

Б. Г. Миронов, Ю. Б. Миронов

К ТЕОРИИ КРУЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия

Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Аннотация. В работе исследовано кручение анизотропного и составного стержней с эллиптическим сечением при условии пластичности Мизеса-Хилла. Получены интегралы, определяющие напряженное состояние анизотропного стержня, построено поле характеристик основных соотношений для анизотропного стержня при условии пластичности Мизеса-Хилла, получены соотношения вдоль характеристик, найдена огибающая семейства характеристик, определен предельный крутящий момент. Для составного стержня определено напряженное состояние, построено поле характеристик, получены соотношения вдоль характеристик и найдены линии разрыва напряжений.

Ключевые слова: напряжение, пластичность, условие пластичности, деформация, анизотропия, неоднородность.

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.001

УДК: 539.735

Введение.

Кручение представляет собой один из видов деформации тел, характеризующийся взаимным поворотом его поперечных сечений под влиянием моментов, действующих в этих сечениях. Кручение стержней в инженерной практике встречается довольно часто, особенно в машиностроении. На кручение работают валы двигателей и станков, оси вагонов и локомотивов, винтовые пружины и т.п. Теория кручения изотропных и анизотропных стержней принадлежит к числу разработанных разделов теории идеального жесткопластического тела. Вместе с тем, исследований по теории кручения

© Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. 2019

Миронов Борис Гурьевич

e-mail: mirovov.boris.21@gmail.com, доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет транспорта (МИИТ), г. Москва, Россия.

Миронов Юрий Борисович

e-mail: mistifn@gmail.com, кандидат физико-математических наук, Московский технический университет связи и информатики, г. Москва, Россия

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-41-210272.

Поступила 20.02.2019

неоднородных стержней недостаточно. В частности, исследования по теории кручения изотропных и анизотропных идеальных жесткопластических стержней представлены в работах [1]-[4]. Кручение неоднородных и составных стержней рассмотрены в работах [5]-[7]. Результаты, полученные в работе, могут быть применены в машиностроении при определении предельных нагрузок на стержень в результате кручения, при решении новых задач теории предельного состояния, при расчетах несущей способности различных тел и конструкций.

Основные результаты Рассмотрим цилиндрический стержень, контур L поперечного сечения которого есть эллипс (см. рис. 1а)

$$L : \frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1. \quad (1)$$

Образующие стержня параллельны оси z . Предположим, что стержень состоит из анизотропного идеального жесткопластического материала. Стержень закручивается вокруг своей оси, боковая поверхность стержня свободна от нагрузок.

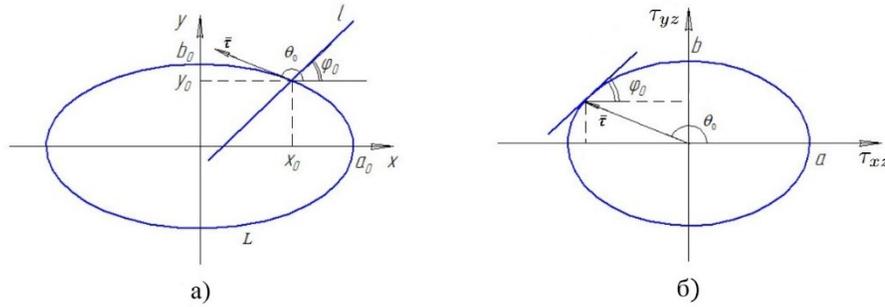


Рис. 1. Сечение анизотропного стержня с характеристикой и кривая текучести.

Напряженное состояние, возникающее в стержне, характеризуется следующими значениями компонент напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y), \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y). \end{aligned} \quad (2)$$

Предположим, что условие пластичности задано в виде (см. рис. 1б)

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b^2} = 1, \quad (3)$$

а единственное уравнение равновесия имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Пусть точка $(x_0, y_0) \in L$, и через нее проходит характеристика l соотношения (4).

