

Ю. В. Немировский, А. В. Станиславович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия

Аннотация. Представлена математическая модель теплопроводности многослойных композитных пластин. Слои таких пластин могут быть набраны как из изотропных, так и из ортотропных материалов, таких как армированные волокнами, либо частицами композиционные материалы, сотовые структуры с различными параметрами армирования. Предложена методика аналитического решения стационарных и нестационарных задач теплопроводности для таких многослойных пластин.

Ключевые слова: теплопроводность, аналитические решения, композитные материалы, слоистые конструкции.

УДК: 536.21

1. Введение

Исследование различных проблем теплопроводности и теплопередачи играет важную роль при проектировании газотурбинных двигателей и установок, авиационной и ракетной техники [1; 2]. При этом помимо увеличения термического сопротивления по толщине стенок несущих и теплоотводящих конструкций требуется обеспечить достаточную прочность и жесткость при ограниченном весе таких конструкций. Одновременное выполнение таких требований может быть реализовано в подкрепленных конструкциях коробчатого типа или в трехслойных панелях с легкими алюминиевыми или стеклопластиковыми сотовыми наполнителями. Теплопроводность таких конструкций была исследована, например, в работах [3; 4]. В настоящее время разработаны технологии производства многослойных сотовых конструкций,

© Немировский Ю. В., Станиславович А. В., 2018

Немировский Юрий Владимирович

e-mail: nemiruy@bk.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия.

Станиславович Алексей Вячеславович

e-mail: alexey.st@bk.ru, ведущий специалист, Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Кабинета Министров Чувашской Республики в рамках научного проекта № 17-41-210272.

Поступила 01.08.2018

разделяющих среды с различными температурами. Все составляющие конструкцию слои могут состоять из различных материалов, иметь различные структурные параметры армирования, различную форму, плотность и взаимное расположение сот и, в связи с этим, могут позволять в широких пределах управлять температурным полем в направлении нормали к поверхности многослойной конструкции. Решение такой задачи нам неизвестно и должно быть основано на относительно разумных и простых гипотезах, позволяющих построить сравнительно простую расчетную модель, обеспечивающую возможность решения соответствующих задач управления тепловым полем и оптимизации.

2. Постановка задачи В общем случае распределение тепла в анизотропном теле описывается уравнением:

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\Lambda \nabla T) + f, \quad (1)$$

с начально-краевыми условиями

$$T|_{t=0} = \Phi_0, \quad \beta_1 \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\Gamma} - \beta_2 T|_{\Gamma} = -\varphi(t). \quad (2)$$

При $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ получим первую краевую задачу.

При $\beta_1 = \Lambda$, $\beta_2 = 0$ получим вторую краевую задачу.

При $\beta_1 = -\Lambda$, $\beta_2 = \alpha$, $\varphi(t) = \alpha T$ получим третью краевую задачу. Здесь ρ — плотность, C_v — объемная теплоемкость материала, Λ — тензор теплопроводности анизотропной среды, f — внутренний распределенный источник тепла, \mathbf{n} — внешняя нормаль к границе области Γ , α — коэффициент теплопередачи, $T_{\text{ср}}$ — температура окружающей среды при конвективном теплообмене.

В общем случае для анизотропной среды тензор теплопроводности имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Рассмотрим прямоугольную слоистую в направлении оси Oz композитную пластинку (рис. 1) толщины H , состоящую из N слоев постоянной толщины δ_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Примем все слои композиции либо ортотропными, либо изотропными. Структура каждого слоя является либо армированной тонкими волокнами композицией, либо армированной частицами, либо изотропной, что позволяет использовать модель теплопроводности из [5; 6; 7]. Граница между i -м и $(i+1)$ -м слоями имеет координату l_{zi} ($i = 1, 2, \dots, N-1$). На границе раздела i -го и $(i+1)$ -го слоев задаются условия идеального теплового контакта:

$$T^i|_{z=l_{zi}} = T^{i+1}|_{z=l_{zi}}, \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} \quad (i = 1, 2, \dots, N-1) \quad (4)$$

Здесь λ_i , λ_{i+1} — эффективные значения коэффициента теплопроводности i -го и $(i+1)$ -го слоев соответственно в направлении оси Oz в точках с координатой $z = l_{zi}$.

