Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1 (39). С. 20–31

В. А. Ковалев, Е. В. Мурашкин

О ПРИНЦИПЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В ПРОБЛЕМАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СРЕД И МЕТАМАТЕРИАЛОВ

[1] *Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия*
[2]*Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия*

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.003

Аннотация. Настоящая работа посвящена формулировкам определяющих соотношений в диссипирующих деформируемых средах. Предполагается, что рассматриваемые в работе процессы деформирования отвечают термодинамическому принципу ортогональности. Использование принципа термодинамической ортогональности в современной континуальной механике физически и геометрически оправдано при моделировании процессов теплопроводности, массопереноса, теориях упругости, пластичности и ползучести.

Последовательное использование принципа ортогональности и законов Фурье и Фика при выводе определяющих уравнений в процессах тепло- и массопереноса приводит к классическим уравнениям теплопроводности и диффузии. В теории упругости на основе принципа ортогональности можно получить определяющие соотношения Мурнагана. В математических моделях идеально-пластического тела принцип термомеханической ортогональности связан с именем Ричарда вон Мизеса. Постулирование принципа в случае пластически деформируемого тела обеспечивает выпуклость поверхности текучести и существование ассоциированного с этой поверхностью закона пластического течения. При выводе определяющих уравнений для материалов проявляющих в процессах деформирования одновременно свойства медленного крипа (ползучести) и пластичности следует обращать внимание на ассоциированность используемых при таком подходе потенциалов. В качестве примеров использования принципа термомеханической ортогональности в работе предлагаются процедуры получения нелинейных определяющих соотношений в моделях пластического течения, ползучести, связанной термоупругости, теплопереноса третьего типа.

Ключевые слова: ортогональность, пластичность, ползучесть, уравнение баланса, теплоперенос, термоупругость, метаматериалы.

Введение Современная механика континуума сталкивается с трудностями в случае термодинамически корректного описания диссипативных сред. Чаще всего определяющие соотношения в математических моделях термомеханического поведения материалов со сложной реологией постулируются на основе эмпирических предположений без привлечения формализма неравновесной термодинамики [1]. Математическое описание процессов необратимого деформирования материалов (вязкоупругости, пластичности, ползучести, тепло- массопереноса) может быть проведено в рамках классического принципа термомеханической ортогональности [2].

Формулировка принципа термомеханической ортогональности, как вариант обобщения линейной теории Онзагера (L. Onsager), встречаются в работах Циглера (H. Ziegler) [3–5]. Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах [2, 6, 7].

В представленной работе рассматриваются возможности использования принципа термомеханической ортогональности при построении континуальной механики сложных сред и метаматериалов.

1. Пластичность

Одним из важнейших применений принципа ортогональности термодинамических потоков и сил в математической теории пластичности [7] связано с именем Ричарда вон Мизеса (Richard Edler von Mises). Принцип максимума диссипации энергии Мизеса [7-10] является основным определяющим соотношением теории. Принятие принципа максимума диссипации энергии определяет геометрическую выпуклость поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ ($\boldsymbol{\sigma}$ — тензор напряжений Коши) в пространстве напряжений Хейга–Вестергаарда. Коллинеарность вектора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и градиента поверхности текучести в точках ее гладкости, также является следствием принципа Мизеса. Математическая формулировка коллинеарности указанных векторов в пространстве напряжений определяет основной определяющий закон теории пластического течения — ассоциированный с условием текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

В случае обобщенного тела Прандтля поверхность текучести задается соотношением [7,8]

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \Phi\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right), \tag{1}$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения; $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$; Φ — некоторая функция.

Для неплотно–связанных сред, как правило, принимается следующее линейное представление для функции Φ

$$\Phi(x) = C_1 + C_2 x, \tag{2}$$

Ковалев Владимир Александрович

`e-mail:` vlad_koval@mail.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Московский городской университет управления Правительства Москвы, г. Москва, Россия.

Мурашкин Евгений Валерьевич

`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, г. Москва, Россия.

Работа выполнена по теме государственного задания министерства науки и высшего образования РФ (№ госрегистрации АААА-А17-117021310381-8) и финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №18-01-00844-а).

Поступила 12.12.2018

где C_1, C_2 — определяющие пластические константы. Величина C_1 характеризует внутреннее сцепление материала, а C_2 — внутреннее трение. При использовании функции Φ вида (2) можно получить два важных предельных случая, соответствующих известным критериям пластичности.

