работ других исследователей [11]): ПММА (полиметилметакрилат), эпоксидного связующего, эпоксидного компаунда и полиэфирного связующего, для трех случаев представления критерия Альтенбаха – Туштева: без разложения в ряд Тейлора (12), после разложения с двумя членами ряда (13) и после

разложения с тремя членами ряда (имеет пятую степень и здесь формула не приведена). Результаты сравнения приведены в таблице 1.

Полимер	До разложения в ряд, по [1]		После разложения (2 члена ряда)		После разложения (3 члена ряда)	
	k	ξ_0	k	ξ_0	k	ξ_0
ПММА	168,75	390,39	167,03	405	168,45	393,8
Эпоксидное связующее	179,04	235,63	176,7	245	178,52	238,2
Эпоксидный компаунд	55,51	77,28	54,8	81,1	55,36	78,12
Полиэфирное связующее	96,22	195,5	95,2	203	96,05	197,1

Как видно из таблицы 1, расхождение результатов между параметрами прочности критериев с двумя и тремя членами ряда незначительно. На рисунке 1 представлены предельные кривые для полиэфирного связующего, построенные по критерию Алтенбаха–Тушетева и по критерию (2). С целью сравнения кривых было рассчитано их среднеквадратичное отклонение по отношению к экспериментальным данным. Получено, что отклонение для кривой, построенной по уравнению (2), составляет 4,76%, по уравнению (12) – 5,65%, по уравнению (13) – 6,25% и с тремя членами ряда – 4,59%.

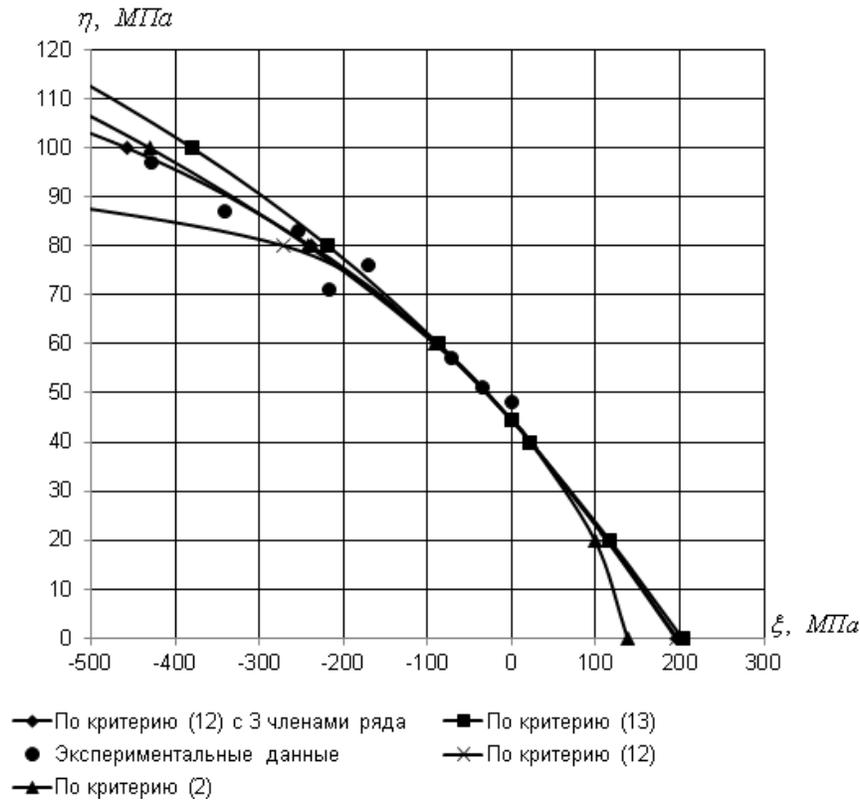


Рис. 1. Предельные кривые для полиэфирного связующего

Таким образом, расхождение между кривыми незначительно.

Целью разложения критериев (1), (4), (12) является приведение к традиционному виду зависимости между η и ξ , оценивание их по внешнему виду и на соответствие экспериментальным данным. Критерии прочности (1), (4) и (12) после разложения в ряды и взятии в рассмотрение одного, двух и т.д. членов ряда имеют различные степени η и ξ , входящих в исходные их виды.

Как известно, в практике проектирования широкое распространение получили критерии Друккера – Прагера и Баландина, имеющие линейную и параболическую зависимости между η и ξ . Критерий (12) – экспоненциальный. Такую же экспоненциальную зависимость имеет критерий (1), однако при взятии в рассмотрение двух членов ряда он имеет квадратичную форму.

Таким образом, при сравнении (2), (5) и (13) преимущество должен иметь критерий (2) из-за его квадратичности, если такой вид критерия удовлетворительно согласуется с экспериментами, не хуже чем (5) и (13), что и видно из рисунка 1.