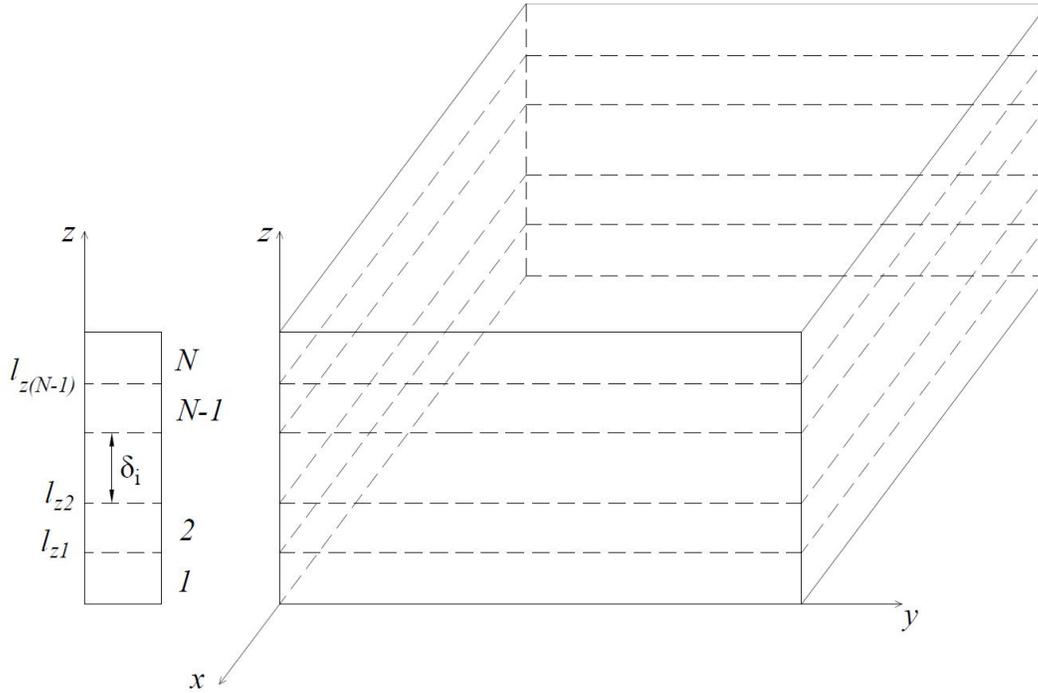


Рис. 1. Слоистая в направлении оси Oz прямоугольная пластинка.

Эффективные значения компонент тензора теплопроводности для рассматриваемой пластинки найдем по формулам [8]:

$$\Lambda_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k \Lambda_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, \quad \Lambda_{33} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{\bar{\Omega}_k}{\Lambda_{33}^{(k)}} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Здесь $\Lambda_{ij}^{(k)}$ — эффективные значения компонент тензора теплопроводности k -го слоя, взятые из [6; 7],

$$\bar{\Omega}_k = \frac{c_\varepsilon^k \delta_k}{c_\varepsilon H},$$

c_ε^k — осредненное значение массовой теплоемкости k -го слоя, c_ε — осредненное значение массовой теплоемкости по всей пластинке [6].

Предполагая, что направление армирования во всех слоях либо совпадает, либо угол между направлениями армирования в различных слоях составляет $\pi/2$, получим ортотропный композитный материал (во втором случае путем переименования компонент тензора теплопроводности $\Lambda_{11} \rightarrow \tilde{\Lambda}_{22}$, $\Lambda_{22} \rightarrow \tilde{\Lambda}_{11}$).

Тогда тензор теплопроводности (3) преобразуется к виду:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{33} \end{pmatrix},$$

а выражения (5) примут вид:

$$\Lambda_{ii} = \sum_{k=1}^N \bar{\Omega}_k \Lambda_{ii}^{(k)}, \quad i = 1, 2, \quad \Lambda_{33} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{\bar{\Omega}_k}{\Lambda_{33}^{(k)}} \right)^{-1}. \quad (6)$$