При $C_2 = 0$ условие (1) преобразуется к хорошо известному кусочно-линейному условию пластичности Кулона–Треска–Сен-Венана, характеризующему критерий максимального касательного напряжения [8-10]

$$f = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\} - 2k = 0; \tag{3}$$

где k — предел текучести материала при чистом сдвиге.

Равенство нулю коэффициента C_1 приводит к условию Мора

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = a^2, \tag{4}$$

где a — пластическая конституента материала. Критерий Мора широко используется в строительстве и в горном деле применительно к рыхлым несвязным и связным горным породам, а также применительно к обломочным сцементированным горным породам.

Интерес также представляет кусочно-линейное условие пластичности Ишлинского–Ивлева[1] или условие максимального приведенного напряжения

$$f = \max\{|\sigma_1 - \sigma|, |\sigma_2 - \sigma|, |\sigma_3 - \sigma|\} - \frac{4k}{3} = 0; \quad \sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \tag{5}$$

Условия пластичности (3) и (5) можно интерпретировать как некоторую поверхность в пространстве напряжений Хейга–Вестергаарда. В частности, условия пластичности Кулона–Треска–Сен-Венана и Ишлинского–Ивлева в пространстве главных напряжений представляются в виде шестиугольных призм вписанных одна в другую рис. 1. При этом, гладкое условие пластичности Губера–Мизеса

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 8k^2 = 0. \tag{6}$$

или условие октаэдрического напряжения оказывается цилиндром вписанным в призму Кулона–Треска–Сен-Венана и описанным около призмы Ишлинского–Ивлева.

Критерий пластического течения при условии выполнения принципа максимума Мизеса можно считать пластическим потенциалом, что приводит к формулировке ассоциированного закона пластического течения в качестве общего определяющего уравнения математической теории пластического течения связывающего инкременты необратимых деформаций dp_{ij} с компонентами тензора напряжений σ_{ij} соотношением

$$dp_{ij} = (d\xi)\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad dp_{ij} = (d\xi_1)\frac{\partial f_1}{\partial \sigma_{ij}} + (d\xi_2)\frac{\partial f_2}{\partial \sigma_{ij}}. \tag{7}$$

Здесь $d\xi$, $d\xi_1$, $d\xi_2$ — неопределенные конституенты Лагранжа, определяемые в ходе решения конкретной краевой задачи; f, f_1, f_2 — функции текучести.

2. Медленный крип

[1]Условие пластичности Ишлинского–Ивлева не обладает ясной физической интерпретацией, присущей условию Кулона–Треска–Сен-Венана. Однако, имеется ряд серьезных аргументов в пользу его рассмотрения [10-16].

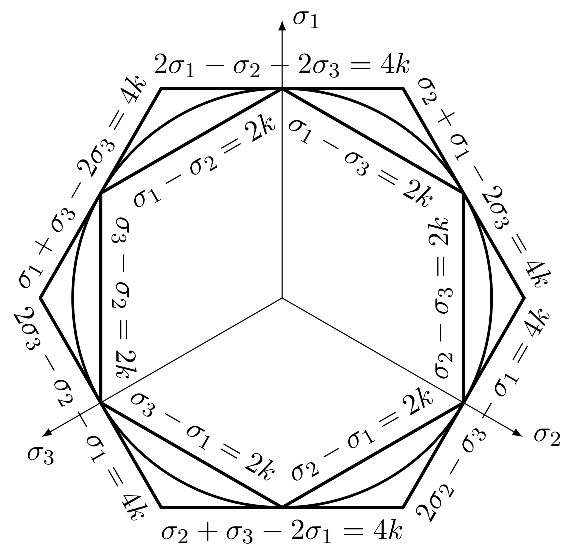

Рис. 1. Условия пластичности в проекции на октаэдрическую плоскость в пространстве главных напряжений. Окружность — условие пластичности Губера–Мизеса. Вписанный шестиугольник — условие пластичности Кулона–Треска–Сен-Венана. Описанный шестиугольник — условие пластичности Ишлинского–Ивлева

Ползучесть металлов при повышенных температурах не описывается линейными теориями. Эволюция деформированного состояния со временем при постоянном напряжений традиционно описывается кривыми ползучести, которые обычно состоят из трех участков ползучести, обычно состоящей из трех участков:

(1) Неустановившаяся ползучесть, характеризуемая постепенным уменьшением скорости деформации.
(2) Установившаяся ползучесть, протекающая при постоянной скорости деформации.
(3) Ускоренная ползучесть, главным признаком которой является возрастание скорости деформации и параллельное накопление повреждений, еще больше ускоряющее ползучесть.

