Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева
Серия: Механика предельного состояния. 2019. № 1 (39). С. 32–35

С. И. Сенашов, И. Л. Савостьянова

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Аннотация. В статье рассмотрены уравнения анизотропной теории пластического течения в пространственном случае. На основе группы непрерывных преобразований, допускаемой системой, построено инвариантное решение. В случае однородного напряженного состояния найдено новое поле скоростей. Это поле имеет функциональный произвол.

Ключевые слова: теория пластичности, анизотропия.

УДК: 539.374

DOI: 10.26293/chgpu.2019.39.1.004

Введение. Большинство используемых в производстве материалов в большей или меньшей степени обладают анизотропными свойствами. Поэтому изучение уравнений, описывающих поведение таких материалов, является важной и актуальной задачей. Системы дифференциальных уравнений, описывающие поведение анизотропных пластических материалов являются очень сложными для исследования. Анизотропия приводит к тому, что уменьшается количество симметрий, допускаемых этими уравнениями, и это сразу приводит к уменьшению количества инвариантных решений, которые можно найти для этих систем. А так, как правило, только такие решения мы и умеем строить, то и не удивительно, что известных точных решений для этих уравнений так мало. Поэтому любое новое решение, построенное для таких уравнений, обладает значительной ценностью. В предлагаемой работе построены поля скоростей для однородного напряженного состояния. Показано, что эти поля скоростей имеют функциональный произвол. Авторы надеются, что именно этот произвол позволит удовлетворять кинематическим граничным условиям, которые возникают в различных технологических и научных задачах.

Сенашов Сергей Иванович
`e-mail:` sen@sibsau.ru, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.
Савостьянова Ирина Леонидовна
`e-mail:` savostyanova@sibsau.ru, кандидат педагогических наук, Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, Россия.

Поступила 16.01.2019

Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений, описывающих пластическое течение среды Мизеса в анизотропном случае [1]

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0, i, j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

$$a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2a_{12}\sigma_{12}^2 + 2a_{13}\sigma_{13}^2 + 2a_{23}\sigma_{23}^2 = 1.$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, a_{ij} —- параметры, характеризующие текущее состояние анизотропии. По повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Компоненты тензора скоростей деформации e_{ij} связаны с компонентами тензора напряжений соотношениями

$$\begin{aligned}
&\lambda e_{11} = \lambda \partial_1 u = a_{22}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22}),\\
&\lambda e_{22} = \lambda \partial_2 v = a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{22} - \sigma_{11}),\\
&\lambda e_{33} = \lambda \partial_3 w = a_{11}(\sigma_{33} - \sigma_{22}) + a_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11}),\\
&\lambda e_{12} = \lambda(\partial_2 u + \partial_1 v) = 2a_{12}\sigma_{12},\\
&\lambda e_{13} = \lambda(\partial_3 u + \partial_1 w) = 2a_{13}\sigma_{13},\\
&\lambda e_{23} = \lambda(\partial_3 v + \partial_2 w) = 2a_{23}\sigma_{23}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости, λ — неотрицательная функция.

Известно, что система уравнений (1),(2) допускает группу непрерывных преобразований, которая порождается следующими операторами [2]:

$$\begin{aligned}
&X_i = \partial_i, i = 1, 2, 3, X_4 = \partial_u, X_5 = \partial_v, X_6 = \partial_w,\\
&X_7 = x_1\partial_v - x_2\partial_u, X_8 = x_3\partial_u - x_1\partial_w,\\
&X_9 = x_2\partial_w - x_3\partial_v, X_{10} = x_i\partial_i,\\
&X_{11} = u\partial_u + v\partial_v + w\partial_w, X_{11} = \partial_{\sigma_{11}} + \partial_{\sigma_{22}} + \partial_{\sigma_{33}}
\end{aligned} \tag{3}$$

В [2] приведены некоторые точные решения, построенные на основе алгебры Ли L_{14} (3) для системы уравнений (1),(2).

Решение уравнений. Построим еще одно инвариантное решение. Будем искать его в виде

$$\begin{aligned}
&u = f_1\left(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d\right),\\
&v = f_2\left(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d\right),\\
&w = f_3\left(ax_1 + bx_2 + cx_3 + d\right)
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь a, b, c, d — произвольные постоянные, f — искомые гладкие функции.