3. Методика решения

3.1 Одномерная стационарная задача. Распространение тепла вдоль плоскости слоев

Рассмотрение задачи теплопроводности многослойной композитной пластинки начнем со стационарной задачи, когда температурное поле не зависит от времени. Тогда в декартовых координатах уравнение теплопроводности (1), (2) запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y(y) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f(x, y, z) = 0, \quad (7)$$

$$\{0 \leq x \leq L_x; \quad 0 \leq y \leq L_y; \quad 0 \leq z \leq L_z\},$$

$$\begin{aligned} \left[\beta_{11}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} - \beta_{21}^x T^i \right] \Big|_{x=0} &= -\varphi_1^x, & \left[\beta_{12}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} - \beta_{22}^x T^i \right] \Big|_{x=L_x} &= -\varphi_2^x, \\ \left[\beta_{11}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} - \beta_{21}^y T^i \right] \Big|_{y=0} &= -\varphi_1^y, & \left[\beta_{12}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} - \beta_{22}^y T^i \right] \Big|_{y=L_y} &= -\varphi_2^y, \\ \left[\beta_{11}^z \frac{\partial T^0}{\partial z} - \beta_{21}^z T^0 \right] \Big|_{z=0} &= -\varphi_1^z, & \left[\beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial z} - \beta_{22}^z T^N \right] \Big|_{z=L_z} &= -\varphi_2^z. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь и далее предполагается, что $\Lambda_{11} = \lambda_x$, $\Lambda_{22} = \lambda_y$, $\Lambda_{33} = \lambda_z$.

Решение задачи (7), (8) начнем с рассмотрения одномерного случая одномерного случая.

Положим

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=L_y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L_z} = 0.$$

Такая ситуация может возникнуть, например, в случае, когда градиент температуры вдоль оси Ox много больше, чем вдоль осей Oy , Oz .

Тогда задача (7), (8) запишется в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dT}{dx} \right) + f(x, y, z) = 0, \quad \{0 \leq x \leq L\}, \quad (9)$$

$$\beta_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} - \beta_{21} T \Big|_{x=0} = -\varphi_1, \quad \beta_{12} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} - \beta_{22} T \Big|_{x=L} = -\varphi_2. \quad (10)$$

Такая задача модельно может представлять собой, например, теплоотводящие элементы систем охлаждения.

Решение уравнения (9) путем двукратного интегрирования находится в виде

$$T(x) = C_1 K(x) - P(x) + C_2, \quad (11)$$

где

$$K(x) = \int [\lambda_x(x)]^{-1} dx, \quad P(x) = \int F(x) [\lambda_x(x)]^{-1} dx, \quad F(x) = \int f(x) dx,$$

а константы интегрирования C_1 , C_2 находятся из краевых условий (10) и записываются в виде:

$$C_1 = \frac{\beta_{21} [\beta_{12} P'_L - \beta_{22} P_L + \beta_{22} P_0] + \beta_{22} \varphi_1 - \beta_{22} \beta_{11} P'_0}{\beta_{21} [\beta_{12} K'_L - \beta_{22} K_L + \beta_{22} K_0] - \beta_{22} \beta_{11} K'_0},$$

$$C_2 = \frac{1}{\beta_{21}} [C_1 (\beta_{11} K'_0 - \beta_{21} K_0) - \beta_{11} P'_0 + \beta_{21} P_0 + \varphi_1].$$

Здесь нижний индекс при K , P означает точку в которой вычисляются значения функций $K(x)$, $P(x)$, штрих сверху означает производную, например $K'_L = K'(L)$.

3.2 Одномерная стационарная задача. Распространение тепла перпендикулярно плоскости слоев

В случае, когда градиент температуры вдоль оси Oz максимален:

$$\frac{\partial T}{\partial z} \gg \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \gg \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (12)$$

целесообразно переписать задачу (7) – (8) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x^i \frac{\partial T^i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y^i \frac{\partial T^i}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z^i \frac{\partial T^i}{\partial z} \right) + f_i(x, y, z) = 0, \quad (13)$$

$$\left[\beta_{11}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} - \beta_{21}^x T^i \right] \Big|_{x=0} = -\varphi_1^x, \quad \left[\beta_{12}^x \frac{\partial T^i}{\partial x} - \beta_{22}^x T^i \right] \Big|_{x=Lx} = -\varphi_2^x, \quad (14)$$

$$\left[\beta_{11}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} - \beta_{21}^y T^i \right] \Big|_{y=0} = -\varphi_1^y, \quad \left[\beta_{12}^y \frac{\partial T^i}{\partial y} - \beta_{22}^y T^i \right] \Big|_{y=Ly} = -\varphi_2^y, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial T^1}{\partial z} - \beta_{21}^z T^1 \right] \Big|_{z=0} = -\varphi_1^z, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial T^N}{\partial z} - \beta_{22}^z T^N \right] \Big|_{z=Lz} = -\varphi_2^z, \quad (15)$$