При моделировании поведения материалов на этапе установившейся ползучести можно трактовать его как нелинейно вязкое. Однако, использование существующих нелинейных моделей затруднено отсутствием соответствующего математического аппарата. Особенно это характерно для стадии неустановившейся ползучести. В теории идеальной пластичности некоторый прогресс был достигнут на основе использования кусочно-линейных потенциалов скоростей деформаций. Д.Д. Ивлевым и Г.И. Быковцевым было замечено [10], что таким же способом может быть построена теория упругости и динамика вязкой жидкости. Г.И. Быковцевым [16] была указана подобная возможность для моделирования необратимого моделирования материалов.

Для составляющих тензора скоростей ползучих деформаций $\dot{\varepsilon}^c_{ij}$ примем существование диссипативного потенциала $V(\sigma^{ij})$, тогда согласно принципу термомеханической ортогональности можем записать

$$\dot{\varepsilon}^c_{ij} = \frac{\partial V(\sigma^{ij})}{\partial \sigma^{ij}}, \tag{8}$$

Потенциал $V(\sigma^{ij})$ в определяющем уравнении (8) можно выбрать воспользовавшись эмпирическими зависимостями. В таком случае наиболее распространенные, следующие [1,16,17]:
степенной закон ползучести Нортона–Бейли (F.H. Norton, 1929)

$$V(\sigma^{ij}) = Bf^n\left(\sigma_{ij}\right). \tag{9}$$

Здесь B, n — параметры ползучести материала, B — скоростная характеристика, n — показатель нелинейности, f — функция напряжений.
экспоненциальная зависимость Людвика (P. Ludwik, 1909)

$$V(\sigma^{ij}) = B\exp\left(f\left(\sigma_{ij}\right)\right). \tag{10}$$

закон гиперболического синуса Надаи (A. Nadai, 1938)

$$V(\sigma^{ij}) = B\,\mathrm{sh}\left(f\left(\sigma_{ij}\right)\right). \tag{11}$$

степенной дробно-линейный закон Шестерикова (1984)

$$V(\sigma) = B\left(\frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma_b - \sigma}\right)^n, \tag{12}$$

где σ_a — пороговое напряжение, характеризующего начало ползучести; σ_b — предел прочности.

При моделировании связанных свойств ползучести и пластичности следует учитывать необходимость ассоциировать функцию f в законе (5) с выбранным условием пластичности.

3. Ковариантные уравнения баланса

Описание напряженно-деформированного состояния термоупругого континуума будем проводить в лагранжевых отсчетных координатах. Конечные деформации континуума определяются преобразованием референциальной конфигурации в актуальную

$$x^k = x^k(X^\alpha, t). \tag{13}$$

Здесь обозначено: x^k — эйлеровы пространственные координаты, X^α — координаты той же точки тела в отсчетном (начальном) состоянии.

Тензоры конечных деформаций, соответствующие отображению (13) можно выразить через градиент деформации

$$x^k_\alpha = {}^{\backprime}\nabla_\alpha \otimes x^k = \partial_\alpha x^k. \tag{14}$$

Здесь введено обозначение ${}^{\backprime}\nabla_\alpha$ для оператора (набла) Гамильтона в лагранжевой отсчетной конфигурации.

Выпишем систему определяющих дифференциальных балансовых уравнений нелинейной для случая связанного термоупругого тела третьего типа. Закон сохранения массы в локальной дифференциальной формулировке можно записать в виде

$${}^{\backprime}\dot{\rho} = 0. \tag{15}$$

Здесь и далее штрих слева от символа обозначает его значение в отсчетном состоянии. Уравнения баланса импульса в лагранжевых переменных имеет вид

$$ {}^{\backprime}\rho \ddot{x}^k = {}^{\backprime}\nabla_\alpha S^{\alpha k}. \tag{16}$$