Согласно [3], [4] и [5] уравнение семейства характеристик l имеет вид

$$a^2 b_0^2 x_0 (y - y_0) - a_0^2 b^2 y_0 (x - x_0) = 0, \quad (5)$$

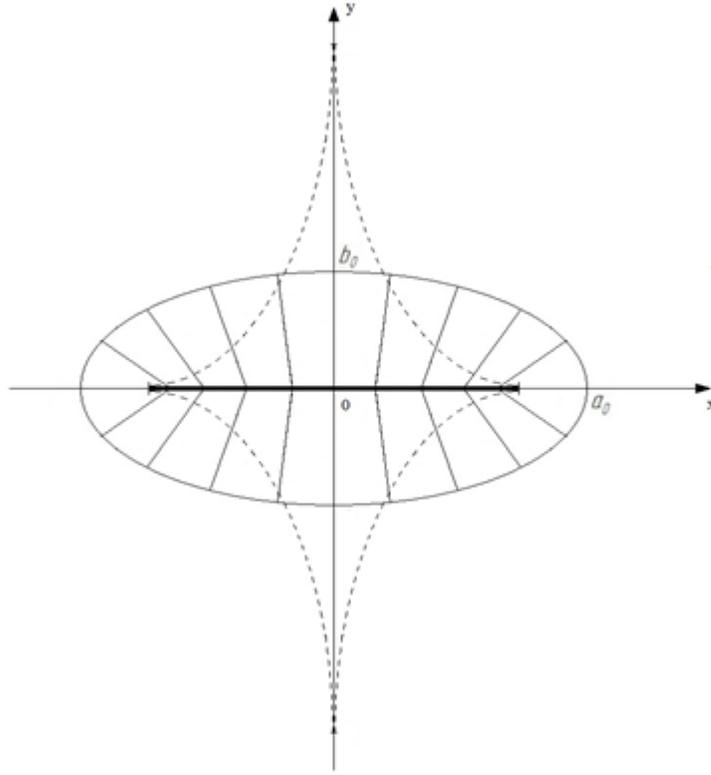


Рис. 2. Поле характеристик и огибающая.

а вдоль характеристик компоненты напряжения задаются в виде

$$\tau_{xz} = -\frac{a_0^2 a b y_0}{\sqrt{a_0^4 b^2 y_0^2 + b_0^4 a^2 x_0^2}}, \quad \tau_{yz} = \frac{b_0^2 a b x_0}{\sqrt{a_0^4 b^2 y_0^2 + b_0^4 a^2 x_0^2}}. \quad (6)$$

Семейство характеристик (5) имеет огибающую (см. рис. 2)

$$(a_0 b^2 x)^{\frac{2}{3}} + (b_0 a^2 y)^{\frac{2}{3}} = (a_0^2 b^2 - a^2 b_0^2)^{\frac{2}{3}}. \quad (7)$$

На рис. 2 характеристики нарисованы сплошными линиями, а огибающая характеристик – пунктирными. Отрезок EF есть линия разрыва напряжений.

В частности, если выполняется равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{a_0}{b_0}, \quad (8)$$

то соотношения (5) и (6) примут вид

$$y = \frac{y_0}{x_0} x \quad (9)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{a y_0}{b_0}, \quad \tau_{yz} = \frac{b x_0}{a_0}. \quad (10)$$

При этом огибающая (7) и линия разрыва напряжений EF вырождаются в начало координат.

Пусть

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad (11)$$

Тогда

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (12)$$

Положим

$$x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0, \quad y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0 \quad (13)$$

где

$$\rho_0 = \frac{a_0 b_0}{\sqrt{b_0^2 \cos^2 \varphi_0 + a_0^2 \sin^2 \varphi_0}}. \quad (14)$$

Согласно (11)-(49) соотношения (9), (10) примут вид

$$\varphi = \varphi_0 \quad (15)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{a_0 a \sin \varphi}{\sqrt{b_0^2 \cos^2 \varphi + a_0^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \tau_{yz} = -\frac{b_0 b \cos \varphi}{\sqrt{b_0^2 \cos^2 \varphi + a_0^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (16)$$

Предельный крутящий момент определим из соотношения

$$M = \iint (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) dx dy \quad (17)$$

где интегрирование берется по поперечному сечению стержня.

С учетом (11), (16) из соотношения (17) следует

$$M = \frac{2}{3} \pi a_0^2 b_0 b \quad (18)$$

Рассмотрим составной цилиндрический идеальный жесткопластический стержень. Контур сечения стержня плоскостью $z = \text{const}$ определяется соотношением (1).

Предположим, что сечение стержня состоит из двух анизотропных областей, разделенных прямой AB (см. рис. 3).