и дополнить ее условиями сопряжения слоев (4):

$$T^i \Big|_{z=l_{zi}} = T^{i+1} \Big|_{z=l_{zi}}, \quad \lambda_z^i \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} = \lambda_z^{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (16)$$

Учитывая (12), уравнения (13) – (14) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_z^i(z) \frac{dT^i}{dz} \right) + f_i(z) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

Уравнения (17) дополним краевыми условиями (15) – (16). Решение уравнений (17), получается в виде аналогичном (11):

$$T^i(z) = A_i K_i(z) - P_i(z) + B_i, \quad (18)$$

где

$$K_i(x) = \int [\lambda_z^i(z)]^{-1} dz, \quad P_i(z) = \int \frac{\int f_i(z) dz}{\lambda_z^i(z)} dz,$$

а значения констант A_i , B_i находятся из краевых условий (15) – (16).

3.3 Нестационарная задача

Рассмотрим прямоугольную слоистую в направлении оси Oz композитную пластинку (рисунок 1) толщины H , состоящую из N слоев постоянной толщины δ_i ($i =$

1, 2, ..., N). Примем допущение о независимости приведенных коэффициентов теплопроводности от в каждом слое от пространственных координат, а также о равенстве приведенных коэффициентов теплопроводности вдоль осей Ox , Oy :

$$\lambda_x^i = \lambda_y^i = \lambda^i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Тогда уравнение теплопроводности (1), (2) запишется в виде:

$$\frac{\partial T^i}{\partial t} - \left(a_x^i \frac{\partial^2 T^i}{\partial x^2} + a_y^i \frac{\partial^2 T^i}{\partial y^2} + a_z^i \frac{\partial^2 T^i}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\rho_i C_{vi}} f(x, y, z, t), \quad (20)$$

$$\{0 \leq x \leq L_x; \quad 0 \leq y \leq L_y; \quad 0 \leq z \leq L_z\},$$

$$T^i(x, y, z, 0) = \Phi_{0i}(x, y, z), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

$$\left[\beta_{11}^x \frac{\partial T}{\partial x} - \beta_{21}^x T \right] \Big|_{x=0} = -\varphi_1^x, \quad \left[\beta_{12}^x \frac{\partial T}{\partial x} - \beta_{22}^x T \right] \Big|_{x=L_x} = -\varphi_2^x, \quad (22)$$

$$\left[\beta_{11}^y \frac{\partial T}{\partial y} - \beta_{21}^y T \right] \Big|_{y=0} = -\varphi_1^y, \quad \left[\beta_{12}^y \frac{\partial T}{\partial y} - \beta_{22}^y T \right] \Big|_{y=L_y} = -\varphi_2^y, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (23)$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial T}{\partial z} - \beta_{21}^z T \right] \Big|_{z=0} = -\varphi_1^z, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial T}{\partial z} - \beta_{22}^z T \right] \Big|_{z=L_z} = -\varphi_2^z, \quad (24)$$

с условиями сопряжения слоев (4). Здесь $a_k^i = \lambda_k^i / \rho_i C_{vi}$ ($k = \langle x \rangle, \langle y \rangle, \text{ или } \langle z \rangle$).

Решение задачи (20) – (24) будем искать с помощью метода конечных интегральных преобразований [8].