Здесь $S^{\alpha k} = J\sigma^{ik} X_i^{\cdot\alpha}$ обозначает первый тензор напряжений Пиола—Кирхгофа, при этом $\sigma^{ik} = J^{-1} S^{\alpha k} x_\alpha^{\cdot i}$ — тензор напряжений Коши, $J = \det[x_\alpha^{\cdot k}]$ — якобиан. Уравнения баланса внутренней энергии, следующее из второго закона термодинамики может быть получено в форме

$$ {}^{\backprime}\rho \dot{u} = -{}^{\backprime}\nabla_\beta {}^{\backprime}h^\beta + S_{k\cdot}^{\beta} \dot{x}_\beta^{\cdot k} + {}^{\backprime}\rho q, \tag{17}$$

где u — плотность внутренней энергии, в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии, ${}^{\backprime}h^\alpha = J h^k X_k^{\cdot\alpha}$ — компоненты отсчетного вектора потока тепла, вычисленного в единицу времени на единицу площади в референциальном состоянии, q — плотность объемных источников тепла. Уравнения баланса энтропии

$$ {}^{\backprime}\rho \dot{s} = -{}^{\backprime}\nabla_\beta {}^{\backprime}J^\beta + {}^{\backprime}\rho\varsigma + {}^{\backprime}\rho\xi, \tag{18}$$

где s — плотность энтропии, в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии; ${}^{\backprime}J^\alpha = J J^k X_k^{\alpha\cdot}$ — референциальный вектор потока энтропии, в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии; ς — внешнее производство энтропии, ξ — внутреннее производство энтропии. Уравнение изменения энтропии (18) играет важную роль в неравновесной термодинамике.

Необратимость процессов накладывает ограничение на внутреннее производство энтропии

$$ \xi \geqslant 0. \tag{19}$$

4. Связанная термоупругость

В качестве термодинамического базиса для моделирования поведения термоупругого континуума третьего типа GNIII можно выбрать[18–21]:

$$ \vartheta, \quad \dot{\vartheta}, \quad {}^{\backprime}\nabla_\alpha \vartheta, \quad {}^{\backprime}\nabla_\alpha \dot{\vartheta}, \quad x_\alpha^{\cdot k}, \tag{20}$$

где ϑ — температурное смещение. Параметры рассматриваемого термодинамического состояния будем полагать независимыми тогда они образуют термодинамический базис. Выбор термодинамического базиса определяет идеологию конструирования разрешающей системы уравнений, составляющих математическую модель исследуемого материала.

Воспользовавшись аппаратом вариационного исчисления при учете дифференциальных уравнений (15)–(17) в качестве ограничений и использование температуры к роли множителя Лагранжа можно получить равенства соотвествующих термодинамических переменных

$$ \theta {}^{\backprime}J^\alpha = {}^{\backprime}h^\alpha, \quad \theta\varsigma = q, \tag{21}$$

где θ — абсолютная температура.

Преобразуя систему уравнений (15)–(18) с помощью равенств (21) не сложно получить приведенное уравнение баланса энергии

$$ -{}^{\backprime}\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + S_{k\cdot}^{\beta} \dot{x}_\beta^{\cdot k} - {}^{\backprime}J^\beta {}^{\backprime}\nabla_\beta \theta = \theta\xi, \tag{22}$$

где $\psi = u - s\theta$ — объемная референциальная плотность свободной энергии Гельмгольца.

Отметим, что приведенное уравнение баланса энергии (22) справедливо для допустимых процессов при условии неотрицательного внутреннего производства энтропии

(19) и выполнении дифференциальных балансовых уравнений (15)–(18). Учитывая, что коэффициенты при переменных $\ddot{\vartheta}$, $`\nabla_\alpha\ddot{\vartheta}$, $\dot{x}^{\cdot k}_{\alpha}$ должны быть равны нулю в представлении функции свободной энергии $\psi$ в виде степенного ряда. Окончательно, можно заключить о независимости свободной энергии Гельмгольца от термодинамической переменной состояния $`\nabla_\alpha\dot{\vartheta}$

$$\psi = \psi(\vartheta, \dot{\vartheta}, `\nabla_\alpha\vartheta, x^{\cdot k}_{\alpha});$$

тогда, имеют место соотношения для энтропии и тензора напряжений:

$$s = -\frac{1}{\dfrac{\partial\theta}{\partial\dot{\vartheta}}}\frac{\partial\psi}{\partial\dot{\vartheta}}, \qquad S^{\alpha\cdot}_{k\cdot} = \frac{\partial\psi}{\partial x^{\cdot k}_{\alpha}}. \tag{23}$$

