

Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов

## КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ СЕЧЕНИЕМ

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

**Аннотация.** В работе рассмотрено кручение неоднородного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением. Определено напряженное состояние стержня, построено поле характеристик основных соотношений, найдены линии разрыва напряжений.

**Ключевые слова:** Кручение, напряжение, пластичность, анизотропия, неоднородность.

УДК: 539.735

Кручение изотропных и анизотропных идеальнопластических стержней рассмотрено в работах [1]-[4]. Кручение неоднородных идеальнопластических стержней исследовано в [5]-[7].

Рассмотрим цилиндрический идеальнопластический стержень, ориентированный в прямоугольной системе координат  $xuz$ . Ось  $z$  направлена параллельно образующим стержня. Контур сечения стержня плоскостью  $z = const$  есть эллипс:  $\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1$ .

Предположим, что сечение стержня состоит из двух анизотропных областей, разделенных ломаной  $AOB$  (рис. 1).

Стержень закручивается вокруг оси  $z$  равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

условиями пластичности

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_1^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_1^2} = 1 \quad (2)$$

---

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. 2018

*Миронов Борис Гурьевич*

**e-mail:** mirovov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

*Миронов Юрий Борисович*

**e-mail:** e-mail: mistifm@gmail.com, кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Поступила 16.09.2018

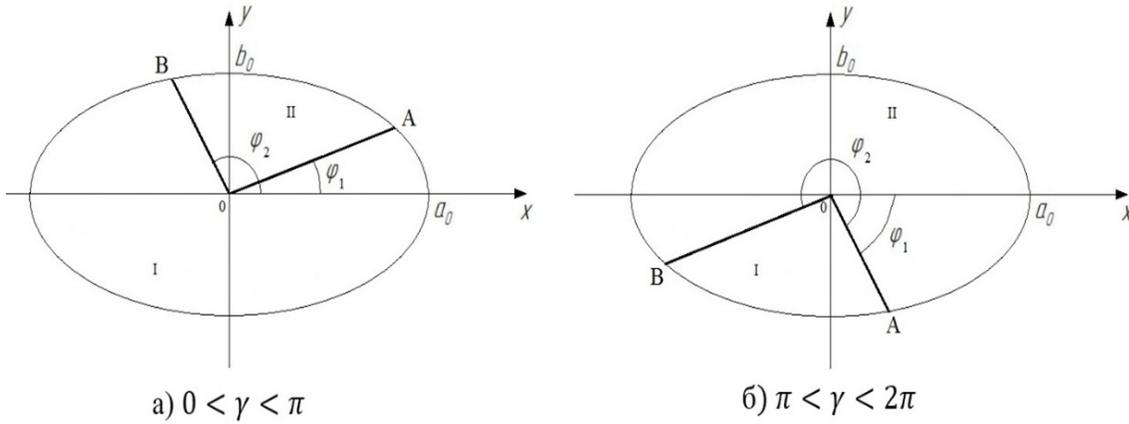


Рис. 1.

в области I,

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_2^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_2^2} = 1 \quad (3)$$

в области II,

уравнением равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

где  $b_1 \leq b_2$ ,  $a_1 \leq a_2$ .

Согласно [3] характеристики соотношения (4) в каждой области есть прямые, ортогональные вектору градиента к кривым (2) и (3) соответственно. Вектор касательного напряжения

$$\bar{\tau} = \tau_{xz} \bar{i} + \tau_{yz} \bar{j}, \quad (5)$$

не меняется вдоль характеристик и направлен по касательной к контуру поперечного сечения стержня.

Пусть

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_0}{a_0}. \quad (6)$$

Тогда уравнение характеристик в обоих областях имеет вид

$$y = \frac{y_0}{x_0} x, \quad (7)$$

где

$$\frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} = 1. \quad (8)$$

Вектор касательного напряжения  $\bar{\tau}$  в областях I и II определяется соответственно соотношениями

$$\bar{\tau} = -\frac{a_1}{b_0} y_0 \bar{i} + \frac{b_1}{a_0} x_0 \bar{j}, \quad (9)$$

$$\bar{\tau} = -\frac{a_2}{b_0} y_0 \bar{i} + \frac{b_2}{a_0} x_0 \bar{j}. \quad (10)$$

На линии неоднородности  $AOB$  неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через ломанную  $AOB$  вектор касательного напряжения  $\vec{\tau}$ , а соответственно и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. А это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений  $AC$ ,  $BC$  и  $CO$  области II (рис. 2а, 2б).

Пусть точка  $A$  имеет координаты  $(x_1, y_1)$  а точка  $B - (x_2, y_2)$ . Тогда

$$tg\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}, tg\varphi_2 = \frac{y_2}{x_2}, \tag{11}$$

где  $\varphi_1$  – угол, образованный линией неоднородности  $OA$  с осью  $Ox$ ,  $\varphi_2$  – угол, образованный линией неоднородности  $OB$  с осью  $Ox$ . Предположим, что  $0 < \gamma < 2\pi$ ,  $\gamma = \varphi_2 - \varphi_1$

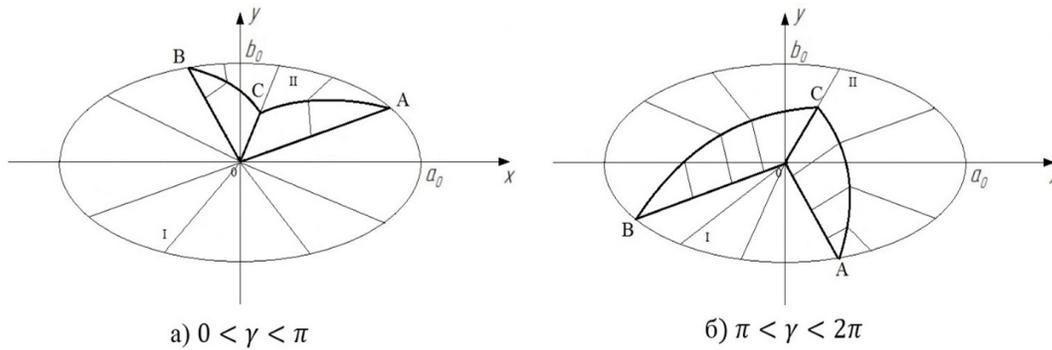


Рис. 2.