Для исключения координат x , y используем формулу перехода к изображениям (индекс i опущен):

$$\bar{T}(z, t) = \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} T(x, y, z, t) P(x, y) dy dx, \quad (25)$$

где $P(x, y)$ – ядро интегрального преобразования, являющееся решением задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \mu^2 P(x, y) = 0, \quad (26)$$

$$\left[\beta_{11}^x \frac{\partial P}{\partial x} - \beta_{21}^x P \right] \Big|_{x=0} = 0, \quad \left[\beta_{12}^x \frac{\partial P}{\partial x} - \beta_{22}^x P \right] \Big|_{x=L_x} = 0 \quad (27)$$

$$\left[\beta_{11}^y \frac{\partial P}{\partial y} - \beta_{21}^y P \right] \Big|_{y=0} = 0, \quad \left[\beta_{12}^y \frac{\partial P}{\partial y} - \beta_{22}^y P \right] \Big|_{y=L_y} = 0. \quad (28)$$

Общее решение уравнения (26) имеет вид [9]:

$$P(x, y) = [C_{1x} \cos(\gamma x) + C_{2x} \sin(\gamma x)] [C_{1y} \cos(\eta y) + C_{2y} \sin(\eta y)]$$

Значения коэффициентов C_{1x} , C_{2x} , C_{1y} , C_{2y} определяются из однородных граничных условия (27), (28).

Обратное преобразование задается формулой:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_{nm}(x, y)}{\|P_{nm}\|^2} \bar{T}(z, t), \quad (29)$$

где $\|P_{nm}\|^2$ – квадрат нормы функции $P(x, y)$.

Применяя преобразование (25) к задаче (20) – (24) и учитывая что $\mu^2 = \eta^2 + \gamma^2$ [9] получаем:

$$\frac{\partial \bar{T}^i}{\partial t} - \left(a^i \mu^2 \bar{T} + a_z^i \frac{\partial^2 \bar{T}^i}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{\rho_i C_{vi}} \bar{f}(z, t) + I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (30)$$

$$\bar{T}^i(z, 0) = \bar{\Phi}_{0i}(z), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (31)$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} - \beta_{21}^z \bar{T}^i \right] \Big|_{z=0} = -\varphi_1^z, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial \bar{T}^i}{\partial z} - \beta_{22}^z \bar{T}^i \right] \Big|_{z=Lz} = -\varphi_2^z. \quad (32)$$

Здесь $a^i = \lambda^i / \rho_i C_{vi}$, I_1, I_2, I_3, I_4 – выражения определяемые из краевых условий (22) – (23),

$$\bar{f}_i(z, t) = \int_0^{Lx} \int_0^{Ly} f_i(x, y, z, t) P(x, y) dy dx,$$

$$\bar{\Phi}_{0i}(r, \mu) = \int_0^{Lx} \int_0^{Ly} \Phi_{0i}(x, y, z) P(x, y) dy dx.$$

Аналогичным методом исключим из уравнения (30) координату z . Положим:

$$\bar{\bar{T}}^i(t) = \frac{\lambda_z^i}{a_z^i} \int_{Lz(i-1)}^{Lzi} \bar{T}^i(z, t) W^i(z) dz.$$

Для исключения координаты z , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато воспользуемся формулой [10]:

$$\bar{\bar{T}}(t) = \sum_{i=1}^N \bar{\bar{T}}^i = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_z^i}{a_z^i} \int_{Lz(i-1)}^{Lzi} \bar{T}^i(z, t) W^i(z) dz. \quad (33)$$

Здесь $W^i(z)$ – ядро интегрального преобразования, являющееся решением задачи Штурма-Лиувилля с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 W^i}{dz^2} + \zeta^2 W^i(z) = 0, \quad (34)$$

$$\left[\beta_{11}^z \frac{\partial W^i}{\partial z} - \beta_{21}^z W^i \right] \Big|_{z=0} = 0, \quad \left[\beta_{12}^z \frac{\partial W^i}{\partial z} - \beta_{22}^z W^i \right] \Big|_{z=Lz} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (35)$$

$$T^i|_{z=l_{zi}} = T^{i+1}|_{z=l_{zi}}, \quad \lambda_i \frac{\partial T^i}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} = \lambda_{i+1} \frac{\partial T^{i+1}}{\partial z} \Big|_{z=l_{zi}} \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (36)$$

Общее решение уравнения (34) ищется в виде:

$$W^i(z) = C_{1i} \cos(\zeta x) + C_{2i} \sin(\zeta x), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Обратное преобразование задается в виде:

$$\bar{\bar{T}}^i(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W^i(z)}{\|W_n\|^2} \bar{\bar{T}}^i(t). \quad (37)$$