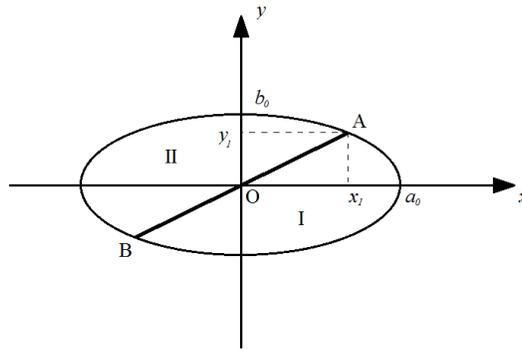


Рис. 3. Сечение составного стержня.

Стержень закручивается вокруг оси z равными и противоположными парами сил. Боковая поверхность стержня считается свободной от нагрузок.

Напряженное состояние стержня определяется соотношениями (2), уравнением равновесия (4) и условиями пластичности

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_1^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_1^2} = 1 \quad (19)$$

в области I,

$$\frac{\tau_{xz}^2}{a_2^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{b_2^2} = 1 \quad (20)$$

в области II, где $b_1 \leq b_2$, $a_1 \leq a_2$

Согласно [3] характеристики соотношения (4) в каждой области есть прямые, ортогональные вектору градиента к кривым (19) и (20) соответственно.

Вектор касательного напряжения:

$$\vec{\tau} = \tau_{xz}\vec{i} + \tau_{yz}\vec{j}, \quad (21)$$

не меняется вдоль характеристик и направлен по касательной к контуру (1) поперечного сечения стержня.

Пусть

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_0}{a_0}. \quad (22)$$

Тогда уравнение характеристик в обеих областях имеет вид (14).

Согласно (10), вектор касательного напряжения $\vec{\tau}$ в областях I и II определяется соответственно соотношениями

$$\vec{\tau} = -\frac{a_1}{b_0}y_0\vec{i} + \frac{b_1}{a_0}x_0\vec{j}, \quad (23)$$

$$\vec{\tau} = -\frac{a_2}{b_0}y_0\vec{i} + \frac{b_2}{a_0}x_0\vec{j}. \quad (24)$$

На линии неоднородности неизбежен скачок касательных напряжений. Поэтому при переходе через линию AB вектор касательного напряжения $\vec{\tau}$, а соответственно и характеристики соотношения (4) меняют свое направление. А это приводит к дополнительным линиям разрыва напряжений области II (рис. 3), выходящим из точек A и B

Пусть точка A имеет координаты (x_1, y_1) а точка $B - (-x_1 - y_1)$. Тогда

$$tg\varphi_1 = \frac{y_1}{x_1}, \quad \rho_1 = \frac{a_0 b_0}{\sqrt{b_0^2 \cos^2 \varphi_1 + a_0^2 \sin^2 \varphi_1}} \quad (25)$$

где φ_1 – угол, образованный линией OA с осью Ox , ρ_1 – расстояние от точки O до точки A

Вектор касательного напряжения $\vec{\tau}_2^{\rightarrow}$ в области, ограниченной замкнутой кривой $OACO$, определяется соотношением

$$\vec{\tau}_2^{\rightarrow} = \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) \vec{i} + \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) \vec{j}. \quad (26)$$

Характеристики в этой области задаются уравнением

$$b_2^2 \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) x + a_2^2 \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) y = const \quad (27)$$

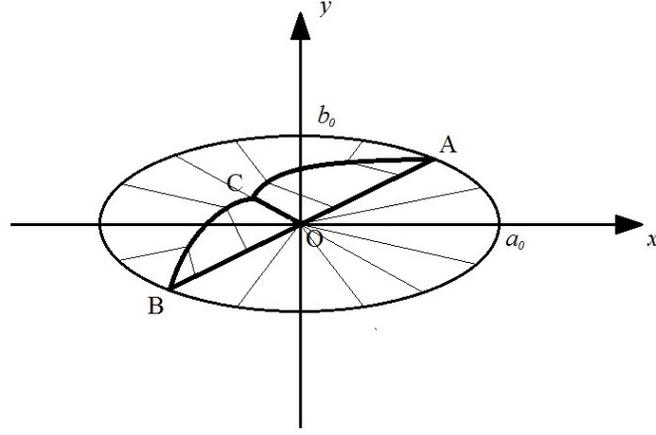


Рис. 4. Поле характеристик и линии разрыва напряжений.