Тогда вектор касательного напряжения  $\vec{\tau}_2$  в области, ограниченной замкнутой кривой  $OACO$ , определяется соотношением

$$\vec{\tau}_2 = \left( mx_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) \vec{i} + \left( \frac{b_1}{a_0} x_1 + m y_1 \right) \vec{j}, \tag{12}$$

где  $m = \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} = \frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0}$ .

Характеристики в этой области задаются уравнением

$$b_2^2 \left( mx_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) x + a_2^2 \left( \frac{b_1}{a_0} x_1 + m y_1 \right) y = const. \tag{13}$$

Линия разрыва напряжений  $AC$  определяется из дифференциального уравнения

$$\left( \frac{b_2 b_0 x}{\sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2}} - \left( \frac{b_1}{a_0} x_1 + m y_1 \right) \right) dx + \left( \frac{a_2 a_0 y}{\sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2}} - \left( mx_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) \right) dy = 0. \tag{14}$$

Согласно (14) уравнение линии разрыва напряжений  $AC$  имеет вид

$$\frac{b_2}{b_0} \sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2} - \left( \frac{b_1}{a_0} x_1 + m y_1 \right) x + \left( mx_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) y = a_0 (b_2 - b_1). \tag{15}$$

Вектор касательного напряжения  $\vec{\tau}_2''$  в области, ограниченной замкнутой кривой  $OBCO$ , определяется соотношением

$$\vec{\tau}_2'' = \left( mx_2 - \frac{a_1}{b_0} y_2 \right) \vec{i} + \left( \frac{b_1}{a_0} - my_2 \right) \vec{j}. \quad (16)$$

Характеристики в этой области задаются уравнением

$$b_2^2 \left( -mx_2 - \frac{a_1}{b_0} y_2 \right) x + a_2^2 \left( \frac{b_1}{a_0} x_2 - my_2 \right) y = const. \quad (17)$$

Линия разрыва напряжений  $BC$  определяется из дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} & \left( \frac{b_2 b_0 x}{\sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2}} + \left( -\frac{b_1}{a_0} x_2 + my_2 \right) \right) dx + \\ & + \left( \frac{a_2 a_0 y}{\sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2}} - \left( mx_2 + \frac{a_1}{b_0} y_2 \right) \right) dy = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно (18) уравнение линии разрыва напряжений  $BC$  имеет вид

$$\frac{b_2}{b_0} \sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2} + \left( -\frac{b_1}{a_0} x_2 + my_2 \right) x - \left( mx_2 + \frac{a_1}{b_0} y_2 \right) y = a_0 (b_2 - b_1). \quad (19)$$

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966.
- [3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2012. № 4 С. 108–112.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. О кручении цилиндрических анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. № 9 с. 150–155.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я., Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. М.: Мир, 1964.
- [6] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К вопросу о кручении призматических стержней с включением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 2 (32) с. 18–22.
- [7] Миронов Б.Г. О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №3(33) с. 95–100.

B. G. Mironov, Yu. B. Mironov

## TORSION OF A NON-UNIFORM CYLINDRICAL ROD WITH AN ELLIPTICAL SECTION

*Federal State Institution of Education "Russian University of Transport Moscow, Russia*

*Moscow Technical University of Communication and Informatics, Moscow, Russia*

**Abstract.** The torsion of an inhomogeneous cylindrical rod with an elliptic cross section is considered. The stress state of the rod was determined, the field of the characteristics of the main relations was constructed, the lines of stress rupture were found.

**Keywords:** torsion, stress, plasticity, anisotropy, inhomogeneity.

### REFERENCES

- [1] Bykovcev G. I., Ivlev D. D. Teoriya plastichnosti. Vlydivostok: Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
- [2] Ivlev D. D. Teoriya ideal'noj plastichnosti. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
- [3] Derevjannyh E. A., Mironov B. G. Ob obshhikh sootnoshenijah teorii kruchenija anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojaniya. 2012. No. 4. P. 108–112. (in Russian).
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. O kruchenii cilindricheskikh anizotropnyh sterzhnej // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojaniya. 2011. No 9. P. 150–155. (in Russian).
- [5] Ol'shak V., Ryhlevskij Ja., Urbanovskij V. Teoriya plastichnosti neodnorodnyh tel. M.: Mir, 1964. 156 p. (in Russian).
- [6] Mironov B. G., Mironov Yu. B. About torsion of piecewise isotropic prismatic cores with inclusion // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I. Ja. Jakovleva. Serija: Mehanika predel'nogo sostojaniya. 2017. No 2. (32). P. 18–22. (in Russian).
- [7] Mironov B.G. O kruchenii tsilindricheskogo neodnorodnogo sterzhnya s krugovym secheniyem // Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.YA. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya. 2017. No 3(33). P. 95–100. (in Russian).

---

*Mironov Boris Guryevich*

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Federal State Institution of Education "Russian University of Transport Moscow, Russia.

*Mironov Yuriy Borisovich*

e-mail: mistifm@gmail.com, Ph. D., Moscow Technical University of Communication and Informatics (MTUCI), Moscow, Russia.