Внутреннее производство энтропии можно вычислить согласно соотношению

$$\theta\xi = -\left(`J^\beta + \frac{\partial\psi}{\partial`\nabla_\beta\vartheta}\right)`\nabla_\beta\dot{\vartheta} - \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\dot{\vartheta}. \tag{24}$$

Соотношение (24) можно переписать приняв в расчет независимость свобоной энергии от температурного смещения ϑ в явном виде

$$\theta\xi = -\left(`J^\beta + \frac{\partial\psi}{\partial`\nabla_\beta\vartheta}\right)`\nabla_\beta\dot{\vartheta}. \tag{25}$$

5. Теплоперенос. Диссипативный потенциал

Функция диссипативного потенциала играет решающую роль в механике необратимых процессов. Определим диссипативный потенциал основываясь на принципе термодинамической ортогональности в следующем виде

$$\theta\xi = \mathcal{D} = \mathcal{D}(\dot{\vartheta}, `\nabla_\alpha\vartheta, x^{\cdot k}_{\alpha}, `\nabla_\alpha\dot{\vartheta}). \tag{26}$$

Будем считать его функцией, зависящей термодинамической силы $-`\nabla_\alpha\dot{\vartheta}$. Тогда, соответствующее определяющее уравнение в пространстве термодинамических сил, так что необратимая составляющая термодинамического потока $`J^\alpha + \dfrac{\partial\psi}{\partial`\nabla_\alpha\vartheta}$ будет ортогональна некоторой поверхности уровня диссипативного потенциала $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, `\nabla_\alpha\vartheta, x^{\cdot k}_{\alpha}, `\nabla_\alpha\dot{\vartheta}) = \mathrm{const}$. Причем, в тех точках, где заданная поверхность уровня будет гладкой можно записать соотношение градиентальности:

$$`J^\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial`\nabla_\alpha\vartheta} = -\lambda^*\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial`\nabla_\alpha\dot{\vartheta}}, \tag{27}$$

или с другой стороны, выражая вектор потока энтропии в отсчетном состоянии

$$`J^\alpha = -\frac{\partial\psi}{\partial`\nabla_\alpha\vartheta} - \lambda^*\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial`\nabla_\alpha\dot{\vartheta}}. \tag{28}$$

В уравнении 28 неопределенную конституенту λ^* можно вычислить воспользовавшись определяющим уравнением (26) для диссипативного потенциала $\mathcal{D}$ по следующей формуле

$$\theta\xi = \mathcal{D} = \lambda^*(`\nabla_\beta\dot{\vartheta})\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial`\nabla_\beta\dot{\vartheta}},$$

или, выражая λ^*, окончательно получаем

$$\lambda^* = \frac{1}{({}^{\backprime}\nabla_\beta\dot{\vartheta})\dfrac{\partial\mathcal{D}}{\partial{}^{\backprime}\nabla_\beta\dot{\vartheta}}}\mathcal{D}. \tag{29}$$

Закон теплопроводности для термоупругого континуума типа GNIII можно выписать на основании принципа термодинамической, подстановкой (29) в соотношение (28), в виде

$${}^{\backprime}J^\alpha = -\frac{\partial\psi}{\partial{}^{\backprime}\nabla_\alpha\vartheta} - \frac{\mathcal{D}}{({}^{\backprime}\nabla_\beta\dot{\vartheta})\dfrac{\partial\mathcal{D}}{\partial{}^{\backprime}\nabla_\beta\dot{\vartheta}}}\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial{}^{\backprime}\nabla_\alpha\dot{\vartheta}}. \tag{30}$$

Справедливость неравенства $\xi \geqslant 0$ гарантируется выпуклостью поверхностей уровня $\mathcal{D}(\dot{\vartheta}, {}^{\backprime}\nabla_\alpha\vartheta, x_{\alpha}^{\cdot k}, {}^{\backprime}\nabla_\alpha\dot{\vartheta}) = \mathrm{const}$ в пространстве термодинамических сил.