Замечание. Это решение инвариантно относительно одномерной подалгебры, порождаемой оператором $X_1 + X_2 + X_3$, при условии что

$$a + b + c = 0. \tag{5}$$

Подставляя (4) в уравнения (1), (2) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно переменной $t = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\partial_t\left(a\sigma_{11} + b\sigma_{12} + c\sigma_{13}\right) = 0,\\
&\partial_t\left(a\sigma_{12} + b\sigma_{22} + c\sigma_{23}\right) = 0,\\
&\partial_t\left(a\sigma_{13} + b\sigma_{23} + c\sigma_{33}\right) = 0,\\
&\lambda a\partial_t f_1 = a_{22}(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22}),\\
&\lambda b\partial_t f_2 = a_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33}) + a_{33}(\sigma_{22} - \sigma_{11}),\\
&\lambda\partial_t(af_2 + bf_1) = 2a_{12}\sigma_{12},\\
&\lambda\partial_t(af_3 + cf_1) = 2a_{13}\sigma_{13}, \lambda\partial_t(bf_3 + cf_2) = 2a_{23}\sigma_{23}
\end{aligned} \tag{6}$$

Из системы (6) следует, что

$$\begin{aligned}
&a\sigma_{11} + b\sigma_{12} + c\sigma_{13} = const,\\
&a\sigma_{12} + b\sigma_{22} + c\sigma_{23} = const,\\
&a\sigma_{13} + b\sigma_{23} + c\sigma_{33} = const.
\end{aligned} \tag{7}$$

Наиболее простое напряженное состояние, удовлетворяющее (7) и условию пластичности – однородное напряженное состояние, т.е. такой случай, когда все компоненты тензора напряжений постоянны.

Замечание. Для изотропной пластической среды соответствующие поля скоростей построены в работах [3,4].

Условие (5), в этом случае соответствует условию несжимаемости материала. Несложно показать, что однородное напряженное состояние реализуется только в случае, когда

$$f = f_1 = Af_2 = Bf_3,$$

где A, B – постоянные, f - гладкая функция. Условие (5), в силу произвольности постоянных, переходит теперь в условие

$$a + Ab + Bc = 0.$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} - \sigma_{33} = \lambda \left(a\left(a_{11} + a_{22}\right) + Aba_{33}\right)\Delta^{-1},\\
&\sigma_{22} - \sigma_{33} = \lambda \left(Ab\left(a_{22} + a_{33}\right) + aa_{33}\right)\Delta^{-1},\\
&\sigma_{11} - \sigma_{22} = \lambda \left(Ab\left(a_{22}\right) - aa_{11}\right)\Delta^{-1},\\
&\Delta = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33},\\
&2a_{12}\sigma_{12} = \lambda\left(b + aA\right),\\
&2a_{13}\sigma_{13} = \lambda\left(c + aB\right),\\
&2a_{23}\sigma_{23} = \lambda\left(bB + cA\right).
\end{aligned}$$

Заключение. В работе построено поле скоростей, соответствующее однородному напряженному состоянию. Это поле содержит произвольную гладкую функцию. Это еще раз подтверждает тот факт, что каждому напряженному состоянию отвечает несколько полей скоростей, в данном случае – бесконечно много.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Хилл Р. Математическая теория пластичности. М. , Гостехиздат, 1956. 407 с.

[2] Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашов С. И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск. , Наука, 1985. 142 с.

[3] Прагер В. Трехмерное пластическое течение при однородном напряженном состоянии.// Механика: Сб. переводов и обзоров иностр. лит. , 1958. №3. С. 23–27.

[4] Сенашов С. И., Савостьянова И. Л. Новые трехмерные пластические течения, соответствующие однородному напряженному состоянию // Сибирский журнал индустриальной математики. – Новосибирск. , 2019. (в печати)

S. I. Senashov, I. L. Savostyanova

EXACT SOLUTIONS OF THE EQUATIONS OF ANISOTROPIC THEORY OF PLASTICITY

Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

Abstract. The equations of anisotropic theory of plastic flow in the spatial case are considered. Based on the group of continuous transformations allowed by the system, we constructed an invariant solution. In the case of a homogeneous stress state, a new velocity field is found. This field has functional arbitrariness.

Keywords: theory of plasticity, anisotropy.

REFERENCES

[1] Hill R. Mathematical theory of plasticity. M. , Gostehizdat, 1956. 407 p. (in Russian)

[2] Annin B. D., Bytoev V. O., Senashov S. I. Group properties of equations of elasticity and plasticity. Novosibirsk , Nauka, 1985. 142 p. (in Russian)

[3] Prager V. Three-Dimensional plastic flow at a uniform stress state // Mechanics: Collection of translations and reviews of foreign literature. , 1958. №3. P. 23–27.(in Russian)

[4] Senashov S. I., Savostyanova I. L. New three-dimensional plastic flows corresponding to a homogeneous stress state // Siberian journal of industrial mathematics. Novosibirsk. , 2019. (in print)

Senashov Sergei Ivanovich
`e-mail:` sen@sibsau.ru, Dr. Sci. Phys. & Math., Professor, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia.
Savostyanova Irina Leonidovna
`e-mail:` savostyanova@sibsau.ru, Ph.D. in Pedagogy, Reshetnev Siberian State University of Science and Technology , Krasnoyarsk, Russia.