3. Армированные композитные материалы

Напряженное состояние однонаправленно армированного композитного материала (например, углепластика) в условиях действия всестороннего давления является трехосным. Рассмотрим зависимость (4) в следующем виде

$$\frac{\eta}{A} = \sin \frac{B - \xi}{A} \quad \text{при} \quad \left| \frac{B - \xi}{A} \right| \leq 1. \quad (16)$$

При разложении правой части (16) в ряд Тейлора и рассмотрении двух первых членов ряда, получим критерий прочности в виде

$$\frac{\eta}{A} = m - \frac{1}{A} \left(1 - \frac{1}{2} m^2 \right) \xi - \frac{1}{6} m^3 - \frac{1}{2A^2} m \xi^2 + \frac{1}{6A^3} \xi^3, \quad (17)$$

где $m = \frac{B}{A}$.

Постоянные A и B могут быть определены из испытаний на одноосное растяжение вдоль направления армирования и на одноосное сжатие неармированного углепластика. При этом вводим допущение: при сжатии сжимающие напряжения воспринимаются скелетом углепластика.

На рисунке 2 представлены кривые зависимости прочности однонаправленно армированного углепластика от гидростатического давления по критерию (17) и по зависимости, полученной в работе [7], а также результаты экспериментов из этой же работы. Здесь p – гидростатическое давление.

Проведем также сравнение результатов экспериментальных данных, полученных в условиях растяжения и сжатия с наложенным гидростатическим давлением, и результатов, полученных исходя из критерия (17). На рисунках 2, 3 и 4 представлены кривые зависимости прочности материалов от гидростатического давления, соответствующие критерию (17), а также результаты экспериментов [7-9]. В условиях растяжения на экспериментальных кривых имелись участки как возрастания, так и уменьшения прочности. На рисунках 2 и 3 предельные кривые, соответствующие критерию (17), имеют зависимость, близкую к прямой, а согласно [7] – криволинейную, более точно описывающую эксперименты. Однако в области максимума имеет место наибольший разброс экспериментальных данных и, как отмечают авторы [7], равновероятны различные виды разрушения. Кривая, приведенная в работах [8,9], по результатам экспериментов на растяжение представляет собой практически прямую линию.

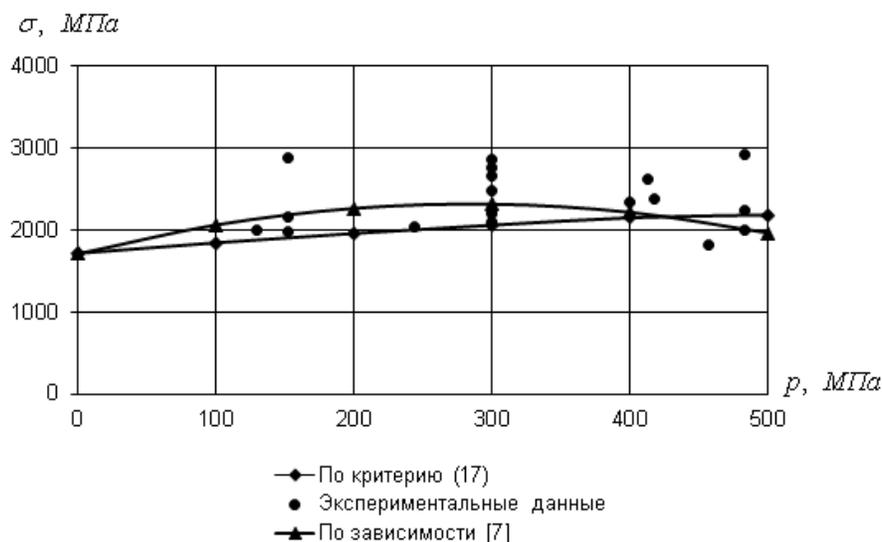


Рис. 2. Зависимость прочности углепластика от гидростатического давления при продольном растяжении

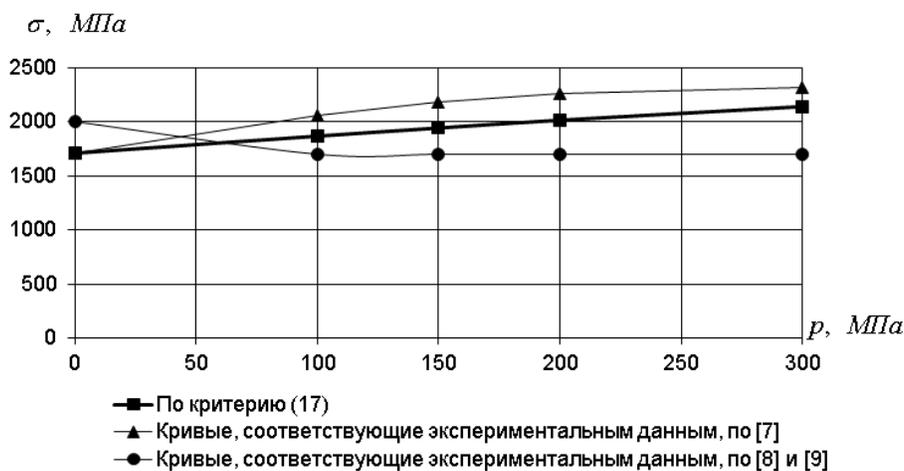


Рис. 3. Зависимость прочности углепластика с содержанием углерода 60% от гидростатического давления при продольном растяжении