Уравнение (30) по сути является определением закона теплопереноса в GNIII континууме. Отметим, что полученный закон удовлетворяет принципу ортогональности термодинамических потоков и сил. Полученные соотношения могут быть легко преобразованы на случай отсутствия внутренних источников производства энтропии в термоупруго деформируемой среде, т.е. при условии $\mathcal{D} = 0$ закон теплопереноса приобретает форму

$${}^{\backprime}J^\alpha = -\frac{\partial\psi}{\partial{}^{\backprime}\nabla_\alpha\vartheta}, \tag{31}$$

что означает однозначное определение потока энтропии по свободной энергии Гельмгольца.

Классические модели связанных термоупругих сред GNI/CTE, основанные на законе теплопроводности Фурье, строятся в условиях принятия явной независимости свободной энергии ψ от температурного смещения ϑ и его градиента $\nabla_\alpha\vartheta$. В этом случае свободную энергию следует выписывать в виде

$$\psi = \psi(\dot{\vartheta}, x_{\alpha}^{\cdot k}).$$

Внутреннее производство энтропии, соответствующее моделям типа GNI/CTE следует принять в форме

$$\theta\xi = -{}^{\backprime}J^{\alpha}\,{}^{\backprime}\nabla_\alpha\dot{\vartheta}.$$

Окончательно, для вектора производства энтропии, можно получить уравнение, являющееся обобщением закона теплопереноса Фурье

$${}^{\backprime}J^\alpha = -\frac{\mathcal{D}}{({}^{\backprime}\nabla_\beta\dot{\vartheta})\dfrac{\partial\mathcal{D}}{\partial{}^{\backprime}\nabla_\beta\dot{\vartheta}}}\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial{}^{\backprime}\nabla_\alpha\dot{\vartheta}}. \tag{32}$$

Отметим, что при моделировании термоупругого поведения типа GNIII деформируемых материалов с использованием принципа термодинамической ортогональности вектор потока энтропии согласно определяющему уравнению (30) зависит от двух эмпирических функций: свободной энергии Гельмгольца ψ и диссипативного потенциала $\mathcal{D}$. При этом возникает его естественное расщепление на две компоненты: обратимую

$$-\frac{\partial\psi}{\partial{}^{\backprime}\nabla_\alpha\vartheta}$$

и необратимую

$$-\frac{\mathcal{D}}{(`\nabla_\beta \dot{\vartheta})\dfrac{\partial \mathcal{D}}{\partial `\nabla_\beta \dot{\vartheta}}}\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial `\nabla_\alpha \dot{\vartheta}}.$$

Заключение

Подводя итоги, заметим, что использование принципа термомеханической ортогональности позволяет термодинамически корректно моделировать широкий круг термомеханических процессов, включая процессы тепло- и массопереноса, теории пластичности, ползучести и термоупругости. Приведены примеры наиболее используемых в расчетах поверхностей текучести для идеально пластических сред. Предложена методика получения определяющих соотношений теорий ползучести и выписаны некоторые формы диссипативных потенциалов для материалов, деформируемых в условиях установившейся ползучести. Продемонстрирован способ получения ковариантных форм балансовых уравнений для связанных термоупругих континуумов третьего типа. Для процессов теплопроводности указаны связи сопряженного потенциала рассеяния с термодинамическими силами и потоками. Предложенные выше методы построения математических моделей сложных сред успешно применялись при решении краевых задач упругопластичности [22], термоупругопластичности [23], вязкоупргопластичности [24], микрополярных сред [25].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Локощенко А. М. Моделлирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.

[2] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н., Семенов Д. А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4. Ч. 2. С. 94-128.

[3] Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966. 134 с.

[4] Ziegler H. Proof of an orthogonality principle in irreversible thermodynamics // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1970. Vol. 21. No. 6. P. 853–863.

[5] Ziegler H. Discussion of some objections to thermomechanical orthogonality // Archive of Applied Mechanics. 1981. Vol. 50. No. 3. P. 149–164.

[6] Жермен П. Курс механики сплошных сред. М.: Высш. школа, 1983. 399 с.

[7] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности. Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

[8] Радаев Ю. Н. Пространственная задача математической теории пластичности (2-е изд., перераб. и доп.). Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2006. 340 с. (ISBN 5-86465-366-7) (Электронная копия опубликована в электронной библиотеке системы федеральных образовательных порталов http://window.edu.ru/window/library (рег. N 63-01/0023).)

[9] Радаев Ю. Н. О кинематических соотношениях, определяющих пространственное пластическое течение на грани и ребре призмы Кулона–Треска// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №6/1(46). 2006. С. 123-156.