Применяя преобразование (33) к задаче (30) – (32), получаем:

$$\frac{d\bar{T}}{dt} + \xi^2 \bar{T} = \bar{f}(t) + \bar{G}, \quad (38)$$

$$\bar{T}(0) = \bar{\Phi}_0, \quad (39)$$

где $\xi^2 = \sum a_i \mu^2 + \varsigma^2$, \bar{G} определяется из краевых условий (4), (32) с учетом выражений I_1, I_2, I_3, I_4 из формулы (30),

$$\bar{f}(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{a_i} \int_{Lz(i-1)}^{Lzi} \bar{f}_i(z, t) W(r) dz, \quad \bar{\Phi}_0 = \sum_{i=1}^N \int_{Lz(i-1)}^{Lzi} \bar{\Phi}_{0i}(z) W(r) dz.$$

Решение задачи (38), (39) ищется в виде

$$\bar{T}(t) = \bar{\Phi}_0 \exp(-\xi^2 t) + \bar{K}(t), \quad (40)$$

где $\bar{K}(t)$ – какое-то частное решение неоднородного уравнения (40).

Обратное преобразование по формулам (29), (37) дает нам решение исходной задачи (20) – (24) в виде тройного бесконечного ряда:

$$T^i(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_{nm}^i(x, y) W_k^i(z)}{\|P_{nm}\|^2 \|W_m\|^2} \bar{T}(t). \quad (41)$$

Отметим, что если отказаться от допущения (19), то задача решается аналогичным образом с тем лишь исключением, что координаты x, y исключаются последовательно.

3.4 Случай тонких слоев

Для случая тонких слоев, когда

$$L_z \ll L_x, \quad L_z \ll L_y$$

задачу (20) – (24) можно упростить, аппроксимировав распределение температуры вдоль оси Oz по квадратичному закону [11]. Положим

$$T^i(x, y, z, t) = T_1^i(x, y, t) T_z^i(z),$$

где

$$T_z^i(z) = z^2 + b_i z + c_i.$$

Коэффициенты b_i, c_i находятся из краевых условий (4), (24). Далее, повторяя рассуждения (25) – (32) практически дословно, получим решение задачи (20) – (24) в виде аналогичном (41) за исключением того, что общее решение будет представлено в виде двойного ряда, а не тройного.

Заключение

Таким образом получена функциональная связь между структурными параметрами армирования (интенсивность и направление армирования в каждом из слоев композиции, удельное содержание каждого из слоев в многослойном пакете) и распределением температуры в теле, что позволяет поставить как задачу оптимального проектирования, так и задачу управления температурными полем внутри композитной пластинки путем варьирования структурных параметров армирования. Такие задачи особенно важны при конструировании систем охлаждения технических устройств и

особенно летательных аппаратов, где широко применяются композитные конструкции, позволяющие создавать требуемые условия теплообменников при минимальном расходе материала теплообменника или его весе.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Авдуевский В. С. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической техни-ке. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
- [2] Иванов В. Л. Леонтьев А. И. Манушин Э. А. Осипов М. И Теплообменные аппараты и системы охлаждения газотурбинных и комбинированных установок: учебник для вузов. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 592 с.
- [3] Марченко В. М. Температурные поля и напряжения в конструкциях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1965. 298 с.
- [4] Поварницын М. С. Исследование температурного поля в трехслойной пластине с сотовым наполнителем при несимметричном нагреве // Инженерно-физический журнал. 1961. № 10. Т. 4. С. 64–70.
- [5] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Влияние формы и расположения армирующих элементов на тепловые свойства композитов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 3–24.
- [6] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Теплопроводность пакета полиармированных слоев // Вестник КемГУ. 2015. № 4 (64). Т. 3. С. 177–183.
- [7] Немировский Ю. В., Станиславович А. В. Моделирование теплопроводности гибридных бетонных композитных материалов // Международная конференция „Математика и информационные технологии в нефтегазовом комплексе“, посвящённая дню рождения великого русского математика академика П. Л. Чебышёва: Тезисы. Сургут : ИЦ СурГУ, 2016. С. 247–248.
- [8] Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М: Высш. шк., 2001. 550 с.
- [9] Боголюбов А. Н. Кравцов В. В. Светников А. Г. Лекции по математической физике: Учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
- [10] Туголуков Е. Н. Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований при автоматизированном проектировании технологического оборудования химической промышленности. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та., 2006. 116 с.
- [11] Немировский Ю. В. Янковский А. П. Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. Новосибирск: Изд-во «Арт-Авеню», 2008. 512 с.