При сравнении экспериментальных прочностных характеристик [8,9] при сжатии с характеристиками, соответствующими критерию (17), можно отметить, что предельные кривые по (17) достаточно точно соответствуют результатам экспериментов. При этом можно предположить, что причиной некоторого несоответствия является изменение механизма разрушения. Для таких видов армированных пластиков очевидно, что при большом давлении растяжение сопровождается интенсивным сдвигом, а при

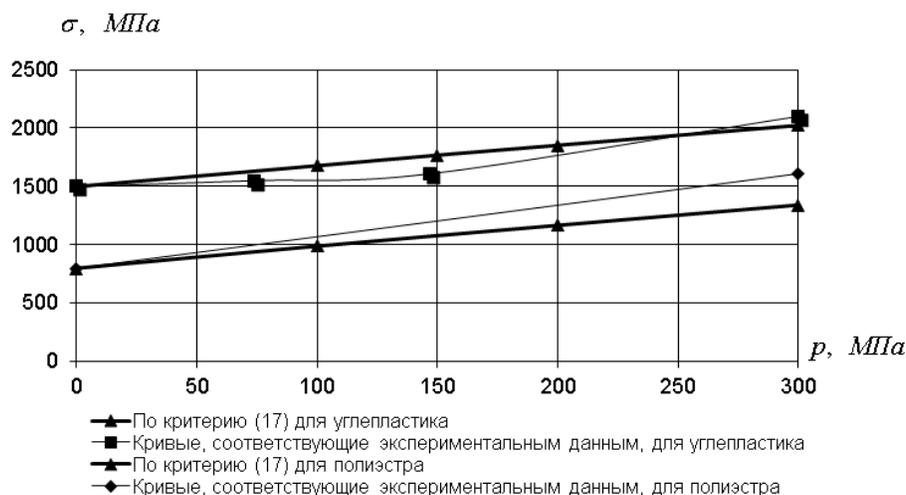


Рис. 4. Зависимость прочности углепластика с содержанием углерода 60% и полиэстера от гидростатического давления при сжатии

сжатии высокое давление упрочняет материал, начиная с первых шагов увеличения всестороннего давления.

Выводы. Критерии прочности, полученные в данной работе, можно использовать для оценки прочности изотропных полимеров и однонаправленно армированных пластиков, работающих в условиях высокого давления. Заимствованные из различных источников экспериментальные данные подтверждают достоверность этих критериев. Исследования показывают, что для изотропных полимеров удовлетворительные результаты можно получить, если применять экспоненциальные зависимости [1,2], а для армированных пластиков – кривые в виде синусоидальной зависимости, представленной разложением в ряды.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Альтенбах Х., Туштов К. Новый критерий статической прочности изотропных полимеров // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37, № 5/6. С. 732–739.
- [2] Алиев М. М., Шафиева С. В., Каримова Н. Г. Критерии прочности и разрушения разнопрочных материалов с учетом влияния всестороннего давления // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 3 (13). С. 64–71.
- [3] Алиев М. М., Шафиева С. В. Новые полиномиальные критерии прочности для разнопрочных материалов // Вестник Казанского государственного технического университета им. А.Н. Туполева. 2012. № 3. С. 87–91.
- [4] Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
- [5] Shin E. S. and Pae K. D. Effects of Hydrostatic Pressure on In-Plane Shear Properties of Graphite / Epoxy Composites // Journal of Composite Materials. 1992a.
- [6] Sigley R. H., Wronski A. S. and Parry T. V. Tensile Failure of Pultruded Glass-Polyester Composites Under Superimposed Hydrostatic Pressure // Composites Science and Technology. 1991.

[7] Зиновьев П. А. Прочность однонаправленных композитов в условиях высокого гидростатического давления / П.А. Зиновьев, С.В. Цветков, Г.Г. Кулиш, Р.В. ванден Берг, Л. Ван Шепдайл // Механика композитных материалов. 2001. Т. 37, № 4. С. 451–462.

[8] Camponeschi E. T. Jr. Compression of Composite Materials: A Review in Composite Materials: Fatigue and Fracture // ASTM STP 1110, American Society for Testing Materials, Philadelphia, PA. 1991.