[10] Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности // Владивосток: Дальнаука. 1998. 528 с.

[11] Радаев Ю. Н. О дополнительном тензорном соотношении симметрии в математической теории пластичности// Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. №3. 2007. С. 109–125.

[12] Климов Д. М., Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. К 80-летию Д.Д. Ивлева // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2010. №2(8). Ч. 1. С. 5–38.

[13] Радаев Ю. Н., Гудков В. А. О t-гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №3(37). 2005. С. 57–71. zbMATH: Zbl 1316.74011

[14] Радаев Ю. Н. О соотношениях перестановочности Ишлинского в математической теории пластичности// Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №6(56). 2007. С. 102–114.

[15] Быковцев Г. И. Общие свойства уравнений нелинейной теории упругости при кусочно-линейных потенциалах // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 6. №. 3. С. 505.

[16] Ивлев Д. Д., Максимова Л. А., Непершин Р. И., Радаев Ю. Н., Сенашов С. И., Шемякин Е. И. Предельное состояние деформируемых твердых тел и горных пород. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 832 с.

[17] Астафьев В. И.,Радаев, Ю. Н., Степанова Л. В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Самарский ун-т, 2001.

[18] Green A. E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.

[19] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.

[20] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

[21] Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Связанная термомеханическая ортогональность в нелинейных моделях термоупругости третьего типа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 1(30) (2013), С. 207—214.

[22] Ковтанюк Л. В., Мурашкин Е. В. Формирование полей остаточных напряжений у одиночных сферических включений в идеальной упругопластической среде // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. №. 1. С. 94–104.

[23] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modelling framework for thermo-elastic-plastic materials processing // Procedia Manufacturing. 2017. Vol. 7. C. 427–434.

[24] Бажин А. А., Мурашкин Е. В. О ползучести и релаксации напряжений в окрестности микропоры в условиях гидростатического нагружения и разгрузки // Доклады Академии наук. 2012. Vol. 445. №. 6. С. 640–640.

[25] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On a classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23. №. 1. P. 10–13.

V. A. Kovalev, E. V. Murashkin

ON THE THERMOMECHANICAL ORTHOGONALITY PRINCIPLE FOR PROBLEMS OF COMPLEX CONTINUA AND METAMATERIAL MODELING

Moscow City University of Management, Moscow, Russia
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia

Abstract. The present study is devoted to formulations of constitutive equations for dissipative continua. The consistence of the principle of thermomechanical orthogonality and deformation processes is assumed. The application of orthogonality principle is physically and geometrically reasonable for simulation problems of plasticity, creep, elasticity and thermoconductivity.

Consequent applying of orthogonality principle and Furie's and Fick's laws for derivation of constitutive equations in heat and mass transfer leads to conventional equations of thermoconductivity and diffusion. The Murnaghan constitutive equations in elasticity can be obtain by the principle of thermomechanical orthogonality. This principle in the frameworks of mathematical plasticity theory akin to R. von Mises. The principle manifestation for plastic solids provides the convexity of yield surface and satisfaction of associated plastic flow rule. It should be noted that the creep and plastic potentials are need to be conjugated for coupled deformation processes. The procedure of constitutive equations derivations in frameworks of plastic flow, creep, coupled thermoelasticity, type-III thermoconductivity are discussed at present study as an example of the thermomechanical orthogonality principle application.

Keywords: orthogonality, plasticity, creep, balance equation, heat transfer, thermoelasticity, metamaterial.

REFERENCES

[1] Lokoshchenko A.M. Modeling the process of creep and long-term strength of metals. M .: MGIU, 2007. 264 p. (in Russian)

[2] Kovalev V.A., Radaev Yu.N., Semenov D.A. Bound dynamic problems of hyperbolic thermoelasticity // Izv. Sarat. Un. New Ser. Maths. Mechanics. Computer science. 2009. Vol. 9. I. 4. Part 2. P. 94–128. (in Russian)

[3] Ziegler G. Extreme principles of thermodynamics of irreversible processes and continuum mechanics. M .: Mir, 1966. 134 p. (in Russian)

[4] Ziegler H. Proof of the irreversible thermodynamics // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP). 1970. Vol. 21. No. 6. P. 853–863.

[5] Ziegler H. Discussion on thermomechanical orthogonality // Archive of Applied Mechanics. 1981. Vol. 50. No. 3. P. 149–164.