Уравнение линии разрыва напряжений AC имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_0} \sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2} - \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) x + \\ + \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 - \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) y = a_0 (b_2 - b_1). \end{aligned} \quad (28)$$

Вектор касательного напряжения $\vec{\tau}_2''$ в области, ограниченной замкнутой кривой $OBCO$, определяется соотношением

$$\vec{\tau}_2'' = \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 + \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) \vec{i} + \left(-\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) \vec{j}. \quad (29)$$

Характеристики в этой области задаются уравнением

$$b_2^2 \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 + \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) x + a_2^2 \left(-\frac{b_1}{a_0} x_1 + \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) y = const \quad (30)$$

Уравнение линии разрыва напряжений BC имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_0} \sqrt{b_0^2 x^2 + a_0^2 y^2} + \left(\frac{b_1}{a_0} x_1 - \frac{\sqrt{a_2^2 - a_1^2}}{a_0} y_1 \right) x + \\ + \left(\frac{\sqrt{b_2^2 - b_1^2}}{b_0} x_1 + \frac{a_1}{b_0} y_1 \right) y = a_0 (b_2 - b_1). \end{aligned} \quad (31)$$

Точка C определяется из соотношений (33) и (36). Отрезок OC является линией разрыва напряжений. На рис. 4 характеристики основных соотношений нарисованы тонкими линиями, а линии разрыва напряжений – жирными.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток: Дальнаука, 1998. 528 с.
- [2] Ивлев Д. Д. Теория идеальной пластичности. Москва: Наука, 1966. 232 с.
- [3] Деревянных Е. А., Миронов Б. Г. Об общих соотношениях теории кручения анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2012. №4(76). С. 108–112.
- [4] Миронов Б. Г., Митрофанова Т. В. К вопросу о кручении анизотропных стержней // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния. 2015. №1(22). С. 197–200.
- [5] Ольшак В., Рыхлевский Я. , Урбановский В. Теория пластичности неоднородных тел. Москва: Мир, 1964.
- [6] Миронов Б. Г. О кручении цилиндрического неоднородного стержня с круговым сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. №3(33). С. 95–100.
- [7] Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. К Кручение неоднородного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 173–177.

B. G. Mironov, Yu. B. Mironov

ON THE THEORY OF TORSION OF COMPOSITE CYLINDRICAL RODS

Federal State Institution of Education «Russian University of Transport», Moscow, Russia

Moscow Technical University of Communication and Informatics, Moscow, Russia

Abstract. In the work, the torsion of anisotropic and composite rods is investigated. with elliptic section, subject to the von Mises-Hill plasticity. Received integrals determining the stress state of an anisotropic rod, a field of characteristics of the basic relations for an anisotropic rod is constructed under the condition of the Mises-Hill plasticity, we obtain relations along characteristics, found the envelope of the family of characteristics, defined ultimate torque for a composite rod, the stress is determined state, built field of characteristics, obtained ratios along characteristics and found the line break stress.

Keywords: stress, plasticity, plasticity condition, deformation, anisotropy, heterogeneity.

REFERENCES

- [1] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. The theory of plasticity. Vladivostok: Dalnauka, 1998. 528 p. (in Russian)
- [2] Ivlev D. D. The theory of perfect plasticity. Moscow: Nauka, 1966. 232 p. (in Russian)
- [3] Derevyannyh E. A., Mironov B. G. On general relations of anisotropic torsion theory rods // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. 2012. №4 (76). P. 108–112. (in Russian)
- [4] Mironov B. G., Mitrofanova T. V. On the question of torsion of anisotropic rods // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2015. №1 (22). P. 197–200. (in Russian)
- [5] Olshak V., Rykhlevsky Ya., Urbanovsky V. The theory of plasticity of inhomogeneous bodies. Moscow: Mir, 1964. (in Russian)
- [6] Mironov B. G. On the torsion of a cylindrical inhomogeneous rod with a circular section // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2017. №3 (33). P. 95–100. (in Russian)
- [7] Mironov B. G., Mironov Yu. B. K Torsion of a heterogeneous cylindrical rod with elliptical section // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2018. No. 3 (37). P. 173–177. (in Russian)

Mironov Boris Guryevich

e-mail: mironov.boris.21@gmail.com, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Federal State Institution of Education "Russian University of Transport Moscow, Russia.

Mironov Yuriy Borisovich

e-mail: mistifm@gmail.com, Ph. D., Moscow Technical University of Communication and Informatics (MTUCI), Moscow, Russia.