[9] Portelli G. B., Goetz D. P., Graske J. A. and Hine A. M. The Effect of Matrix Modulus on Lamina Compression Strength // Paper presented at the 37th International SAMPE Symposium and Exhibition, Society for the Advancement of Material and Process Engineering, Anaheim, CA. 1992.

[10] Алиев М. М., Каримова Н. Г. Вариант критерия прочности для изотропных полимеров // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. 2008. № 3 (62). С. 217–226.

[11] Ol'khovik O., Figovsky O. and Feigin V. Identification of static strength criteria // J. Mech. Behavior of Mater. 1996. Vol. 6, № 4. P. 301–308.

M. M. Aliev, S. V. Shafieva, O. N. Volkova, O. A. Shipilova

DEVELOPMENT OF THE CRITERIA OF STRENGTH OF ISOTROPIC AND REINFORCED POLYMERS BY THE METHOD OF DECOMPOSITION TO SERIES

Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia

Abstract. The article suggests a technique for obtaining strength criteria for polymeric materials that have the property of isotropy and reinforced polymers with pronounced anisotropy. We consider a static criterion for isotropic materials of H. Altenbach - K. Tushtev, as well as two relationships proposed by the authors between stress invariants, which are represented in the form of power series. The experimental verification of the obtained criteria for isotropic polymers and unidirectional carbon plastics has been carried out.

Keywords: strength criterion, hydrostatic pressure, isotropic polymer, composite reinforced material, unidirectional CFRP.

REFERENCES

Aliev Mekhrali Mirzali ogly

e-mail: mmaliev@rambler.ru, Dr. Sci. Eng., Professor, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia.

Shafieva Svetlana Vladimirovna

e-mail: shafieva_sv@mail.ru, Ph.D. Eng., Assoc. Professor, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia.

Volkova Olga Nikolaevna

e-mail: 9172850545@mail.ru, Senior Lecturer, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia.

Shilova Olga Aleksandrovna

e-mail: o.shipilova@rambler.ru Ph.D. Eng., Assoc. Professor, Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Russia.

- [1] Al'tenbakh K.H., Tushtev K. Novyy kriteriy staticheskoy prochnosti izotropnykh polimerov // *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2001. T. 37, № 5/6. S. 732–739. (in Russian)
- [2] Aliyev M. M., Shafiyeva S. V., Karimova N. G. Kriterii prochnosti i razrusheniya raznoprochnykh materialov s uchetom vliyaniya vsestoronnego davleniya // *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*. 2012. № 3 (13). S. 64–71. (in Russian)
- [3] Aliyev M. M., Shafiyeva S. V. Novyye polinomial'nyye kriterii prochnosti dlya raznoprochnykh materialov // *Vestnik Kazanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. A.N. Tupoleva*. 2012. № 3. S. 87–91. (in Russian)
- [4] Sokolovskiy V.V. *Teoriya plastichnosti*. M.: Vysshaya shkola, 1969. 608 s. (in Russian)
- [5] Shin E. S. and Pae K. D. Effects of Hydrostatic Pressure on In-Plane Shear Properties of Graphite / Epoxy Composites // *Journal of Composite Materials*. 1992a.
- [6] Sigley R. H., Wronski A. S. and Parry T. V. Tensile Failure of Pultruded Glass-Polyester Composites Under Superimposed Hydrostatic Pressure // *Composites Science and Technology*. 1991.
- [7] Zinov'yev P. A. Prochnost' odnonapravlennykh kompozitov v usloviyakh vysokogo gidrostaticheskogo davleniya / P.A. Zinov'yev, S.V. Tsvetkov, G.G. Kulish, R.V. vanden Berg, L. Van Shepdayl // *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2001. T. 37, № 4. S. 451–462.
- [8] Camponeschi E. T. Jr. Compression of Composite Materials: A Review in Composite Materials: Fatigue and Fracture // ASTM STP 1110, American Society for Testing Materials, Philadelphia, PA. 1991. (in Russian)
- [9] Portelli G. B., Goetz D. P., Graske J. A. and Hine A. M. The Effect of Matrix Modulus on Lamina Compression Strength // Paper presented at the 37th International SAMPE Symposium and Exhibition, Society for the Advancement of Material and Process Engineering, Anaheim, CA. 1992. (in Russian)
- [10] Aliyev M. M., Karimova N. G. Variant kriteriya prochnosti dlya izotropnykh polimerov // *Vestnik SamGU – Yestestvennonauchnaya seriya*. 2008. № 3 (62). S. 217–226. (in Russian)
- [11] Ol'khovik O., Figovsky O. and Feigin V. Identification of static strength criteria // *J. Mech. Behavior of Mater*. 1996. Vol. 6, № 4. P. 301–308.