[6] Germain P. Course of continuum mechanics. M .: Higher. school, 1983. 399 p. (in Russian)

[7] Radaev Yu. N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity. Samara: Publishing House of Samara State University, 2004. 147 p. (in Russian)

[8] Radaev Yu. N. The spatial problem of the mathematical theory of plasticity (2nd ed., pererabot and add.). Samara: Publishing House of Samara State. University, 2006. 340 p. (ISBN 5-86465-366-7) (The electronic copy is published in the electronic library of the federal educational system portals http://window.edu.ru/window/library (reg. N 63-01 / 0023).) (in Russian)

Kovalev Vladimir Alexandrovich

`e-mail:` vlad_koval@mail.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Moscow City University of Management, Moscow, Russia.

Murashkin Evgenii Valeryevich

`e-mail:` murashkin@ipmnet.ru, Cand. Sci. Phys. & Math., Senior Researcher, Institute for Problems in Mechanics of RAS, Moscow, Russia.

[9] Radaev Yu. N. On the kinematic relations that determine the spatial plastic flow on the verge and edge of the Coulomb prism - Tresca // Herald of the Samara State. university. Natural science series. No. 6/1 (46). 2006. P. 123–156.

[10] Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. The theory of plasticity // Vladivostok: Dal'nauka. 1998. 528 p. (in Russian)

[11] Radaev Yu. N. On the additional tensor relation of symmetry in mathematical plasticity theory // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. № 3. 2007. P. 109–125. (in Russian)

[12] Klimov D. M., Kovalev V. A., Radaev Yu. N. On the 80th anniversary of D. D. Ivleva // Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State. 2010. №2 (8). V. 1. P. 5–38. (in Russian)

[13] Radaev Yu. N., Gudkov V. A. On the t -hyperbolicity of the spatial equations of the theory plasticity // Bulletin of the Samara State. university. Natural science series. No. 3 (37). 2005. P. 57–71. zbMATH: Zbl 1316.74011 (in Russian)

[14] Radaev Yu. N. On the relations of Ishlinsky permutability in the mathematical theory of plasticity // Bulletin of the Samara State University. Natural science series. No. 6 (56). 2007. P. 102–114. (in Russian)

[15] Bykovtsev G. I. General properties of the equations of the nonlinear theory of elasticity with piecewise linear potentials // Applied Mathematics and Mechanics. 1996. V. 6. No. 3. P. 505. (in Russian)

[16] Ivlev D. D., Maksimova L. A., Nepershin R. I., Radaev Yu. N., Senashov S. I., Shemyakin E. I. The limiting state of deformable solids and rocks. M .: FIZMATLIT, 2008. 832 p. (in Russian)

[17] Astafiev V. I., Radaev Yu. N., Stepanova L. V. Nonlinear Fracture Mechanics. Samara: Samara University, 2001.

[18] Green A. E., Naghdi P. M. On undamped heat waves in an elastic elastic // J. Thermal Stresses. 1992. Vol. 15. P. 253–264.

[nineteen] Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity. 1993. Vol. 31. P. 189–208.

[20] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Wave problems of field theory and thermomechanics. Saratov: Publisher Sarat. Un-ta, 2010. 328 p.

[21] Kovalev V. A., Radaev Yu. N. Associated thermomechanical orthogonality in nonlinear models of thermoelasticity of the third type // Vestn. Himself. state tech. un-that. Ser. Phys.-mat. Sciences. 2013. 1(30). P. 207—214. (in Russian)

[22] Kovtanyuk L. , Murashkin E. Formation of residual stress fields in single spherical inclusions in an ideal elastoplastic medium // Izv. RAN. Solid mechanics. 2009. No. 1. P. 94–104. (in Russian)

[23] Dats E., Murashkin E., Stadnik N. On a multi-physics modeling processing // Thermal-elastic-plastic materials processing. 2017. Vol. 7. P. 427–434.

[24] Bazhin A. A., Murashkin E. V. On creep and stress relaxation in the vicinity of a micropore under hydrostatic loading and unloading conditions // Reports of the Academy of Sciences. 2012. Vol. 445. No. 6. P. 640–640. (in Russian)

[25] Murashkin E. V., Radayev Y. N. On the classification of weak discontinuities in micropolar thermoelasticity // Materials Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23. No. 1. P. 10–13.