Yu. V. Nemirovskii, A. V. Stanislavovich

SOME PROBLEMS OF THERMAL CONDUCTIVITY OF RECTANGULAR MULTILAYER COMPOSITE PLATES

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, the Siberian Branch RAS,
Novosibirsk, Russia*

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia

Abstract. The paper presents the structural mathematical model of thermal conductivity of multilayer composite plates. Each layer of plate which is under consideration is either isotropic material or fi-ber composite or dispersion-strengthened composite or honeycomb composite structure. An analytical solution method for steady and non-steady heat conduction problem is proposed for specified plates.

Keywords: thermal conductivity, analytical solutions, composite materials, multilayer plates.

REFERENCES

- [1] Avduevskij V. S. Osnovy teploperedachi v aviacionnoj i raketno-kosmicheskoy tekhnike. 2-e izd. M.: Mashinostroenie, 1992. 528 s. (in Russian)
- [2] Ivanov V. L. Leont'ev A. I. Manushin EH. A. Osipov M. I Teploobmennye apparaty i sistemy ohlazhdeniya gazoturbinnih i kombinirovannyh ustanovok: uchebnik dlya vuzov. 2-e izd. M.: Izd-vo MGTU im. N. EH. Baumana, 2004. 592 s. (in Russian)
- [3] Marchenko V. M. Temperaturnye polya i napryazheniya v konstrukciyah letatel'nyh apparatov. M.: Mashinostroenie, 1965. 298 s. (in Russian)
- [4] Povarnicyn M. S. Issledovanie temperaturnogo polya v trekhslojnoj plastine s sotovym zapolnitelem pri nesimmetrichnom nagreve // Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1961. № 10. T. 4. S. 64–70. (in Russian)
- [5] Nemirovskij YU. V., Stanislavovich A. V. Vliyanie formy i raspolozheniya armiruyushchih ehlementov na teplovyje svojstva kompozitov // Vestnik CHuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. YA. YAKovleva. Seriya: mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2015. № 4 (26). S. 3–24. (in Russian)
- [6] Nemirovskij YU. V., Stanislavovich A. V. Teploprovodnost' paketa poliarmirovannyh sloev // Vestnik KemGU. 2015. № 4 (64). T. 3. S. 177–183. (in Russian)
- [7] Nemirovskij YU. V., Stanislavovich A. V. Modelirovanie teploprovodnosti gibridnyh betonnyh kompozitnyh materialov // Mezhdunarodnaya konferenciya „Matematika i informacionnye tekhnologii v neftegazovom kom-plekse“, posvyashchyonnaya dnyu rozhdeniya velikogo russkogo matematika akademika P. L. CHEbyshyova: Tezisy. Surgut : IC SurGU, 2016. S. 247–248. (in Russian)
- [8] Kartashov EH. M. Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdyh tel. M: Vyssh. shk., 2001. 550 s. (in Russian)

Nemirovskii Yuriy Vladimirovich

e-mail: nemiryury@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, the Siberian Branch RAS, Novosibirsk, Russia.

Stanislavovich Alexey Vyacheslavovich

e-mail: alexey.stv@bk.ru, Leading Specialist, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russia.

[9] Bogolyubov A. N. Kravcov V. V. Svetnikov A. G. Lekcii po matematičeskoj fizike: Učeb. posobie. M.: Izd-vo MGU, 1993. 352 s. (in Russian)

[10] Tugolukov E. N. Reshenie zadach teploprovodnosti metodom konečnyh integral'nyh preobrazovanij pri avtomatizirovannom proek-tirovanii tekhnologičeskogo oborudovaniya himičeskoj promyš-lennosti. Tambov: Izd-vo Tamb. gos. tekhn. un-ta., 2006. 116 s. (in Russian)

[11] Nemirovskij YU. V. YAnkovskij A. P. Teploprovodnost' odnorodnyh i kompozitnyh tonkostennyh konstrukcij. Novosibirsk: Izd-vo «Art-Avenyu», 2008. 512 s. (in Russian)